প্রথম সংস্করণের ভূমিকা

আমার দীর্ঘ ৮২ বৎসর ব্যাপী জীবনের প্রায় অর্ধশতাব্দীকাল গণিত শিক্ষক, প্রধান শিক্ষক, পরীক্ষক ও প্রধান পরীক্ষকরূপে শিক্ষকতায় ব্রতী থাকিয়া অবসর গ্রহণ করিয়াছি এবং বহু শ্রদ্ধেয় শিক্ষক মহাশয়ের বন্ধুত্বলাভে ধন্য হইয়াছি।

এই দীর্ঘকালের মধ্যে শিক্ষার ধারা পর্যায়ক্রমে ম্যাট্রিক, স্কুল ফাইন্যাল, হায়ার সেকেণ্ডারী, (অধুনা) সেকেণ্ডারী ও একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণীর হায়ার সেকেণ্ডারীরূপে পরিবর্তিত এবং তৎসঙ্গে নূতন নূতন পাঠ্যক্রম (সিলেবাস) প্রবর্তিত হইয়াছে। প্রতিক্ষেত্রে অতি তৎপরতার সহিত নূতন সিলেবাস অনুযায়ী গণিতের পাঠ্য-পুস্তক প্রণয়ন করিয়া ছাত্রছাত্রীদের পাঠ্য-পুস্তক **প্রাপ্তির অভাব প্রথম** দূরীভূত করিয়াছি।

এতদিন আমার প্রণীত তিন খণ্ড H. S. Elective Mathematics পুস্তক শ্রদ্ধেয় শিক্ষকমণ্ডলী সহানুভূতির সহিত গ্রহণ করিয়াছিলেন। বর্তমানে একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণীর হায়ার সেকেণ্ডারীর জন্য গণিতের যে নূতন সিলেবাস Council কর্তৃক প্রবর্তিত হইয়াছে তাহার প্রথম পত্রের বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Analytical Geometry)-র পাঠ্যাংশ প্রায় সবই আমার ঐ ৩ খণ্ড পুস্তকের অন্তর্ভুক্ত ও উহাতে সুসন্নিবেশিত ছিল। এক্ষণে নূতন সিলেবাস অনুসারে বিষয়গুলি ঐ ৩ খণ্ড হইতে লইয়া **নূতনভাবে সংযোজিত, পরিবর্ধিত ও সংশোধিত** করিয়া "Higher Secondary Mathematics" প্রথম পত্র (For General Course) নামে এই পুস্তকটি প্রকাশিত হইল। কেবল স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অংশটি বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে নূতনভাবে লিখিত হইয়াছে। নবপ্রবর্তিত মাধ্যমিক শিক্ষায় জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য মনে রাখিয়া ধারাবাহিকতা বজায় রাখিবার জন্য বিভিন্ন রূপান্তর ও তাহাদের প্রয়োগে বিভিন্ন জ্যামিতিক ধর্মের অপরিবর্তনীয়তা সম্বন্ধে আলোচনা সংযোজিত হইল। আমার স্নেহভাজন অধ্যাপক শ্রীকেশব বসু (প্রাক্তন ছাত্র) ও অধ্যাপক শ্রীআনন্দমোহন ঘোষের সক্রিয় সহযোগিতায় এই পরিবর্তন সাধিত হইয়াছে।

আমার পুত্র শ্রীমান দেবীপ্রসাদের ঐকান্তিক প্রচেষ্টায় অতি সত্বর এই গ্রন্থের প্রকাশ সম্ভব হইয়াছে। এই নূতন পুস্তকেও আমার পূর্ব প্রচলিত গণিত পুস্তকগুলির সকল বৈশিষ্ট্য বজায় রাখা হইয়াছে এবং **ছাত্রছাত্রীর অসুবিধার কথা চিন্তা করিয়াই উদাহরণরূপে বহু অঙ্কের সমাধান সন্নিবেশিত হইয়াছে।** সেজন্য পুস্তকের পৃষ্ঠা সংখ্যা কম করা সম্ভব হয় নাই। এই পুস্তকের দ্বিতীয় পত্র উক্ত দুই অধ্যাপকের সহযোগিতায় রচিত হইয়াছে এবং উহার মুদ্রণ কার্য আরম্ভ হইয়াছে।

আশা করি, সুধী শিক্ষকমণ্ডলী এই বৃদ্ধ অবসরপ্রাপ্ত শিক্ষকের শেষ জীবনে রচিত এই পুস্তকটিকে পূর্বপ্রচলিত (**H. S. Elective Mathematics**) পুস্তকটির ন্যায় সাদরে গ্রহণ করিবেন। পুস্তকটির উৎকর্ষসাধনের জন্য তাঁহাদের ও সুধী গণিত অধ্যাপকগণের পরামর্শ শ্রদ্ধার সহিত গৃহীত হইবে।

মুদ্রণের কাজ ত্বরান্বিত করার জন্য কিছু মুদ্রণঘটিত ভুল থাকিয়া গিয়াছে এজন্য অত্যন্ত দুঃখিত। পরবর্তী সংস্করণে উহা অবশ্যই সংশোধিত হইবে। পরিশেষে পুস্তকের প্রকাশনার জন্য প্রকাশক শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল এবং ক্যালকাটা বুক হাউস ও মুদ্রণসংস্থা দুইটির কর্মিবৃন্দের আন্তরিকতা ও নিষ্ঠার জন্য আমরা তাঁহাদের নিকট কৃতজ্ঞ। ইতি—

ঝুলন যাত্রা
গুড়াপ, হুগলী
৫. ৮. '৭৬

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

গত বৎসর এই গ্রন্থের প্রথম সংস্করণ মুদ্রিত হয়। অদ্য ইহার পুনর্লিখিত ও পরিমার্জিত দ্বিতীয় সংস্করণ প্রকাশিত হইল। বহুছাত্রছাত্রীর এই গ্রন্থের জন্য চাহিদা পূরণ করিতে কিছু বিলম্ব হওয়ায় আমরা দুঃখিত। বিদ্যুৎ সরবরাহের দারুণ অভাবের জন্য এই মুদ্রণ কার্য বিলম্বিত হইয়াছে। এই সংস্করণে গত সংস্করণের মুদ্রণ প্রমাদগুলি সংশোধনের জন্য সবিশেষ যত্ন লওয়া হইয়াছে। এই সংস্করণে দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিবার সমীকরণ তত্ত্ব একই অধ্যায়ে অন্তর্ভুক্ত করা হইল। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে পোলার স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে ব্যাপকতর আলোচনাসহ কিছু কিছু নূতন বিষয়বস্তু সংযোজিত হইল। বহু Competitive Public Examination-এ যেরূপ গণিতের প্রশ্ন দেওয়া হয় তৎপ্রতি দৃষ্টি রাখিয়া আমরা এই সংস্করণে কিছু কিছু কঠিন প্রশ্ন ও সমাধান সংযোজিত করিয়াছি। মেধাবী ছাত্রছাত্রীগণ ইহার দ্বারা উপকৃত হইলে আমাদের শ্রম সার্থক হইবে। শ্রদ্ধেয় শিক্ষক ও অধ্যাপক মহাশয়েরা এই সংস্করণটি সাদরে গ্রহণ করিলে আমরা কৃতার্থ হইব। ইতি—

ঝুলনযাত্রা, ১৩৮৪
লক্ষ্মীভবন,
কলিকাতা।

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

তৃতীয় সংস্করণের ভূমিকা

বৎসরান্তে পুস্তকের পুনর্মুদ্রণের প্রয়োজনীয়তা সুধী শিক্ষকগণের এবং ছাত্র-ছাত্রীদের পুস্তকটির প্রতি সমাদরেরই পরিচায়ক। বর্তমান সংস্করণে দ্বিতীয় সংস্করণের বীজগণিত অংশ হইতে বাকী অংশ পাঠক্রম বহির্ভূত (1980 সালের জন্য) হওয়ায় পুনর্মুদ্রিত হইল না। ত্রিকোণমিতি বর্তমানে মাধ্যমিক পরীক্ষার পাঠক্রম বহির্ভূত হওয়ায়, সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধে এই সংস্করণে পৃথক্ আলোচনা করা হইল স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অংশে সামান্য কিছু নূতন তথ্য সংযোজিত হইল এবং এর পাঠ্যবহির্ভূত হওয়ায় রূপান্তর সম্বন্ধে আলোচনা বাদ দেওয়া হইল। আশা করা যায় পূর্বের দুইটি সংস্করণের ন্যায় এই সংস্করণটিও শিক্ষক ও ছাত্রগণ কর্তৃক সমাদৃত হইবে।

জন্মাষ্টমী, ১৩৮৫

লক্ষ্মীভবন,

কলিকাতা,

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

THIRD REVISED SYLLABUS OF MATHEMATICS (July : 1978)

Full Marks—200

PAPER—I (Marks—100)

Algebra, Trignometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Algebra :—30 marks :

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression. Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadraric equation. Premutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logaithms—Compound interest. Use of logarithmic and exponential series.

Trigonometry :—30 marks :

Measure of an angle—Degrees. Radians. Trignometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles.

Analytical Geometry of Two Dimensions :—40 marks :

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of locus. Equations of straight lines. Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix. Definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

সূচীপত্র

বীজগণিত

ত্রিকোণমিতি

---

* দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান পাঠ্যসূচীর অন্তর্গত নহে।

স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি

ত্রিকোণমিতির প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ও কতিপয় সিদ্ধান্ত

I. 1 রেডিয়ান $=57°17'44{\cdot}8''$ (প্রায়), $1° = {\cdot}01745$ রেডিয়ান (প্রায়)

2 সমকোণ $=180° = \pi$ রেডিয়ান।

$\pi = \frac{22}{7} = 3{\cdot}1416$ (আসন্ন)।

বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$; বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$.

কোণের বৃত্তীয়মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ।

II. $\left.\begin{array}{l}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta\\ \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta\end{array}\right\}$ $\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$, $\quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

III $\sin 0° = 0$; $\cos 0° = 1$; $\tan 0° = 0$.

$\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 45° = 1$.

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$

$\sin 90° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\tan 90°$ অসংজ্ঞেয়

$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$;

$\tan 15° = 2-\sqrt{3}$.

$\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+\sqrt{5}}$;

$\sin 22°\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos 22°\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$\tan 22°\frac{1}{2} = \sqrt{2}-1$.

$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos 36° = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$;

$\sin 54° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ $\cos 54° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;

$\sin 67°\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\cos 67°\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$\tan 67°\frac{1}{2} = \sqrt{2}+1$.

$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$;

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$;

$\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

$\sin 180^\circ = 0$; $\cos 180^\circ = -1$; $\tan 180^\circ = 0$.

$\sin 270^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$; $\tan 270^\circ =$ অসংজ্ঞেয়

$\sin 360^\circ = 0$; $\cos 360^\circ = 1$; $\tan 360^\circ = 0$.

IV $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$;

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$;

$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos\theta$; $\cos(90^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$;

$\tan(90^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta$;

$\sin(180^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$; $\cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$;

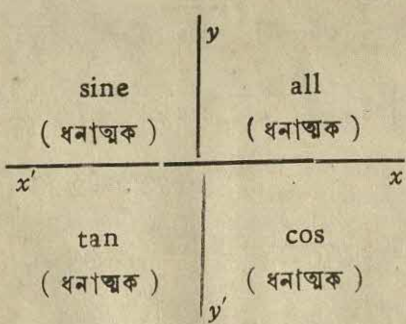
$\tan(180^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta$.

$\sin(270^\circ \pm \theta) = \mp\cos\theta$; $\cos(270^\circ \pm \theta) = \pm\cos\theta$.

$\tan(270^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta$.

$\sin(360^\circ \pm \theta) = \sin\theta$; $\cos(360^\circ \pm \theta) = \cos\theta$;

$\tan(360^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta$.



V. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$.

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$.

$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cot B\cot A\mp 1}{\cot B\pm\cot A}.$$

$$\tan(A+B+C)$$
$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.$$

VI. $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B).$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B).$

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$

VII. $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$

VIII. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$
$=\cos^2B-\cos^2A.$

$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$
$=\cos^2B-\sin^2A.$

IX. $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$

$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$; $\cot 2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$

$\left.\begin{array}{l}1+\cos 2A=2\cos^2A\\ 1-\cos 2A=2\sin^2A\end{array}\right\}$; $\tan 2A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}.$

$\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2A}$; $\cos 2A=\frac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}.$

X. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$

$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.$

$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan A}.$

$\cot 3A=\frac{\cot^3A-3\cot A}{3\cot^2A-1}.$

XI. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}. \qquad \cos\theta = \frac{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}{2\cot\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 1-\cos\theta &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\}; \qquad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

XII. যখন $A+B+C=\pi$, তখন

(*a*) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$

(*b*) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$

(*b*) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1.$

(*d*) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C.$

(*e*) $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

(*f*) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$

(*g*) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$

(*h*) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$

(*i*) $\cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B = 1.$

(*j*) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

(*k*) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$

(*l*) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1.$

(*m*) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

XIII. যখন, $\sin\theta=\sin\alpha$, তখন $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$, [n এর মান শূন্য, অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।]

যখন $\cos\theta=\cos\alpha$, তখন $\theta=2n\pi\pm\alpha$, [„]

„ $\tan\theta=\tan\alpha$, „ $\theta=n\pi+\alpha$, [„]

যখন $\sin\theta=0$, বা, $\tan\theta=0$, তখন $\theta=n\pi$ [„]

„ $\cos\theta=0$, বা, $\cot\theta=0$, „ $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ [„]

যখন $\sin\theta=1$ তখন $\theta=(4m+1)\frac{\pi}{2}$ [m এর মান „]

„ $\sin\theta=-1$ „ $\theta=(4m-1)\frac{\pi}{2}$ [„ „]

„ $\cos\theta=1$, „ $\theta=2m\pi$ [„ „]

„ $\cos\theta=-1$ „ $\theta=(2m+1)\pi$ [„ „]

XIV. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$; $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

$\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x}$.

$\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-x}$,

$2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

$2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

$\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$.

XV. $\log_a(m\times n)=\log_a m+\log_a n$.

$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$. ; $\log_a(m)^n=n\log_a m$.

$\log_b m=\log_b m\times\log_a b$; $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$.

XVI. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$a=b\cos C+c\cos B$, $b=c\cos A+a\cos C$,
$c=a\cos B+b\cos A$.

কোন ত্রিভুজে $2s=a+b+c$ হইলে,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};\ \cot\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{\Delta}.$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2\Delta}{bc}$$

$$\sin B=\frac{2\Delta}{ca};\ \sin C=\frac{2\Delta}{ab}.$$

$$\Delta=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}ca\sin B=\tfrac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c}=\frac{abc}{4R}.$$

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4\Delta}.$$

$$r=\frac{\Delta}{s}$$
$$=4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$$
$$=(s-a)\tan\tfrac{1}{2}A=(s-b)\tan\tfrac{1}{2}B=(s-c)\tan\tfrac{1}{2}C.$$

$$r_1=\frac{\Delta}{s-a}=4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=s\tan\tfrac{1}{2}A.$$

$$r_2=\frac{\Delta}{s-b}=4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=s\tan\tfrac{1}{2}B.$$

$$r_3=\frac{\Delta}{s-c}=4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=s\tan\tfrac{1}{2}C.$$

কতিপয় প্রয়োজনীয় ফল

$\sqrt{2}=1{\cdot}4142135\cdots\cdots$

$\sqrt{3}=1{\cdot}7320508\cdots\cdots$

$\sqrt{5}=2\ 2360679\cdots\cdots$

$\sqrt{6}=2{\cdot}4494897\cdots\cdots$

$\sqrt{7}=2{\cdot}6457513\cdots\cdots$

$\sqrt{8}=2{\cdot}8284271\cdots\cdots$

$\sqrt{10}=3{\cdot}1622776\cdots\cdots$

$\pi=3{\cdot}14159265\cdots\cdots$

$\dfrac{1}{\pi}=0{\cdot}31830989$

$\log 2={\cdot}30103$

$\log 3={\cdot}47712$

$\log 5={\cdot}69897$

$\log 7={\cdot}84510.$

• বীজগণিত •

Algebra

প্রথম অধ্যায়

ভেদ (Variation)

§ 1·1. যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত কোন একটি রাশির মান সর্বদা একই থাকে, অর্থাৎ অন্য রাশিগুলির মান পরিবর্তিত হইলেও ঐ রাশিটির মানের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে সেই রাশিটিকে **ধ্রুবক** (constant) বলা হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে ধ্রুবক রাশির মান অন্য কোন রাশির মানের উপর নির্ভর করে না।

কোন রাশিমালার যে রাশিটির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চল** (variable) রাশি বা চল বলে।

§ 1·2. ভেদ। দুইটি চল রাশির মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে একটির মান পরিবর্তিত হইলে তৎসঙ্গে অন্যটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে একটি চল রাশি অন্যটির সহিত **সরল ভেদে** আছে (one quantity varies directly as the other) বলা হয়।

কার্যত: "সরল ভেদে" না বলিয়া সংক্ষেপে 'ভেদে' আছে বলা হয়।

দৃষ্টান্ত: (i) মনে কর, একটি ট্রেন সমবেগে (uniformly) ঘণ্টায় 20 মাইল করিয়া যাইতেছে। যদি সময়টি দ্বিগুণ করিয়া 2 ঘণ্টা ধরা হয়, তবে দূরত্বও যাওয়া হইবে 20 মাইলের দ্বিগুণ অর্থাৎ 40 মাইল। যদি সময় অর্ধেক ধরা হয়, তবে দূরত্বও অর্ধেক যাওয়া যাইবে। অতএব দেখা গেল যে এখানে সময়ের সহিত দূরত্ব সরল ভেদে আছে (Distance covered is directly proportional to বা varies directly as the time)।

(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, উহার পরিধি $2\pi r$-এর সমান হয় (π এখানে ধ্রুবক)। অতএব, ব্যাসার্ধটিকে দ্বিগুণ, তিনগুণ করিলে, সঙ্গে সঙ্গে বৃত্তের পরিধিটিও মাপে দ্বিগুণ, তিনগুণ হইয়া যাইবে। এখানে বলা যাইবে যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ সরল ভেদে আছে।

§ 1·3. **'ভেদ'-সূচক চিহ্ন।** ভেদ বুঝাইবার জন্য $\propto$ প্রতীক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। y-এর সহিত x সরল ভেদে আছে (x varies as y) বুঝাইবার জন্য সংক্ষেপে $x \propto y$ লেখা হয়।

উপরের প্রথম দৃষ্টান্তে মনে কর ট্রেনটি সমবেগে x মাইল (দূরত্ব) y ঘণ্টায় (সময়) যায়।

ট্রেনটি সমবেগে যাওয়ায় $\frac{x}{y}$ এই অনুপাতটি সর্বদা একই থাকিবে অর্থাৎ যদি x ও y সরলভেদে থাকে, তবে $\frac{x\text{-এর যে কোন মান}}{y\text{-এর অনুরূপ মান}}$ সর্বদা একই থাকিবে।

অতএব, $\frac{x}{y}=$ ধ্রুবক। মনে কর, $\frac{x}{y}=k$ (ধ্রুবক), সুতরাং $x=ky$। ধ্রুবক k-কে **ভেদ-ধ্রুবক** (variation-constant) বলে।

যদি k ধ্রুবক এবং $x=ky$ হয়, তবে $\frac{x}{y}=k=$ ধ্রুবক ; অতএব x-এর সহিত y-এর সরল ভেদ আছে।

সুতরাং দেখিতেছ যে যদি $x\propto y$ হয়, তবে $x=ky$, যেখানে k একটি ধ্রুবক এবং বিপরীত ক্রমে যদি $x=ky$ হয় যেখানে k একটি ধ্রুবক, তবে $x\propto y$।

মনে কর যখন x-এর মান x_1, x_2, x_3······ইত্যাদি তখন y-এর অনুরূপ মান যথাক্রমে y_1, y_2, y_3······ইত্যাদি। $x\propto y$ হইলে x-এর যে কোন দুইটি মান y-এর অনুরূপ মান দুইটির সঙ্গে সমানুপাতিক। সুতরাং

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}, \frac{x_2}{x_3}=\frac{y_2}{y_3},$······ইত্যাদি হইবে।

বা, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=$······ইত্যাদি হইবে।

দুইটি চলের মধ্যে একটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হইলে যদি অন্যটির হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় তাহা হইলেই তাহারা সরল ভেদে আছে বলা যাইবে না। ঐ হ্রাস বা বৃদ্ধি সর্বদা **একই অনুপাতে** হওয়া চাই, নতুবা উভয় চলের মধ্যে সরল ভেদ আছে এরূপ ধরা যাইবে না।

উদাহরণ স্বরূপ দেখ, বর্গক্ষেত্রের বাহুর মাপ বাড়িলে উহার ক্ষেত্রফল বাড়িয়া থাকে, কিন্তু ঐ বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল সমানুপাতী নহে। কারণ, বর্গক্ষেত্রের বাহু দ্বিগুণ করিলে উহার ক্ষেত্রফল 4 গুণ হয়, বাহুটি তিনগুণ হইলে ক্ষেত্রফল 9 গুণ হইবে।

তোমরা জান যে $x=ky$ (k ধ্রুবক) এই সমীকরণটির লেখ মূলবিন্দুগামী একটি সরল রেখা। অতএব, এই লেখস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate) উহার ভুজের (abscissa-র) সহিত সমানুপাতী। সুতরাং বিপরীতক্রমে আমরা বলিতে পারি যে, দুইটি চলরাশির অনুরূপ মানগুলিকে যথাক্রমে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে লেখটি যদি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে ঐ চল দুইটি সরল-ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

§ 1·4. **ভেদ-ধ্রুবকের মান নির্ণয়।** সরল ভেদে অবস্থিত দুইটি চলরাশির দুইটি অনুরূপ মান জানা থাকিলে উহাদের ভেদ-ধ্রুবকের (variation-constant-এর) মান নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. যদি y-এর সহিত x সরলভেদে থাকে এবং $y=13$ হইলে $x=7$ হয়; তবে (i) ভেদ ধ্রুবকের মান, (ii) x ও y-এর মধ্যে সম্বন্ধ এবং (iii) $y=\frac{26}{35}$ হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।

(i) $\because$ $x \propto y$, $x=ky$ (k একটি ভেদ-ধ্রুবক)

$\because$ $y=13$ হইলে $x=7$ হইবে (স্বীকার),

$\therefore$ $7=k\times 13$, $k=\frac{7}{13}$. অতএব নির্ণেয় ভেদ-ধ্রুবক $=\frac{7}{13}$.

(ii) x ও y-এর মধ্যে $x=\frac{7}{13}y$ এই সম্বন্ধ বিদ্যমান।

(iii) এক্ষণে, $x=\frac{7}{13}y$ সমীকরণে y-এর মান $\frac{26}{35}$ বসাইয়া পাই $x=\frac{7}{13}\times y=\frac{7}{13}\times\frac{26}{35}=\frac{2}{5}$. অতএব x-এর নির্ণেয় মান $=\frac{2}{5}$.

উদা. 2. দোলকের (pendulum-এর) দোলনের সময়টি উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে থাকে। যদি 40 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের কোন দোলক দুই সেকেণ্ডে একবার দোলে, তবে যে দোলক 2·5 সেকেণ্ডে একবার দোলে তাহার দৈর্ঘ্য কত ?

মনে কর $t=$ একবার দোলনের সময় এবং $l=$ দোলকের দৈর্ঘ্য। অতএব প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $t\propto\sqrt{l}$.

$\therefore$ $t=k\sqrt{l}$ (k ভেদ ধ্রুবক)।

$\because$ $t=2$ হইলে $l=40$ হয়, $\therefore$ $2=k\sqrt{40}$, বা, $k=\dfrac{2}{\sqrt{40}}$

অতএব, $t=\dfrac{2}{\sqrt{40}}\times\sqrt{l}$. এই সমীকরণে $t=2·5$ বসাইয়া পাই

$2·5=\dfrac{2\sqrt{l}}{\sqrt{40}}$, বা, $\dfrac{4l}{40}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{5}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় $l=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times 10$ ইঞ্চি $=62·5$ ইঞ্চি।

§ 1·5. **অন্যোন্যক (Reciprocal):** তোমরা জান কোন সংখ্যার অন্যোন্যক বলিলে (1 ÷ সেই সংখ্যা) বুঝায়। অতএব, $\frac{2}{3}$-এর অন্যোন্যক $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$-এর অন্যোন্যক 5, 4-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{4}$, x-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{x}$ ইত্যাদি।

ব্যস্ত-ভেদ (Inverse Variation): যদি একটি রাশির মানের পরিবর্তন অন্য একটি রাশির অন্যোন্যকের মানের পরিবর্তনের সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশি দ্বিতীয় রাশির সহিত **ব্যস্ত-ভেদে** বা **বিপরীত ভেদে** আছে বলা হয়।

যদি a ও b ব্যস্ত ভেদে থাকে (অর্থাৎ a varies inversely as b), তবে লেখা হইবে $a \propto \frac{1}{b}$ (কারণ, b-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{b}$)।

অতএব, এখানে $a = k.\frac{1}{b}$ (k একটি ধ্রুবক), বা, $ab = k$.

আবার, $ab = k$, হইলে $a = k\frac{1}{b}$; অতএব বিপরীতক্রমে বলা যায় a, b-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে (a varies inversely as b),

a ও b-এর মধ্যে ব্যস্ত ভেদ থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, a-র মান বাড়িলে b-র মান কমিবে এবং b-র মান বাড়িলে a-র মান কমিবে (একই অনুপাতে)।

দৃষ্টান্ত : (1) কোন একটি বেগে কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে যে সময় লাগে, তাহার **দ্বিগুণ** বেগে গেলে **অর্ধেক** সময় লাগিবে, তাহার **এক-তৃতীয়াংশ** বেগে গেলে **তিনগুণ** সময় লাগিবে। অর্থাৎ বেগকে যত দিয়া গুণ করিবে, সময়কে তত দিয়া ভাগ করিতে হইবে। অতএব বেগ ও সময় এখানে ব্যস্ত ভেদে আছে।

(2) একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বিভিন্ন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলি প্রস্থগুলির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

(3) কোন কাজ সম্পন্ন করিবার জন্য কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক লোকের যত দিন সময় লাগে, তাহার দ্বিগুণ লোক কাজ করিলে তাহার অর্ধেক দিন সময় লাগিবে।

দ্রষ্টব্য : (1) যদি a, b-র সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে a, $\frac{1}{b}$-র সহিত সরল ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

(2) দুইটি রাশি পরস্পর ব্যস্ত ভেদে থাকিলে তাহাদের গুণফল ধ্রুবক হইবে। বিপরীতক্রমে, দুইটি চল রাশির গুণফল ধ্রুবক হইলে, রাশি দুইটি ব্যস্ত ভেদে আছে বলিতে হইবে।

(3) x, y-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, x, $\frac{1}{y}$-এর সহিত সরল ভেদে থাকে। যদি x ও $\frac{1}{y}$-এর অনুরূপ মানগুলিকে স্থানাঙ্ক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করিলে, উহারা মূলবিন্দুগামী সরলরেখায় অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি কোন চলরাশির মানগুলিকে ভুজ এবং অন্য কোন চলরাশির অন্যোন্যকের অনুরূপ মানগুলিকে কোটি ধরিয়া অঙ্কিত লেখটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয়, তবে বলা যাইবে যে ঐ চলরাশিদ্বয় ব্যস্ত ভেদে আছে।

আবার দেখ, $x = \frac{k}{y}$ সমীকরণ হইতে পাই $xy = k$ (ধ্রুবক) এবং ইহার লেখ একটি **সম-পরাবৃত্ত** (rectangular hyperbola)। অতএব, ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত রাশিদ্বয়ের অনুরূপ মানগুলিকে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে বিন্দুগুলি একটি সম-পরাবৃত্তে অবস্থিত।

উদা. 1. যদি $x \propto y$ এবং $a \propto \frac{1}{b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $xa \propto \frac{y}{b}$

$\because$ $x \propto y$, $\therefore$ $x = my$ (m একটি ভেদ ধ্রুবক),

আবার, $\because$ $a \propto \frac{1}{b}$, $\therefore$ $a = n.\frac{1}{b}$ (n একটি ভেদ ধ্রুবক)।

এক্ষণে, $xa = my \times \frac{n}{b} = mn\frac{y}{b}$. অতএব $\because$ mn একটি ধ্রুবক, $\therefore$ $xa \propto \frac{y}{b}$.

[বি. দ্রষ্টব্য : এখানে $\left(x \propto y \text{ এবং } a \propto \frac{1}{b}\right)$ এই দুই ক্ষেত্রে দুইটি পৃথক্ পৃথক্ ধ্রুবক m ও n ব্যবহার করিবে।]

উদা. 2. A দুইটি রাশির সমষ্টির সমান এবং B-র সহিত উহাদের একটি রাশি সরলভেদে ও অন্যটি ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি B = 1 হইলে A = 7 এবং B = 3 হইলে A = $10\frac{1}{3}$ হয়, তবে A ও B-এর মধ্যে সম্বন্ধ এবং B = 2 হইলে A-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে A যে দুইটি রাশির সমষ্টি তাহাদের একটি B-র সহিত সরল ভেদে এবং অন্যটি ব্যস্ত ভেদে থাকায় প্রথমটি $= m\text{B}$ এবং দ্বিতীয়টি $= \frac{n}{\text{B}}$ হইবে (m ও n দুইটি ধ্রুবক)।

অতএব, $\text{A} = m\text{B} + \frac{n}{\text{B}}$.

$\because$ B = 1 হইলে A = 7 হয়, $\therefore$ $7 = m.1 + n = m + n \cdots\cdots(1)$

আবার, $\therefore$ B = 3 হইলে A = $10\frac{1}{3}$ হয়,

$\therefore$ $10\frac{1}{3} = 3m + \frac{n}{3}$, বা, $31 = 9m + n \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই, $m = 3$ এবং $n = 4$.

অতএব, A ও B-র মধ্যে নির্ণেয় সম্বন্ধ হইল $\text{A} = 3\text{B} + \frac{4}{\text{B}}$.

এই সমীকরণে B-র মান 2 বসাইয়া পাই $\text{A} = 6 + \frac{4}{2} = 8$.

§ 1·6. **যৌগিক ভেদ (Joint variation)।** কখন কখন দেখা যায় যে, একটি চলরাশির মান অন্য একাধিক স্বাধীনভাবে পরিবর্তনশীল চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে। যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশি গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকে, তবে বলা হয় যে প্রথম চলরাশিটি অপর চলরাশিগুলির সহিত **যৌগিক ভেদে** অবস্থিত। যথা, যদি দেওয়া থাকে

যে, A∝BC, তবে বলা হইবে যে, B ও C-এর সহিত A-র যৌগিক ভেদ আছে। এখানে $A = k.BC$ (k একটি ধ্রুবক)।

দৃষ্টান্ত : (1) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}b \times h$ (এখানে $\frac{1}{2}$ একটি ধ্রুবক এবং b ত্রিভুজের ভূমি এবং h উচ্চতা।)

অতএব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

(2) কার্যের পরিমাণ ঐ কার্যে নিযুক্ত লোকসংখ্যা এবং তাহারা যতদিন কাজ করে সেই দিনসংখ্যার সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) যদি a, b, c, d……প্রভৃতির সহিত x যৌগিক ভেদে থাকে, তবে $x = k \times abcd\cdots$হইবে (এখানে k একটি ধ্রুবক)। বিপরীতক্রমে, যদি $x = k \times abcd\cdots$হয় (k ধ্রুবক হইলে), তবে $a, b, c, d\cdots$এর সহিত x-এর যৌগিক ভেদ আছে বলা হইবে।

(2) যদি একটি রাশি দ্বিতীয় একটি রাশির সহিত ও তৃতীয় একটি রাশির অন্যোন্যকের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে, তবে বুঝিতে হইবে যে, প্রথম রাশিটি দ্বিতীয় রাশির সহিত সরল ভেদে ও তৃতীয়টির সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। যথা, x রাশিটি y-র সহিত সরল ভেদে ও z-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিবে যদি $x \propto \frac{y}{z}$ অর্থাৎ যদি $x = m\frac{y}{z}$ (m একটি ধ্রুবক) হয়।]

দৃষ্টান্ত : ত্রিভুজের উচ্চতা উহার ক্ষেত্রফলের সহিত সরল ভেদে এবং ভূমির সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

উদাহরণ। যদি A যুক্তভাবে B ও C-র ভেদে থাকে, এবং যদি $A = 2$, যখন $B = \frac{3}{5}$, $C = \frac{10}{27}$ হয়, তবে যখন $A = 54$ এবং $B = 3$ তখন $C =$ কত ?

[C. U. '20]

এখানে ∵ $A \propto BC$, ∴ $A = kBC$ (k ভেদ-ধ্রুবক)…(1)

সমীকরণ (1)-এ $A = 2$, $B = \frac{3}{5}$ ও $C = \frac{10}{27}$ বসাইয়া পাই

$2 = k \times \frac{3}{5} \times \frac{10}{27} = \frac{2}{9}k$, ∴ $k = 9$. অতএব $A = 9BC$…(2)

এক্ষণে, (2)-এ $A = 54$ ও $B = 3$ বসাইয়া পাই

$54 = 9 \times 3 \times C$, ∴ $C = \frac{54}{27} = 2$.

§ 1·7. যৌগিক ভেদের উপপাদ্য—

z-এর মান অপরিবর্তিত রাখিলে যদি y-এর সহিত x সরলভেদে থাকে, এবং y-এর মান অপরিবর্তিত রাখিলে যদি z-এর সহিত x সরলভেদে থাকে, তবে y ও z দুইটিরই মান পরিবর্তিত হইলে yz-এর সহিত x সরলভেদে থাকিবে।

প্রমাণ : x-এর মান আংশিকভাবে y এর মান এবং আংশিকভাবে z-এর

মানের উপর নির্ভরশীল। মনে করা যাক প্রথমে x, y, z-এর মান যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 ছিল; পরে পরিবর্তিত হইয়া যথাক্রমে a_2, b_2, c_2 হইল।

প্রথমে মনে করা যাক z-এর মান অপরিবর্তিত আছে, এবং y পরিবর্তিত হইয়া b_2 হইল। ইহার ফলে x-এর মান আংশিকভাবে বদলাইবে, অর্থাৎ একেবারে a_2 হইবে না। মনে করা যাক x-এর মান a' হইল। $\therefore$ প্রথমে $x=a_1, y=b_1, z=c_1$ ছিল, পরে $x=a', y=b_2, z=c_1$ হইল। এখন উপপাদ্যের শর্তানুসারে $x \propto y$, যখন z অপরিবর্তিত থাকে। এখানে z-এর মান পরিবর্তিত হয় নাই।

সুতরাং, $\dfrac{a_1}{a'}=\dfrac{b_1}{b_2}$ ......(1) হইল।

এইবার মনে করা যাক z-এর মান c_2 হইল এবং y-এর মান b_2-তে অপরিবর্তিত রহিল। ইহার ফলে x-এর মান সম্পূর্ণরূপে পরিবর্তিত হইয়া a_2 হইবে। $\therefore$ এইক্ষেত্রে প্রথমে ছিল $x=a', y=b_2, z=c_1$, পরে হইল $x=a_2, y=b_2, z=c_2$। যেহেতু y-এর মান b_2-তে অপরিবর্তিত আছে, এবং উপপাদ্যের শর্তানুসারে, $x \propto z$ যখন y-এর মান অপরিবর্তিত থাকে,

$\therefore \dfrac{a'}{a_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$...(2)।

এক্ষণে (1) এবং (2) গুণ করিয়া পাই,

$$\frac{a_1}{a'}\times\frac{a'}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\times\frac{c_1}{c_2} \quad \text{বা,} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1c_1}{b_2c_2}$$

$\therefore$ দেখিতেছ x-এর যে কোন দুইটি মান a_1 এবং a_2, yz-এর অনুরূপ মান $b_1.c_1$ ও $b_2.c_2$-এর সহিত সমানুপাতিক।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $x \propto yz$.।

দ্রষ্টব্য : চলের সংখ্যা আরও বেশী হইলেও এই উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে। যদি A, B, C, D,......প্রভৃতি কতিপয় রাশি এরূপ হয় যে অপর একটি রাশি x উহাদের প্রত্যেকটির সহিত সরলভেদ থাকিবে যখন অন্যগুলির মান অপরিবর্তিত থাকে, তবে যখন উহাদের সবগুলিরই মান পরিবর্তিত হইবে তখন উহাদের সবগুলির গুণফলের সহিত x সরলভেদে থাকিবে।

দৃষ্টান্ত : ত্রিভুজের উচ্চতা অপরিবর্তিত থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল উহার ভূমির সহিত সরল ভেদে থাকে এবং ভূমির দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকিলে ক্ষেত্রফল উচ্চতার সহিত সরল ভেদে থাকে। অতএব, উচ্চতা ও ভূমি উভয়ই পরিবর্তিত হইলে ক্ষেত্রফল উচ্চতা ও ভূমির সহিত যৌগিক ভেদে থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $A \propto B$ যখন C অপরিবর্তিত থাকে এবং $A \propto \frac{1}{C}$ যখন B অপরিবর্তিত থাকে, তবে $A \propto \frac{B}{C}$ যখন B ও C উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

উদা. যদি 20 একর জমি চষিতে 6 জন লোকের 10 দিন লাগে, তবে 25 একর চষিতে 15 জন লোকের কতদিন লাগিবে, ভেদ প্রণালীতে নির্ণয় কর।

মনে কর. লোকসংখ্যা $= n$, দিনসংখ্যা $= d$ এবং একর সংখ্যা $=$ A. এখানে দেখা যাইতেছে যে, দিনসংখ্যা অপরিবর্তিত থাকিলে লোকসংখ্যা একর সংখ্যার সহিত সরল ভেদে থাকিবে এবং একর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকিলে দিনসংখ্যার সহিত n ব্যস্ত ভেদে থাকিবে।

অতএব, $n \propto A$ যখন d অপরিবর্তিত থাকে, এবং $n \propto \frac{1}{d}$ যখন A অপরিবর্তিত থাকে।

$\therefore \; n \propto \frac{A}{d}$ যখন A ও d উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

$\therefore \; n = k \cdot \frac{A}{d}$ (k ভেদ-ধ্রুবক)$\cdots(1)$

$\because$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $d = 10$ এবং $A = 20$ হইলে $n = 6$ হয়,

$\therefore \; 6 = k \cdot \frac{20}{10} = 2k, \quad \therefore \; k = 3.$

এক্ষণে, (1)-এ $A = 25$ এবং $n = 15$ বসাইয়া পাই,

$15 = k \cdot \frac{A}{d} = 3 \times \frac{25}{d}$, বা, $15d = 75, \quad \therefore \; d = 5.$

অতএব, নির্ণেয় সময় $= 5$ দিন।

§ 1·8. ভেদের কতিপয় বিশেষ ধর্ম—

1. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $B \propto A$.

প্রমাণ : $\because \; A \propto B, \quad \therefore \; A = k.B$ (k ভেদ-ধ্রুবক)

$\therefore \; B = \frac{1}{k} \cdot A, \quad \therefore \; B \propto A$ (কারণ, $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক)

2. যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $A^m \propto B^m$.

প্রমাণ : $\because \; A \propto B, \quad \therefore \; A = k.B$ (k ভেদ-ধ্রুবক)

$\therefore \; (A)^m = (kB)^m$, বা, $A^m = k^m B^m$,

$\therefore \; A^m \propto B^m$ (কারণ, k^m ধ্রুবক)।

3. যদি $A \propto B$ এবং $B \propto C$, তাহা হইলে $A \propto C$. [C.U. '21]

প্রমাণ : $\because \; A \propto B, \quad \therefore \; A = k.B$ (k ভেদ-ধ্রুবক),

এবং $\because \; B \propto C, \quad \therefore \; B = m.C$ (m ভেদ-ধ্রুবক),

$\therefore \; A = kB = k.mC = kmC$

$\therefore \; A \propto C$ (কারণ, km এখানে ধ্রুবক)।

4. যদি $A \propto BC$, তাহা হইলে $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$.

প্রমাণ : $\because$ $A \propto BC$, $\therefore$ $A = kBC$ (k একটি ধ্রুবক)।

অতএব, $B = \frac{1}{k}\frac{A}{C}$. $\therefore$ $B \propto \frac{A}{C}$ (কারণ, এখানে $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক)।

অনুরূপে, $C = \frac{1}{k}.\frac{A}{B}$. $\therefore$ $C \propto \frac{A}{B}$ (কারণ, $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক)।

5. $A \propto B$, তাহা হইলে $AC \propto BC$ (যেখানে C কোন ধ্রুবক বা চল রাশি)।

প্রমাণ : $\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = kB$ (k ভেদ-ধ্রুবক)।

$\therefore$ $AC = kBC$, $\therefore$ $AC \propto BC$ (কারণ, k ধ্রুবক)।

6. যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$, তাহা হইলে $(A \pm B) \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

প্রমাণ : $\because$ $A \propto C$, $\therefore$ $A = m.C$ (m ভেদ-ধ্রুবক)...(1)

এবং $\because$ $B \propto C$, $\therefore$ $B = n.C$ (n ভেদ-ধ্রুবক)...(2)

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিয়া পাই

$$A \pm B = (m \pm n)C,$$

$\therefore$ $(A \pm B) \propto C$ (কারণ, m ও n ধ্রুবক বলিয়া $m+n$ ও $m-n$ ধ্রুবক)

আবার, $AB = mC \times nC = mn\, C^2$.

$\therefore$ $AB \propto C^2$ (কারণ, mn একটি ধ্রুবক)।

7. যদি $A \propto B$ এবং $C \propto D$ তাহা হইলে $AC \propto BD$, এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

[C.U. '23]

প্রমাণ : $\because$ $A \propto B$. $\therefore$ $A = mB$ (m ভেদ-ধ্রুবক)... (1)

এবং $\because$ $C \propto D$, $\therefore$ $C = nD$ (n ভেদ-ধ্রুবক)···(2)

$\therefore$ (1)×(2) করিয়া পাই $AC = mnBD$.

$\therefore$ $AC \propto BD$ (কারণ, এখানে mn একটি ধ্রুবক)।

আবার (1)÷(2) করিয়া পাই $\frac{A}{C} = \frac{m}{n}.\frac{B}{D}$,

$\therefore$ $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$ (কারণ, $\frac{m}{n}$ একটি ধ্রুবক)।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. যদি B ও C উভয়ের সহিত A সরলভেদে থাকে, তবে দেখাও যে, $(B - C)$-এর সহিত A সরলভেদে আছে। [C.U. '25]

$\because$ $A \propto B$, $\therefore$ $A = kB$ (k ভেদ-ধ্রুবক), $B = \frac{A}{k}$......(1)

আবার, $\because$ $A \propto C$, $\therefore$ $A = mC$ (m ভেদ-ধ্রুবক), $\therefore$ $C = \frac{A}{m}$...(2)

এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$B-C=\frac{A}{k}-\frac{A}{m}=A\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right)=A\left(\frac{m-k}{km}\right),$$

$$\therefore\quad A=\frac{km}{m-k}(B-C).$$

অতএব, $A\propto(B-C)$ (কারণ, এখানে $\frac{km}{m-k}$ একটি ধ্রুবক)।

উদা. 2. যদি $\frac{a}{b}\propto(a+b)$ এবং $\frac{b}{a}\propto(a-b)$ তবে দেখাও যে, a^2-b^2 ধ্রুবক।

$\because\ \frac{a}{b}\propto(a+b),\quad\therefore\ \frac{a}{b}=k(a+b)$, এখানে k ভেদ-ধ্রুবক ;

আবার, $\because\ \frac{b}{a}\propto(a-b).\ \therefore\ \frac{b}{a}=m(a-b)$, এখানে m একটি ধ্রুবক ;

অতএব, $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=km(a+b)(a-b)$

বা, $1=km(a^2-b^2),\quad\therefore\ a^2-b^2=\frac{1}{km}=$ ধ্রুবক।

উদা. 3. নিম্নের উক্তিগুলি পূরণ কর :—

(i) যদি $x\propto a^2$, তবে $a\propto\cdots\cdots$

(ii) যদি $x\propto\frac{1}{\sqrt{a}}$, তবে $a\propto\cdots\cdots$

(i) $\because\ x\propto a^2,\ x=ka^2$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)

$\therefore\ a^2=\frac{x}{k},\quad\therefore\ a=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}.$

$\because\ \sqrt{k}$ একটি ধ্রুবক, $\therefore\ a\propto\sqrt{x}.$

$\therefore$ যদি $x\propto a^2$ হয়, তবে $a\propto\sqrt{x}$ হইবে।

(ii) $\because\ x\propto\frac{1}{\sqrt{a}},\quad x=k\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)।

বা, $x^2=\frac{k^2}{a},\quad\therefore\ a=\frac{k^2}{x^2}=k^2\cdot\frac{1}{x^2}$

$\because\ k^2$ একটি ধ্রুবক, $\therefore\ a\propto\frac{1}{x^2}.$

$\therefore$ যদি $x\propto\frac{1}{\sqrt{a}}$ হয়, তবে $a\propto\frac{1}{x^2}$ হইবে।

উদা. 4 যদি $A \propto B^2$ এবং $A=4$ হইলে $B=4$ হয়, তবে $A=3$ হইলে B-এর এবং $B=9$ হইলে A-এর মান কত হইবে? A দ্বারা B-কে প্রকাশ কর।

$\because A \propto B^2$. $\therefore A = kB^2$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)।

প্রদত্ত শর্ত হইতে A ও B-এর মান বসাইয়া পাই $4 = k.(4)^2$,

$\therefore k = \frac{1}{4}$. $\therefore A = \frac{1}{4}B^2$.

এক্ষণে, $A=3$ হইলে, $3 = \frac{1}{4}B^2$, বা, $B^2 = 12$. $\therefore B = \pm 2\sqrt{3}$.

আবার, $B=9$ বসাইয়া পাই $A = \frac{1}{4} \times 9^2 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$.

আবার, $\because kB^2 = A$, $\therefore \frac{1}{4}B^2 = A$, বা, $B^2 = 4A$,

$\therefore B = \pm\sqrt{4A} = \pm 2\sqrt{A}$.

উদা. 5. যদি $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$, তবে দেখাও যে $A \propto B$. [C.U. '23]

$\because A^2+B^2 \propto A^2-B^2$,

$\therefore A^2+B^2 = k(A^2-B^2)$ [এখানে k ভেদ-ধ্রুবক],

$\therefore \frac{A^2+B^2}{A^2-B^2} = \frac{k}{1}$. এক্ষণে, যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{A^2+B^2+A^2-B^2}{A^2+B^2-A^2+B^2} = \frac{k+1}{k-1}, \text{ বা, } \frac{2A^2}{2B^2} = \frac{k+1}{k-1}$$

বা, $\frac{A^2}{B^2} = \frac{k+1}{k-1}$, বা, $A^2 = \frac{k+1}{k-1} \cdot B^2$,

বা, $A = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\, B$, $\therefore A \propto B$ $\left(\because \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \text{ ধ্রুবক}\right)$

উদা. 6. প্রদত্ত আছে যে, $z+\frac{1}{z}$-এর সহিত $x+y$-এর এবং $z-\frac{1}{z}$-এর সহিত $x-y$-এর সরল ভেদ আছে। যদি $x=3$ ও $y=1$ হইলে $z=2$ হয়, তবে x ও y-এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

$\because x+y \propto z+\frac{1}{z}$,

$\therefore x+y = k\left(z+\frac{1}{z}\right)$, এখানে k ভেদ-ধ্রুবক...(1)

আবার, $\because (x-y) \propto \left(z-\frac{1}{z}\right)$,

$\therefore x-y = m\left(z-\frac{1}{z}\right)$, এখানে m ভেদ-ধ্রুবক...(2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2x = k\left(z+\frac{1}{z}\right) + m\left(z-\frac{1}{z}\right)$...(3)

এক্ষণে, $\because$ $x=3$ এবং $y=1$ হইলে $z=2$ হয়,

$\therefore$ (1) হইতে পাই $3+1=k(2+\frac{1}{2})$, বা, $\frac{5}{2}k=4$, $\therefore k=\frac{8}{5}$.

আবার (2) হইতে পাই $3-1=m(2-\frac{1}{2})$, বা, $\frac{3}{2}m=2$, $\therefore$ $m=\frac{4}{3}$.

অতএব, (3) হইতে পাই $2x=\frac{8}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{z}\right)$,

বা, $2x=(\frac{8}{5}+\frac{4}{3})z+(\frac{8}{5}-\frac{4}{3})\frac{1}{z}=\frac{44}{15}z+\frac{4}{15z}$, বা, $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$,

বা, $15x=22z+\frac{2}{z}$. ইহাই x ও z-এর নির্ণেয় সম্পর্ক।

উদা. 7. যদি $a \propto b^2$ ও $1+b \propto \sqrt{c}$ এবং যদি $a=1$ হইলে $c=9$ ও $b=5$ হয়, তবে c-এর দ্বারা a-এর মান নির্ণয় কর।

$\because$ $a \propto b^2$, $\therefore$ $a=mb^2$ (এখানে m ভেদ-ধ্রুবক) ...(1)

আবার, $\because$ $1+b \propto \sqrt{c}$, $\therefore$ $1+b=n\sqrt{c}$ (এখানে n ভেদ-ধ্রুবক)···(2)

(1)-এ a ও b-এর মান বসাইয়া পাই $1=m(5)^2$, $\therefore$ $m=\frac{1}{25}$.

(2)-এ b ও c-এর মান বসাইয়া পাই $1+5=n\sqrt{9}=3n$, $\therefore$ $n=2$

এক্ষণে (2) হইতে পাই $1+b=2\sqrt{c}$ ($\because$ $n=2$),

বা, $b=2\sqrt{c}-1$; $\therefore$ $b^2=4c-4\sqrt{c}+1$.

অতএব, (1) হইতে $a=mb^2$, বা, $a=\frac{b^2}{25}$ ($\because$ $m=\frac{1}{25}$)

$$\therefore \quad a=\frac{4c-4\sqrt{c}+1}{25}.$$

উদা 8. x-এর যদি y-এর বর্গের সহিত সরলভেদ ও z-এর ঘনমূলের সহিত ব্যস্ত ভেদ থাকে এবং যদি $y=4$ ও $z=8$ হইলে $x=2$ হয়, তবে $x=3$ ও $z=27$ হইলে y কত হইবে? [C·U '17]

$$\because \quad x \propto y^2 \text{ এবং } x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}},$$

$\therefore$ $x \propto y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, $\therefore$ $x=k\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক।)

এক্ষণে, $x=2$, $y=4$, ও $z=8$ বসাইয়া পাই

$2=k.\frac{4^2}{\sqrt[3]{8}}=k.\frac{16}{2}=8k$, $\therefore$ $k=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ $x=\frac{1}{4}\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$, ইহাতে $x=3$ ও $z=27$ বসাইয়া পাই

$$3=\frac{1}{4}\times\frac{y^2}{\sqrt[3]{27}}=\frac{y^2}{4 \cdot 3}, \text{ বা, } y^2=36, \therefore y=\pm 6.$$

উদা. 9. যদি $b \propto a^3$, তবে a-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে b-এর মান কি অনুপাতে বাড়িবে ?

a-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে a^3-এর মান $(\frac{3}{2})^3$ বা $\frac{27}{8}$ বা 27 : 8 অনুপাতে বাড়ে।

এক্ষণে, $\because$ $b \propto a^3$, $\therefore$ a-এর মান 3 : 2 অনুপাতে বাড়িলে b-এর মান 27 : 8 অনুপাতে বাড়িবে।

উদা. 10. x যদি y-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $x+y$-এর মান লঘিষ্ঠ হইবে যখন $x=y$.

$\because$ $x \propto \frac{1}{y}$, $\therefore$ $x=k.\frac{1}{y}$, বা, $xy=k$(এখানে k একটি ধ্রুবক।)

এক্ষণে, $x+y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{k}$.

এখানে $2\sqrt{k}$ ধ্রুবক বলিয়া ইহার মান অপরিবর্তিত থাকিবে, এবং $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ধনাত্মক বলিয়া ইহার মান শূন্য হইলে $(x+y)$-এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

অতএব যদি $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ হয়, অর্থাৎ যদি $x=y$ হয়, তবে $x+y$-এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

উদা. 11. যদি $x+y \propto x-y$, তবে প্রমাণ কর যে (i) $x^2+y^2 \propto xy$ এবং (ii) $ax+by \propto px+qy$, যেখানে a, b, p, q ধ্রুবক।

[C.U. '36 ; P.U. '47]

(i) $x+y \propto x-y$, $\therefore$ $x+y=k(x-y)$, এখানে k ভেদ-ধ্রুবক ;

$\therefore$ $(x+y)^2=k^2(x-y)^2$ [বর্গ করিয়া]

বা, $x^2+y^2+2xy=k^2(x^2+y^2)-2k^2xy$,

বা, $2xy+2k^2xy=k^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2(k^2+1)xy=(k^2-1)(x^2+y^2)$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}xy.$$

অতএব, $x^2+y^2 \propto xy$ $\left(\text{কারণ, এখানে} \frac{2(k^2+1)}{k^2-1} \text{ধ্রুবক} \right)$।

(ii) $\because$ $x+y \propto x-y$, $\therefore$ $x+y=k(x-y)$, (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)।

$\therefore$ $\frac{x+y}{x-y}=k$, $\therefore$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$\frac{x}{y}=\frac{k+1}{k-1}=m$ (মনে কর), $\therefore$ $x=my$

এক্ষণে, $\dfrac{ax+by}{px+qy}=\dfrac{amy+by}{pmy+qy}=\dfrac{y(am+b)}{y(pm+q)}=\dfrac{am+b}{pm+q}$;

$\because$ a, b, p, q ধ্রুবক এবং k ধ্রুবক হওয়ায় m ধ্রুবক, $\therefore$ $\dfrac{am+b}{pm+q}$ ধ্রুবক।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, $ax+by \propto px+qy$.

উদা. 12. যদি $x+y \propto z$ যখন y অপরিবর্তিত থাকে এবং $z+x \propto y$ যখন z অপরিবর্তিত থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $x+y+z \propto yz$ যখন y ও z উভয়েই পরিবর্তিত হয়। [G.U. '49]

$\therefore$ $x+y \propto z$ (y অপরিবর্তিত থাকিলে),

$\therefore$ $x+y=kz$ (k ভেদ-ধ্রুবক)

$\therefore$ $x+y+z=kz+z=(k+1)z$;

অতএব y অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto z$ (কারণ, $k+1$ ধ্রুবক)।

আবার, $\because$ $x+z \propto y$ (যখন z অপরিবর্তিত থাকে),

$\therefore$ $x+z=my$ (এখানে m ভেদ-ধ্রুবক)

$\therefore$ $x+z+y=my+y=(m+1)y$.

অতএব, z অপরিবর্তিত থাকিলে $x+y+z \propto y$ (কারণ, $m+1$ ধ্রুবক)।

$\therefore$ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য হইতে প্রমাণিত হইল যে y ও z উভয়ই পরিবর্তিত হইলে $x+y+z \propto yz$.

উদা. 13. যদি x, y, z চলরাশি হয়, কিন্তু $y+z-x$ ধ্রুবক হয়, এবং যদি $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$, তবে প্রমাণ কর যে $x+y+z \propto yz$.

মনে কর, $y+z-x=k$ (ধ্রুবক)।

$\because$ $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$,

$\therefore$ $(x+y-z)(x+z-y)=myz$ (এখানে m ভেদ ধ্রুবক),

বা, $x^2-(y-z)^2=myz$,

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz=myz-4yz$,

বা, $x^2-(y+z)^2=(m-4)yz$,

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(m-4)yz$,

বা, $(x+y+z)\times(-k)=(m-4)yz$ [$\because$ $y+z-x=k$]

$\therefore$ $x+y+z=\dfrac{m-4}{-k}.yz=\dfrac{4-m}{k}.yz$;

অতএব, $x+y+z \propto yz$ (কারণ, $\dfrac{4-m}{k}$ ধ্রুবক)।

উদা. 14. r ও r' ব্যাসার্ধের দুইটি স্বর্ণ-গোলককে গলাইয়া একটি গোলকে পরিণত করা হইল। উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3.] [C.U. '31]

মনে কর, গোলক দুইটির আয়তন (volume) যথাক্রমে V ও v.

যেহেতু গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3 $\therefore$ $V+v=m(r^3+r'^3)$.

এখানে, তৃতীয় গোলকটির আয়তন $V+v$ এবং মনে কর উহার ব্যাসার্ধ R,

$\therefore \quad V+v=mR^3$ (m ভেদ ধ্রুবক)

অতএব, $mR^3=m(r^3+r'^3)$, $\quad \therefore \quad R^3=r^3+r'^3$,

$\therefore \quad R$ (নির্ণেয় ব্যাসার্ধ) $=\sqrt[3]{r^3+r'^3}$.

উদা. 15. দোলকের দোলনের সময় উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। যদি 8 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি দোলক 3·1 সেকেণ্ডে একবার দোলে, তবে 10 ফুট দৈর্ঘ্যের দোলকের ঐ সময় কত হইবে ?

মনে কর, t সেকেণ্ড একবার দোলনের সময় এবং l ফুট দোলকের দৈর্ঘ্য। অতএব, প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $t \propto \sqrt{l}$.

$\therefore \quad t=k\sqrt{l}$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)।

$\because \quad l=8$ ফুট হইলে $t=3·1$ সেকেণ্ড হয়,

$\therefore \quad 3·1=k.\sqrt{8}=k.2\sqrt{2}. \qquad \therefore \quad k=\dfrac{3·1}{2\sqrt{2}}.$

অতএব, $t=\dfrac{3·1}{2\sqrt{2}}\sqrt{l}$ হইল ; এই সমীকরণে $l=10$ বসাইলে পাই

$$t=\frac{3·1}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{10}=\frac{3·1\times\sqrt{20}}{4}=\frac{3·1\times2\sqrt{5}}{4}=3·5 \text{ (প্রায়)।}$$

অতএব, নির্ণেয় সময় = 3·5 সেকেণ্ড (প্রায়)।

উদা. 16. কোন বস্তুর ভর (mass) m উহার ঘনত্ব (density) d-এর সহিত সরলভেদে থাকে যখন উহার ঘনফল v অপরিবর্তিত থাকে এবং উহা v-এর সহিত সরলভেদে থাকে যখন d অপরিবর্তিত থাকে। যদি এক একক ঘনফল ও এক একক ঘনত্ববিশিষ্ট বস্তুপিণ্ডের ভরকে ভরের একক ধরা হয়, তবে দেখাও যে $m=vd$. [C. U. '29]

$\because \quad v$ অপরিবর্তিত থাকিলে $m \propto d$, এবং d অপরিবর্তিত থাকিলে $m \propto v$,

$\therefore \quad m \propto vd, \quad \therefore \quad m=kvd$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)···(1)

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $v=1$ ও $d=1$ হইলে $m=1$ হয়,

$\therefore \quad$ (1) হইতে $1=k\times1\times1=k$.

অতএব, (1) হইতে পাই $m=kvd=vd$ [$\because \quad k=1$]

উদা. 17. একখণ্ড হীরকের মূল্য দুই হাজার টাকা। হীরকটি ভাঙ্গিয়া সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করা হইল। যদি হীরকের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সহিত সমানুপাতিক হয়, তবে দুইভাগে ভাঙ্গিবার ফলে কত ক্ষতি হইল ?

মনে কর p = হীরকের মূল্য এবং w = হীরকের ওজন।

দেওয়া আছে $p \propto w^2$. $\quad \therefore \quad p=kw^2$, যেখানে k = ধ্রুবক।

মনে কর, a গ্রাম ওজনের হীরকের মূল্য 2000 টাকা।

$\therefore\ 2000 = ka^2 \cdots\cdots (1).$

এখন সমান দুইটি অংশের প্রত্যেকটির ওজন $\frac{a}{2}$ গ্রাম এবং

মূল্য $= k\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ka^2}{4} = \frac{2000}{4} = 500,$ [(1) হইতে ka^2 মান বসাইয়া]

$\therefore$ দুইটি অংশের মোট মূল্য $= 500 \times 2 = 1000$ টাকা।

অতএব ক্ষতির পরিমাণ $= (2000 - 1000)$ টাকা $= 1000$ টাকা।

উদা. 18. আলোকপ্রভার পরিমাণ আলোকের উৎস হইতে দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একখানি পুস্তক একটি বাতি হইতে 8 ইঞ্চি দূরে আছে, উহাকে আর কতটা সরাইলে আলোক-পরিমাণ অর্ধেক হইবে? [H. S. '64]

মনে কর, আলোক-প্রভা $= l$ এবং আলোক উৎস হইতে দূরত্ব $= d$ ইঞ্চি।

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $l \propto \frac{1}{d^2}$, $\therefore\ l = \frac{k}{d^2}$ (এখানে k ভেদ-ধ্রুবক)।

$\therefore$ যখন দূরত্ব 8 ইঞ্চি, তখন $l = \frac{k}{8^2} \cdots\cdots (1),$

মনে কর, বাতিটি হইতে মোট D ইঞ্চি দূরে থাকিলে আলোক-প্রভা $= \frac{1}{2}l$ হয়।

$\therefore\ \frac{1}{2}l = \frac{k}{D^2} \cdots (2).$ এখন (1) হইতে l-এর মান (2)-এ বসাইয়া

পাই, $\frac{k}{2.8^2} = \frac{k}{D^2}$, বা, $D^2 = 2.8^2$, $\therefore\ D = 8\sqrt{2}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ পুস্তকটি আর $(8\sqrt{2} - 8)$ ইঞ্চি বা $8(\sqrt{2} - 1)$ ইঞ্চি সরাইলে আলোক-পরিমাণ অর্ধেক হইবে।

উদা. 19. কোন মালগাড়ী (waggon) সংযুক্ত না থাকিলে একটি এঞ্জিন ঘণ্টায় 24 মাইল বেগে যাইতে পারে। উহার সহিত গাড়ী যুক্ত থাকিলে উহার গতিবেগের হ্রাসের পরিমাণ গাড়ী-সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। 4 খানি গাড়ী যুক্ত হইলে উহার গতি ঘণ্টায় 20 মাইল্ হয়। এঞ্জিনটি সর্বাধিক কয়টি গাড়ী লইয়া যাইতে পারে? [H. S. '69]

মনে কর, ঘণ্টা প্রতি গতি-হ্রাসের পরিমাণকে m মাইল দ্বারা এবং গাড়ীর সংখ্যাকে n দ্বারা সূচিত করা হইল।

$\because$ শর্তানুসারে $m \propto n^{\frac{1}{2}}$, $\therefore\ m = kn^{\frac{1}{2}} \ldots (1)$, এখানে k ভেদ-ধ্রুবক।

এখানে 4 খান গাড়ী থাকিলে এঞ্জিনের গতি ঘণ্টায় $(24 - 20)$ বা 4 মাইল হ্রাস পায়।

$\therefore$ (1) হইতে পাই $4 = k.4^{\frac{1}{2}}$, বা, $2k = 4$, $\therefore\ k = 2.$

এক্ষণে, (1)-এ $m=24$ এবং $k=2$ বসাইয়া পাই

$24=2n^{\frac{1}{2}}$, বা, $n^{\frac{1}{2}}=12$, $\therefore$ $n=144$.

অতএব, গাড়ীর সংখ্যা 144 হইলে ইঞ্জিনটি গতিহীন হইবে।

$\therefore$ গাড়ীর নির্ণেয় সর্বাধিক সংখ্যা $=143$.

উদা. 20. যদি কোন গ্যাসের ঘনফল V ঘনফুট ও প্রতি বর্গফুটে চাপ P পাউণ্ড হয়, তবে নিম্ন তালিকায় উহাদের মান দেওয়া হইল। P ও V ভেদে আছে কি? যদি থাকে তবে কিরূপ ভেদ আছে? [T. P. 1969-70]

P	400	600	800	1000	1500
V	15	10	$7\frac{1}{2}$	6	4

তালিকা হইতে দেখা যায় যে P বৃদ্ধি পাইতেছে এবং V হ্রাস পাইতেছে। P-এর বৃদ্ধির অনুপাত $\frac{600}{400}, \frac{800}{600}, \frac{1000}{800}, \frac{1500}{1000}$; অর্থাৎ, $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$,

আবার, V-এর হ্রাসের অনুপাত $\frac{10}{15}, \frac{7\frac{1}{2}}{10}, \frac{6}{7\frac{1}{2}}, \frac{4}{6}$, অর্থাৎ, $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে P-র বৃদ্ধির অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতে V-র হ্রাস হইতেছে।

$\therefore$ P ও V ভেদে আছে এবং ব্যস্তভেদে আছে অর্থাৎ $P \propto \frac{1}{V}$

প্রশ্নমালা 1

1. যদি $b \propto a^3$ এবং $a=5$ হইলে $b=50$ হয়, তবে $a=1$ হইলে b কত হইবে এবং $b=6\frac{1}{4}$ হইলে a কত হইবে? a দ্বারা b-এর মান প্রকাশ কর।

2. যদি $y \propto \frac{1}{x^2}$ এবং $x=10$ হইলে $y=9$ হয়, তবে $x=6$ হইলে y-এর এবং $y=4$ হইলে x-এর মান কত হইবে? x দ্বারা y-এর মান নির্ণয় কর।

3. যদি B ও C-এর সহিত A-এর যৌগিক ভেদ থাকে এবং যদি $B=\frac{3}{5}$ ও $C=\frac{10}{27}$ হইলে $A=2$ হয়, তবে $A=54$ ও $B=3$ হইলে C কত হইবে?

4. যদি $a^2+b^2 \propto ab$, তবে দেখাও যে $a+b \propto a-b$.

5. একটি নির্দিষ্ট ভারযুক্ত গাড়ীর গতির প্রতি বাধার (R) কতকটা ধ্রুবক এবং কতকটা গতিবেগের (v) বর্গের সহিত সরল ভেদে আছে। এই উক্তিকে প্রতীক চিহ্নদ্বারা প্রকাশ কর।

6. নিম্নের উক্তি দুইটি পূরণ কর :—

(i) যদি $a \propto b^3$, তবে $b \propto \cdots\cdots$, (ii) যদি $t \propto \sqrt{l}$, তবে $l \propto \cdots\cdots$

7. যদি $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হয়, তবে দেখাও যে $a^3 + b^3 + c^3 \propto 3abc$।

8. x-এর y-এর সহিত সরল ভেদ এবং z-এর সহিত ব্যস্ত ভেদ আছে। যদি $y = 5$ ও $z = 9$ হইলে $x = \frac{1}{6}$ হয়, তবে x, y ও z-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং $y = 6$ ও $z = \frac{1}{5}$ হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $x - y \propto z$ যখন y অপরিবর্তিত থাকে এবং $x - z \propto y$ যখন z অপরিবর্তিত থাকে, তবে দেখাও যে y ও z উভয়ই চল হইলে $x - y - z \propto yz$.

10. b দুইটি রাশির সমষ্টির সমান এবং a-এর সহিত উহাদের একটি রাশির সরলভেদ ও অন্যটির ব্যস্তভেদ আছে। যদি $a = 1$ হইলে $b = 5$ এবং $a = 6$ হইলে $b = 12{\cdot}5$ হয়, তবে a ও b-এর মধ্যে সম্পর্ক এবং $a = 3$ হইলে b-এর মান নির্ণয় কর।

11. দুইটি রাশির সমষ্টির সহিত A-এর সরলভেদ আছে এবং উহাদের একটি রাশির B^2-এর সহিত সরলভেদ এবং অন্যটির C-এর সহিত ব্যস্তভেদ আছে। যদি $B = 2$ ও $C = 1$ হইলে $A = 16$ হয় এবং $B = 1$ ও $C = 2$ হইলে $A = 5$ হয়, তবে $B^2 = 3$ ও $C^2 = 16$ হইলে A-র মান কত হয়?

12. যদি $x \propto \frac{1}{y^2}$, তবে y, $7 : 4$ অনুপাতে বৃদ্ধি পাইলে x-এর কি অনুপাতে হ্রাস অথবা বৃদ্ধি হইবে ?

13. বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে থাকে। ব্যাসার্ধ 2 ফুট 4 ইঞ্চি হইলে যদি বৃত্তের ক্ষেত্রফল $17\frac{1}{9}$ বর্গফুট হয়, তবে ব্যাসার্ধ 3 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

14. x-এর যদি y-এর সহিত সরলভেদ ও z-এর সহিত ব্যস্তভেদ থাকে এবং যদি $y = b$ ও $z = c$ হইলে $x = a$ হয়, তবে $y = b^2$ ও $z = c^2$ হইলে x-এর মান কি হইবে ? [C.U. 1877]

15. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চষিতে পারে, তবে 30 একর জমি চষিতে 25 জন লোকের কত দিন লাগিবে ভেদ প্রণালীতে নির্ণয় কর। [C.U. '34]

16. ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য উহা প্রতি মিনিটে যতবার শব্দ (টিক্ টিক্) করে তাহার বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একটি 16 ফুট দীর্ঘ দোলক যদি প্রতি মিনিটে 27টি শব্দ করে, তবে যে দোলক প্রতি মিনিটে 24টি শব্দ করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

17. $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$ এবং $z \propto \frac{b}{a}$ হইলে, x-এর সহিত a এবং b-এর কি সম্বন্ধ ?

18. যদি $x = ky$ ও $y = k'z$ ভেদে x, y, z-এর যথাক্রমে a, b, c ও a', b', c' দুই প্রস্থ মান হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'} = \frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2} \qquad \text{[C. U. '22]}$$

19. যদি স্থির অবস্থা হইতে কোন বস্তু t সেকেণ্ডে s ফুট পড়ে, তবে $s \propto t^2$. উহাকে 2 সেকেণ্ডে 64 ফুট পড়িতে দেখা যাইলে উহা 4 সেকেণ্ডে কতটা পড়িবে ?

20. কোন সমতলের উপর বায়ুর চাপ ঐ তলের ক্ষেত্রফল ও বায়ুর গতিবেগের বর্গের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে। যদি বায়ুবেগ ঘণ্টায় 16 মাইল হইলে এক বর্গফুটের উপর বায়ুচাপ এক পাউণ্ড হয়, তবে এক বর্গগজের উপর বায়ুচাপ $14\frac{1}{16}$ পাউণ্ড হইলে বায়ুর গতিবেগ নির্ণয় কর।

21. কোন তরল পদার্থে চাপ (p) উহার গভীরতার (d) সহিত সরলভেদে থাকে যখন উহার ঘনত্ব (D) অপরিবর্তিত থাকে এবং ঘনত্বের সহিত সরলভেদে থাকে যখন গভীরতা অপরিবর্তিত থাকে। যদি গভীরতা 32 ও ঘনত্ব 1 হইলে চাপ 1 হয়, তবে ঘনত্ব 16 হইলে কত গভীরতায় চাপ 2 হইবে ? [C. U. '21]

22. কোন বৈদ্যুতিক তারের প্রতিরোধশক্তি উহার দৈর্ঘ্যের সহিত সরলভেদে ও ব্যাসের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একই ধাতুনির্মিত দুইটি তারের মধ্যে একটির ব্যাস 1·5 মিলি মি. ও দৈর্ঘ্য 4 মিটার এবং অন্যটির ব্যাস 2 মিলি মি. ও দৈর্ঘ্য 5 মিটার। উহাদের প্রতিরোধশক্তির তুলনা কর।

23. (গোলকের ঘনফল) $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3 এবং (বক্রতলের ক্ষেত্রফল) $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^2 ; প্রমাণ কর যে ঘনফলের বর্গ বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ত্রিঘাতের সহিত সরলভেদে থাকে।

24. কোন ভোজের খরচ আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক নিমন্ত্রিতদের সংখ্যার সহিত সরলভেদে আছে। যদি 150 জন নিমন্ত্রিতের জন্য 275 টাকা এবং 240 জনের জন্য 320 টাকা খরচ হয়, তবে 250 জনের জন্য কত খরচ হইবে ?

25. f ফুট গভীর একটি কূপ খননের ব্যয় আংশিকভাবে f-এর সহিত ও আংশিকভাবে f^2-এর সহিত সরলভেদে আছে। এরূপ একটি 40 ফুট গভীর কূপের জন্য 130 টাকা ও 60 ফুট গভীর কূপের জন্য 255 টাকা ব্যয় হইলে, কত গভীর কূপের জন্য 420 টাকা ব্যয় হইবে ?

26. কোন একটি যন্ত্রে P পাউণ্ড বল (force) W পাউণ্ড ভার ধারণ করিতে পারে এবং P আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক W-র সমানুপাতী। যদি W=44 হইলে P=14 এবং W=92 হইলে P=26 হয়, তবে 40 পাউণ্ড ও 100 পাউণ্ডের মধ্যে যে কোন ভার ধারণক্ষম P-এর মান জ্ঞাপক একটি লেখ অঙ্কন কর। উহা হইতে (i) W=76 হইলে P-এর মান এবং (ii) F=20 হইলে W-র মান নির্ণয় কর।

27. একটি হোস্টেলের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ঐ হোস্টেলবাসী-লোকসংখ্যার সহিত সরলভেদে আছে। যদি লোকসংখ্যা 120 হইলে ব্যয় 2000 টাকা এবং লোকসংখ্যা 100 হইলে ব্যয় 1700 টাকা হয়, তবে 1880 টাকা ব্যয় হইলে লোকসংখ্যা কত ?

28. এক স্থান হইতে অপর একস্থানে যাইবার জন্য যে সময় লাগে, দূরত্বের সহিত তাহার সরলভেদ ও গতি-বেগের সহিত ব্যস্তভেদ। একটি ট্রেন যে দুই দূরত্ব গেল তাহাদের অনুপাত 5 : 8 এবং সময়ের অনুপাত 4 : 7 হইলে ট্রেন দুইটির গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

29. পিরামিডের ঘনফল উহার উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক-ভেদে আছে এবং যখন ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট ও উচ্চতা 14 ফুট, তখন ঘনফল হয় 280 ঘনফুট। যাহার ঘনফল 390 ঘনফুট ও উচ্চতা 26 ফুট, সেই পিরামিডের ক্ষেত্রফল কত ? [H. S. '63]

30. শঙ্কুর ঘনফল উহার উচ্চতা ও বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিকভেদে থাকে। যদি উচ্চতা 15 ফুট ও ভূমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গফুট হইলে ঘনফল হয় 50 ঘনফুট, তবে ঘনফল 770 ঘনফুট ও উচ্চতা 15 ফুট হইলে ভূমির ব্যাসার্ধ কত হইবে ? [H. S. '68]

31. কোন আলোক-উৎস হইতে আলোক পরিমাণ, মধ্যস্থ দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে আছে। কোন ল্যাম্প হইতে একটি পুস্তক 9 ডেসিমিটার দূরে আছে। উহাকে আর কতটা সরাইলে পূর্ব পরিমাণের $\frac{1}{3}$ অংশ আলো পাইবে ?

32. কোন মালগাড়ীর এঞ্জিনে গাড়ী যুক্ত না থাকিলে উহা ঘণ্টায় 35 কিলোমিটার বেগে যাইতে পারে এবং গাড়ী সংযুক্ত হইলে গাড়ীর সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরলভেদে উহার গতি হ্রাস পায়। যদি 9 খানি গাড়ী যুক্ত হইলে উহার গতি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার হয়, তবে এঞ্জিনটি সর্বাধিক কয়টি গাড়ী লইয়া যাইতে পারে ?

33. এঞ্জিনের কয়লা খরচ $\propto$ (গতিবেগ)^2 ; যখন এঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় 50 কি. মি. তখন ঘণ্টায় কয়লা খরচ 100 কি. গ্রাম। প্রতি কি. গ্রা.

কয়লার মূল্য 25 পয়সা হইলে এবং প্রতি ঘণ্টায় এঞ্জিন চালাইবার অন্যান্ত খরচ 4 টাকা হইলে, ঐ এঞ্জিনের 300 কি. মি. যাইতে ন্যূনপক্ষে কত ব্যয় হইবে ?

34. (i) 10 ক্যারেট ওজনের একটি হীরক খণ্ডের মূল্য 1200 টাকা। হীরকটি যদি 8 ক্যারেট এবং 2 ক্যারেট ওজনের দুইটি অংশে ভাঙ্গিয়া যায়, তবে ক্ষতির পরিমাণ কত, দেওয়া আছে হীরকের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সহিত সমানুপাতিক।

(ii) একটি হীরকখণ্ড 3টি অংশে বিভক্ত হইল, অংশগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 এবং ইহার ফলে 22,000 টাকা ক্ষতি হইল। যদি হীরকের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সহিত সমানুপাতিক হয়, তবে অখণ্ড পাথরটির মূল্য নির্ণয় কর।

35. তিনটি সমওজনের হীরকখচিত স্বর্ণাঙ্গুরীর মূল্য a, b, c টাকা এবং অঙ্গুরী তিনটির হীরকের ওজন যথাক্রমে 3, 4, 5 ক্যারেট। যদি হীরকের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সহিত সমানুপাতিক হয়, তবে দেখাও এক ক্যারেট হীরার মূল্য $\frac{1}{2}(a+c-2b)$ টাকা এবং এক গ্রাম স্বর্ণের মূল্য $\frac{1}{2}(9a+7c-16b)$ টাকা ; দেওয়া আছে প্রত্যেকটি অঙ্গুরী তৈরীর মজুরী সমান।

দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রগতি (Progression)

§ 2·1. **প্রগতি।** যদি পর পর কতকগুলি রাশি বা পদ এরূপ হয় যে উহাদের যে কোনও একটিকে উহার পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই রাশিসমূহ একটি **প্রগতি**-তে (Progression) আছে বলা হয়। যথা, (i) 3, 5, 7, 9 প্রভৃতি রাশি, অথবা (ii) 3, 6, 12, 24 প্রভৃতি রাশি এক একটি প্রগতি গঠন করিয়াছে। কারণ (i)-এর রাশিসমূহে যে-কোন রাশি ঠিক পূর্ববর্তী রাশির সহিত 2 যোগ করিয়া পাওয়া যায় এবং (ii)-তে যে-কোন পদ ঠিক পূর্ববর্তী পদকে 2 দিয়া গুণ করিয়া পাওয়া যায়।

সমান্তর প্রগতি (Arithmetical Progression)

§ 2·2. **সমান্তর প্রগতি।** যদি কোন প্রগতির অন্তর্গত যে-কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে, তবে সেই প্রগতিকে **সমান্তর প্রগতি** (A. P.) বলে।

সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (common difference) বলে। যথা, (i) 2, 3, 5, 7,... একটি সমান্তর প্রগতি, কারণ, ইহার যে-কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পরবর্তী পদের অন্তর সর্বদা 2, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর 2. (ii) 10, 7, 4, 1... ইহারা একটি সমান্তর প্রগতি। কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে কমিয়া গিয়াছে। এস্থলে সাধারণ অন্তর -3.

§ 2·3. **সাধারণ অন্তর নির্ণয়।** সমান্তর প্রগতির যে-কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করা হয়। যথা,

(1) 2, 6, 10, 14... প্রগতির সাধারণ অন্তর $= 6 - 2 = 4$

(2) 7, 4, 1, -2... প্রগতির সাধারণ অন্তর $= 4 - 7 = -3$

(3) $a, a+b, a+2b$... প্রগতির সাধারণ অন্তর $= (a+b) - a = b$

(4) $a, a-b, a-2b$... প্রগতির সাধারণ অন্তর $= (a-b) - a = -b$.

§ 2·4. **সমান্তর প্রগতির n-তম পদ নির্ণয়।** সাধারণতঃ সমান্তর প্রগতির প্রথম পদকে a, সাধারণ অন্তরকে b, শেষ পদকে l, পদসংখ্যাকে n এবং পদগুলির যোগফলকে S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার, t_1 দ্বারা ১ম

পদ, t_2 দ্বারা ২য় পদ, t_3 দ্বারা ৩য় পদ···, t_n দ্বারা n-তম পদকে নির্দেশ করা হয়। কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে,

$$t_1\ (\text{১ম পদ}) = a \quad = a+(1-1)b,$$
$$t_2\ (\text{২য় পদ}) = a+b = a+(2-1)b,$$
$$t_3\ (\text{৩য় পদ}) = a+2b = a+(3-1)b,$$
$$t_4\ (\text{৪র্থ পদ}) = a+3b = a+(4-1)b, \text{ ইত্যাদি।}$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, যে-কোন পদে b-এর সহগ হইবে সেই পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। প্রথম পদ a-র সহিত ঐরূপ সহগযুক্ত b যোগ করিলেই যে-কোন পদ পাওয়া যায়।

অতএব যে-কোন সমান্তর প্রগতির n-তম পদ $t_n = a+(n-1)b$

ঐ শ্রেণীতে যদি মোট n-সংখ্যক পদ থাকে, তবে t_n হইবে শেষ পদ, তখন $l = a+(n-1)b$.

দ্রষ্টব্য : (1) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ হয় তবে $a-b=b-c$ বা $a+c=2b$ হইবে। বিপরীতক্রমে, যদি $a+c=2b$ হয়, তবে a, b, c একটি সমান্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ হইবে।

(2) প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অন্তর b, জানা থাকিলে সমান্তর শ্রেণীর পদগুলি হইতেছে $a,\ a+b,\ a+2b, \cdots,\ a+(n-1)b$. এক্ষেত্রে, দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে উপরোক্ত সূত্র হইতে a এবং b-এর মান বাহির করা সম্ভব এবং ইহা হইতে অন্য পদগুলি লেখা যাইবে।

(3) যদি শেষ পদকে l বলা হয় এবং ইহা যদি n-তম পদ হয়, তবে $l=a+(n-1)b$ সূত্র হইতে পাই $a=l-(n-1)b$, $a+b=l-(n-2)b$, $a+2b=l-(n-3)b, \cdots, a+(n-2)b=l-b$, $a+(n-1)b=l$. বিপরীত ক্রমে লিখিলে সমান্তর প্রগতির পদগুলিকে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়,

$$l,\ l-b,\ l-2b,\ \cdots,\ \ l-(n-2)b,\ l-(n-1)b.$$

(4) কোন সমান্তর প্রগতির পদগুলির সহিত একই সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলিও সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

কারণ, যদি সমান্তর প্রগতিটি $a, a+b, a+2b, \cdots,\ a+(n-1)b$ হয়, তবে প্রতিটি পদের সহিত x যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে নিম্নলিখিত প্রগতিগুলি পাওয়া যায়,

$$a+x,\ a+b+x,\ a+2b+x, \cdots,\ a+(n-1)b+x$$
$$a-x,\ a+b-x,\ a+2b-x, \cdots,\ a+(n-1)b-x,$$
$$a.x,\ (a+b).x,\ (a+2b).x,\ \cdots,\ \{a+(n-1)b\}.x,$$
$$\frac{a}{x},\quad \frac{a+b}{x},\quad \frac{a+2b}{x}, \cdots\cdots, \frac{a+(n-1)b}{x}.$$

দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রগতি (Progression)

§ 2·1. **প্রগতি।** যদি পর পর কতকগুলি রাশি বা পদ এরূপ হয় যে উহাদের যে কোনও একটিকে উহার পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই রাশিসমূহ একটি **প্রগতি-তে** (Progression) আছে বলা হয়। যথা, (*i*) 3, 5, 7, 9 প্রভৃতি রাশি, অথবা (*ii*) 3, 6, 12, 24 প্রভৃতি রাশি এক একটি প্রগতি গঠন করিয়াছে। কারণ (i)-এর রাশিসমূহে যে-কোন রাশি ঠিক পূর্ববর্তী রাশির সহিত 2 যোগ করিয়া পাওয়া যায় এবং (ii)-তে যে-কোন পদ ঠিক পূর্ববর্তী পদকে 2 দিয়া গুণ করিয়া পাওয়া যায়।

সমান্তর প্রগতি (Arithmetical Progression)

§ 2·2. **সমান্তর প্রগতি।** যদি কোন প্রগতির অন্তর্গত যে-কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে, তবে সেই প্রগতিকে **সমান্তর প্রগতি** (A. P.) বলে।

সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (common difference) বলে। যথা, (i) 2, 3, 5, 7,···একটি সমান্তর প্রগতি, কারণ, ইহার যে-কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পরবর্তী পদের অন্তর সর্বদা 2, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর 2. (ii) 10, 7, 4, 1···ইহারা একটি সমান্তর প্রগতি; কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে কমিয়া গিয়াছে। এস্থলে সাধারণ অন্তর − 3.

§ 2·3. **সাধারণ অন্তর নির্ণয়।** সমান্তর প্রগতির যে-কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করা হয়। যথা,

(1) 2, 6, 10, 14···প্রগতির সাধারণ অন্তর $=6-2=4$

(2) 7, 4, 1, −2···প্রগতির সাধারণ অন্তর $=4-7=-3$

(3) $a, a+b, a+2b$···প্রগতির সাধারণ অন্তর $=(a+b)-a=b$

(4) $a, a-b, a-2b$···প্রগতির সাধারণ অন্তর $=(a-b)-a=-b$.

§ 2·4. **সমান্তর প্রগতির n-তম পদ নির্ণয়।** সাধারণতঃ সমান্তর প্রগতির প্রথম পদকে a, সাধারণ অন্তরকে b, শেষ পদকে l, পদসংখ্যাকে n এবং পদগুলির যোগফলকে S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার, t_1 দ্বারা ১ম

পদ, t_2 দ্বারা ২য় পদ, t_3 দ্বারা ৩য় পদ…, t_n দ্বারা n-তম পদকে নির্দেশ করা হয়। কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে,

t_1 (১ম পদ) $=a \quad =a+(1-1)b$,
t_2 (২য় পদ) $=a+b=a+(2-1)b$,
t_3 (৩য় পদ) $=a+2b=a+(3-1)b$,
t_4 (৪র্থ পদ) $=a+3b=a+(4-1)b$, ইত্যাদি।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, যে-কোন পদে b-এর সহগ হইবে সেই পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। প্রথম পদ a-র সহিত ঐরূপ সহগযুক্ত b যোগ করিলেই যে-কোন পদ পাওয়া যায়।

অতএব যে-কোন সমান্তর প্রগতির n-তম পদ $t_n=a+(n-1)b$.

ঐ শ্রেণীতে যদি মোট n-সংখ্যক পদ থাকে, তবে t_n হইবে শেষ পদ, তখন $l=a+(n-1)b$.

দ্রষ্টব্য ঃ (1) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ হয় তবে $a-b=b-c$ বা $a+c=2b$ হইবে। বিপরীতক্রমে, যদি $a+c=2b$ হয়, তবে a, b, c একটি সমান্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ হইবে।

(2) প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অন্তর b, জানা থাকিলে সমান্তর শ্রেণীর পদগুলি হইতেছে $a,\ a+b,\ a+2b,\cdots,\ a+(n-1)b$. এক্ষণে, দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে উপরোক্ত সূত্র হইতে a এবং b-এর মান বাহির করা সম্ভব এবং ইহা হইতে অন্য পদগুলি লেখা যাইবে।

(3) যদি শেষ পদকে l ধরা হয় এবং ইহা যদি n-তম পদ হয়, তবে $l=a+(n-1)b$ সূত্র হইতে পাই $a=l-(n-1)b,\ a+b=l-(n-2)b$, $a+2b=l-(n-3)b,\cdots,\ a+(n-2)b=l-b,\ a+(n-1)b=l$. বিপরীত ক্রমে লিখিলে সমান্তর প্রগতির পদগুলিকে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়,

$$l,\ l-b,\ l-2b,\ \cdots,\ \ l-(n-2)b,\ l-(n-1)b.$$

(4) কোন সমান্তর প্রগতির পদগুলির সহিত একই সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলিও সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

কারণ, যদি সমান্তর প্রগতিটি $a, a+b, a+2b,\cdots,\ a+(n-1)b$ হয়, তবে প্রতিটি পদের সহিত x যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করিলে নিম্নলিখিত প্রগতিগুলি পাওয়া যায়,

$$a+x,\ a+b+x,\ a+2b+x,\cdots,\ a+(n-1)b+x$$
$$a-x,\ a+b-x,\ a+2b-x,\ldots,\ a+(n-1)b-x,$$
$$a.x,\ (a+b).x,\ (a+2b).x,\ \cdots,\ \{a+(n-1)b\}.x,$$
$$\frac{a}{x},\ \frac{a+b}{x},\ \frac{a+2b}{x},\cdots\cdots,\frac{a+(n-1)b}{x}.$$

স্পষ্টত: উপরোক্ত চারিটি প্রগতিই সমান্তর। প্রগতিগুলির সাধারণ অন্তর যথাক্রমে, b, b, $b.x$, $\frac{b}{x}$.

উদাহরণমালা 2A

উদা. 1. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 3 ও সাধারণ অন্তর 2; উহার দ্বাদশ (12-তম) পদ নির্ণয় কর।

এখানে a (১ম পদ) $=3$, b (সাধারণ অন্তর) $=2$ এবং (পদসংখ্যা) $=12$.

$\because$ সূত্রানুসারে $t_n=a+(n-1)b$,

$\therefore$ নির্ণেয় পদ অর্থাৎ $t_{12}=3+(12-1)\times 2=3+22=25$.

উদা. 2. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 1 এবং 18-তম পদ 52; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে কর, সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_{18}=52$, অর্থাৎ $a+(18-1)b=52$,

বা, $1+17b=52$ [$\because$ $a=1$], বা, $17b=51$. $\therefore$ $b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

উদা. 3. যে প্রগতির সপ্তম ও ত্রয়োদশ পদ যথাক্রমে 23 ও 41, তাহার 21-তম পদ কত?

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_7=23$ অর্থাৎ $a+6b=23$...(1)

এবং $t_{13}=41$ অর্থাৎ $a+12b=41$···(2)

এক্ষণে, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $6b=18$, $\therefore$ $b=3$.

আবার, (1) হইতে পাই $a+18=23$, $\therefore$ $a=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_{21}=a+20b=5+20\times 3=5+60=65$.

উদা. 4. 2, 5, 8,···প্রগতিটির কোন্ পদ 59?

মনে কর 59 ঐ প্রগতিটির n-তম পদ। এখানে $a=2$, $b=5-2=3$.

$\therefore$ $a+(n-1)b=59$.

বা, $2+(n-1)\times 3=59$, বা, $3(n-1)=57$,

বা, $n-1=19$, $\therefore$ $n=20$. অতএব প্রগতিটির 20-তম পদ 59.

উদা. 5. 46 কি 1, 4, 7,...প্রগতির কোন পদ?

যদি সম্ভব হয় মনে কর 46 প্রদত্ত প্রগতির n-তম পদ। এখানে $a=1$, এবং $b=4-1=3$. এক্ষণে, $a+(n-1)b=46$, বা, $1+(n-1)\times 3=46$.

বা, $3(n-1)=45$, বা, $n-1=15$, $\therefore$ $n=16$.

অতএব, 46 প্রদত্ত প্রগতিটির একটি পদ এবং উহা ষোড়শ পদ।

উদা 6. কোন সমান্তর প্রগতির m-তম পদ n এবং n-তম পদ m; উহার p-তম পদ নির্ণয় কর। [C. U. '47; E. B. S. B '51]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ শর্ত হইতে পাই $a+(m-1)b=n \cdots (1)$

এবং $a+(n-1)b=m \cdots (2)$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $(m-n)b=n-m$, $\therefore$ $b=\frac{n-m}{m-n}=-1$.

এখন (1) হইতে পাই $a+(m-1)\times(-1)=n$,

বা, $a-m+1=n$, $\therefore$ $a=m+n-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় p-তম পদ $=a+(p-1)b=m+n-1+(p-1)\times(-1)$

$=m+n-1-p+1=m+n-p$.

উদা. 7. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a ও শেষ পদ l; প্রমাণ কর যে প্রগতিটির গোড়া হইতে p-তম এবং শেষ হইতে পূর্বের p-তম পদদ্বয়ের সমষ্টি $a+l$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$;

$\therefore$ গোড়ার দিক হইতে p-তম পদ $=a+(p-1)b$

এবং শেষ দিক হইতে পূর্বের p-তম পদ $=l-(p-1)b$,

$\therefore$ ঐ দুই পদের সমষ্টি $=a+(p-1)b+l-(p-1)b=a+l$.

[**দ্রষ্টব্য :** গোড়ার দিক হইতে পর পর পদগুলি যেভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, শেষ দিক হইতে আগের পদগুলি ঠিক সেইভাবে কমিয়া গিয়াছে। $\therefore$ যদি গোড়ার দিক হইতে কোন পদ $a+rd$ হয়, তবে শেষ দিক হইতে পূর্বের ঐ সংখ্যক পদ $l-rd$ হইবে।]

প্রশ্নমালা 2A

1. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 6 এবং সাধারণ অন্তর 2; উহার 15-তম পদ নির্ণয় কর। [C. U. '22]

2. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 1 এবং দশম পদ 10 সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। [C. U. '25]

3. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 2 এবং 20-তম পদ 59. সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। [C. U. 24]

4. এমন একটি সমান্তর প্রগতি নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.

5. এমন একটি সমান্তর প্রগতি নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর -3.

6. 16, 13, 10,···প্রগতির 15-তম পদ নির্ণয় কর।

7. 2, 5, 8,···প্রগতির 12-তম পদ কত ?

8. 8, 6, 4,···প্রগতির 20-তম এবং n-তম পদ নির্ণয় কর।

9. $1+\frac{5}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$এর 10-তম পদ নির্ণয় কর।

10. (i) $a, (a+\frac{1}{n}), (a+\frac{2}{n}),\ldots$এবং (ii) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{2n+1}{n},\ldots$প্রগতির n-তম পদ নির্ণয় কর। [C. U. 1886]

11. 6, 10, 14,...প্রগতির কোন্ পদ 38 হয় ?

12. 10, 8, 6,...প্রগতির কোন্ কোন্ পদ 0 এবং -10 হয় ?

13. 3, 6, 9,...প্রগতিটির কোন পদ 29 হইতে পারে কি ?

14. $\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5},\ldots$প্রগতির কোন পদ $6\frac{3}{5}$ হইতে পারে কি ?

15. যে সমান্তর প্রগতির দ্বিতীয় এবং চতুর্থ পদ যথাক্রমে 6 এবং 14 তাহার দশম পদ কত ? [C. U. '29]

16. যে সমান্তর প্রগতির পঞ্চম ও দ্বাদশ পদ যথাক্রমে -4 ও -25 তাহার 20-তম পদ কত ?

17. যে সমান্তর প্রগতির পঞ্চম ও ত্রয়োদশ পদ যথাক্রমে 5 ও -3, তাহার প্রথম ও দশম পদ নির্ণয় কর।

18. কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ $3p-1$; প্রগতিটি নির্ণয় কর।

19. কোন সমান্তর প্রগতির p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে c ও d হইলে উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর কত হইবে ? [C. U. '34]

20. কোন সমান্তর প্রগতির m-তম পদ n এবং n-তম পদ m ; উহার $(m+n)$-তম পদ নির্ণয় কর।

21. যে সমান্তর প্রগতির p-তম পদ a এবং q-তম পদ b, তাহার r-তম পদ নির্ণয় কর।

22. প্রমাণ কর যে, সমান্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ প্রান্তদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।

সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

§ 2·5. **সমান্তরীয় মধ্যক।** (1) যদি পর পর তিনটি রাশি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে মধ্যপদটিকে প্রান্তিকরাশি দুইটির সমান্তরীয় মধ্যক বলে। যথা, a, b, c সমান্তরীয় প্রগতির ক্রমিক তিনটি পদ হইলে bকে a ও c-র সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (2) যদি কতকগুলি পদ একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে, তাহা হইলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যে ততগুলি সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয় ; যথা : $a, m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n, b$

একটি সমান্তর প্রগতি হইলে, $m_1, m_2 \cdots, m_n$ পদগুলিকে a ও b-র মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

উদাহরণমালা 2B

উদা. 1. a এবং b-এর সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর। [C. U. '48]

মনে কর, সমান্তরীয় মধ্যকটি m, $\therefore$ a, m, b একটি সমান্তর প্রগতি।

$\therefore$ $m-a=b-m$ (উভয়পক্ষ সাধারণ অন্তরের সমান বলিয়া)

বা, $2m=a+b$, $\therefore$ $m=\frac{a+b}{2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** যে-কোন দুইটি পদের সমষ্টির অর্ধেক, ঐ পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক হইবে।]

উদা. 2. a ও b-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

$\because$ a ও b-র মধ্যে n সংখ্যক মধ্যক আছে,

$\therefore$ a ও b-র মধ্যবর্তী n মধ্যকগুলি লইয়া এমন একটি সমান্তর প্রগতি হইল যাহার পদসংখ্যা $=n+2$, প্রথম পদ a, এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ $=b$. মনে কর সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore$ $(n+2)$-তম পদ $=b$, $\therefore$ $a+(n+2-1)d=b$,

বা, $a+(n+1)d=b$, বা, $(n+1)d=b-a$, $\therefore$ $d=\frac{b-a}{n+1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি হইতেছে

$$\left(a+\frac{b-a}{n+1}\right), \left(a+2.\frac{b-a}{n+1}\right), \left(a+3.\frac{a-b}{1+n}\right), \cdots, \left(a+n.\frac{b-a}{n+1}\right).$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে মধ্যে আছে n-সংখ্যক মধ্যক এবং তাহাদের আগে আছে a ও শেষে আছে b, সেইজন্য মোট পদসংখ্যা $n+2$ হইল। প্রথম পদের সঙ্গে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া ২য় পদ অর্থাৎ প্রথম মধ্যক পাওয়া গেল, এইভাবে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া পর পর অন্য মধ্যকগুলি পাওয়া যাইবে। শেষ মধ্যক হইল $a+n.\frac{b-a}{n+1}$, ইহা $b-d$ বা $b-\frac{a-b}{n+1}$ এরূপও প্রয়োজন মত লেখা যায়।

উদা. 3. 2 এবং 57-এর মধ্যে 10টি সমান্তরীয় মধ্যক বসাও।

[C. U. '19 ; D. B. '28]

2 এবং 57-এর মধ্যে 10টি মধ্যক লইলে মোট 12টি পদযুক্ত একটি সমান্তর প্রগতি হইবে। ইহার প্রথম পদ 2 এবং দ্বাদশপদ 57. মনে কর, সাধারণ অন্তর b. $\therefore$ $t_{12}=57$, বা, $2+11b=57$, বা, $11b=55$ $\therefore$ $b=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$.

উদা. 4. 4 ও 31-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক = 5 : 14 ; n-এর মান কত ?

4 ও 31-এর মধ্যে n-সংখ্যক মধ্যক লইয়া মোট $(n+2)$-সংখ্যক পদ-যুক্ত সমান্তর প্রগতি হইল। উহার প্রথম পদ 4 এবং $(n+2)$-তম পদ 31.

মনে কর, সাধারণ অন্তর b.

$\therefore\ t_{n+2}=4+(n+2-1)b=31,$ বা, $(n+1)b=27 \cdots\cdots(1)$

আবার, $\because$ b সাধারণ অন্তর,

$\therefore$ দ্বিতীয় মধ্যক $=4+2b$ এবং শেষ মধ্যক $=31-b$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $\dfrac{4+2b}{31-b}=\dfrac{5}{14},$

বা, $28b+56=155-5b,$ বা, $33b=99,$ $\therefore$ $b=3.$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $(n+1)\times 3=27,$

বা, $n+1=9,$ $\therefore$ $n=8.$

প্রশ্নমালা 2B

প্রদত্ত পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :—

1. 7 এবং 23.
2. -5 এবং 13.
3. -4 এবং -14.
4. $(x-a)^2$ এবং $(x+a)^2$.
5. $2\frac{1}{4}$ এবং $3\frac{1}{2}$.
6. $\frac{m+n}{m-n}$ এবং $\frac{m-n}{m+n}$
7. 1 এবং 41-এর মধ্যে 7টি সমান্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. '14]
8. 4 এবং 324-এর মধ্যে 4টি সমান্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. 1990]
9. 2 ও 23-এর মধ্যে এরূপ n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে যে প্রথম মধ্যক : শেষ মধ্যক = 1 : 4 n-এর মান নির্ণয় কর।
10. 14 ও 38-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক = 4 : 7 ; n এর মান কত ?

§ 2·6. সমান্তর প্রগতির যে-কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া আছে। উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর b এবং উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, নির্ণেয় যোগফল S এবং n-তম পদ l.

অতএব, $S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(l-2b)+(l-b)+l$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে,

$$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots+(a+2b)+(a+b)+a$$

(যোগ করিয়া) $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$

$+(a+l)=(a+l)+(a+l)+\cdots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=n(a+l)$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots(1)$

এক্ষণে, $\because$ n-তম পদ l, $\therefore\ l=a+(n-1)b$.

$\therefore$ (1) হইতে l-এর মান বসাইয়া পাই $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}\cdots(2)$

[দ্রষ্টব্য : কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম ও n-তম বা শেষ পদ জানা থাকিলে সূত্র-(1) এবং অন্যস্থলে সূত্র (2)-এর সাহায্যে যোগফল নির্ণয় করিবে।

সূত্র (1)টি নিম্নলিখিতভাবে মনে রাখিবে : সমান্তর প্রগতির যে-কোন সংখ্যক পদের যোগফল $=$ পদসংখ্যা $\times\left(\frac{\text{প্রথম পদ}+\text{শেষ পদ}}{2}\right)$।]

উদাহরণমালা 2C

উদা. 1. $3+7+11+\cdots$ প্রগতিটির প্রথম 21টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $n=21$, $b=7-3=4$; মনে কর, যোগফল S.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=\frac{21}{2}\{2\times 3+(21-1)\times 4\}=\frac{21}{2}\times 86=903.$

উদা. 2. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম দুইটি পদ 3 ও 1; উহার দশম পদ ও প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '13]

এখানে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=1-3=-2$,

পদসংখ্যা $n=10$. মনে কর, যোগফল $=S$.

$\therefore\ t_{10}=a+(n-1)b=3+(10-1)\times(-2)=3-18=-15$,

এবং $S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{10}{2}(3-15)=5\times(-12)=-60$.

উদা. 3. $3+5+7\ldots$ প্রগতির প্রথম n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $a=3$, $b=5-3=2$. মনে কর, সমষ্টি $=S$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{2\times 3+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}\{2n+4\}=n^2+2n.$

উদা. 4. $5+7+9+\cdots+65$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে প্রগতিটি একটি সমান্তর প্রগতি

এস্থলে $a=5$, $b=7-5=2$. মনে কর, পদসংখ্যা n,

সুতরাং n-তম পদ বা শেষ পদ $=65$,

$\therefore\ a+(n-1)b=65$, বা, $5+(n-1)\times 2=65$,

$\therefore\ 2(n-1)=60$, বা, $n-1=30$, $\therefore\ n=31$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{31}{2}(5+65)=\frac{31}{2}\times 70=1085$.

উদা. 5. কোন্ প্রগতির প্রথম n পদের সমষ্টি $(2n+1)(2n-1)$ হয়?

মনে কর, প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n.

$\therefore \quad S_n=(2n+1)(2n-1)=4n^2-1.$

এখন যদি n-এর স্থানে 1, 2, 3 প্রভৃতি বসাই তাহা হইলে S_1 অর্থাৎ প্রথম একটি পদের যোগফল, S_2 অর্থাৎ প্রথম দুইটি পদের যোগফল ইত্যাদি পাইব।

$\therefore \quad S_1=4.1^2-1=3,\ S_2=4.2^2-1=15,\ S_3=4.3^2-1=35.$

আবার, $t_1=S_1=3$ [$\because$ প্রথম একটি পদের যোগফল ও প্রথম পদ একই]

এবং $t_2=S_2-S_1=15-3=12$ [কারণ, প্রথম দুই পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদের সমান হয়।]

অনুরূপে $t_3=S_3-S_2=35-15=20$

এবং $t_4=S_4-S_3=63-35=28.$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রগতি $=3, 12, 20, 28, \cdots\cdots$ ইহার প্রথম পদটি বাদে বাকী পদগুলি সমান্তর প্রগতি (A.P.) হইবে।

উদা. 6. 750 ও 1000-এর মধ্যবর্তী 13-র গুণিতকগুলির যোগফল নির্ণয় কর। [C.U. '35]

13-এর গুণিতকগুলি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং উহার সাধারণ অন্তর = 13. এখন, 750-এর ঠিক পরবর্তী যে সংখ্যা 13-এর গুণিতক বা 13 দ্বারা বিভাজ্য তাহাই ঐ প্রগতির প্রথম পদ হইবে এবং 1000-এর ঠিক পূর্ববর্তী যে সংখ্যা 13-এর গুণিতক তাহাই ঐ প্রগতির শেষ পদ হইবে।

```
13)750(57           13)1000(76
   65                   91
   ---                  ---
   100                   90
    91                   78
   ---                   --
     9   13-9=4.         12
```

$\therefore \quad 750+4=754$ প্রথম পদ। $\therefore \quad 1000-12=988$ শেষ পদ।

মনে কর, পদ সংখ্যা $=n$. $\therefore$ n-তম পদ $a+(n-1)b=988,$

বা, $754+(n-1)\times 13=988$, বা, $13(n-1)=988-754=234,$

বা, $n-1=18. \quad \therefore \quad n=19.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{19}{2}(754+988)=\frac{19}{2}\times 1742=16549.$

উদা. 7. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+\cdots$ এর 40-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর। [C.U. '21]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$ এবং $t_1=a=1.$

$\therefore$ স্পষ্টত: $t_{40}=a+39b=1+39.2=79$; মনে কর, যোগফলটি $=s$.

এক্ষণে $s=1+3+5+\cdots\cdots+75+77+79$

এবং $s=79+77+75+\cdots\cdots+5+3+1$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore$ $2s=80+80+80+\cdots\cdots40$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=80\times40$,

$\therefore$ $s=\frac{80\times40}{2}=1600$.

উদা. 8. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+7+\cdots$এর প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=3-1=2$ এবং $t_1=1$,

$t_2=1+1.2=3$, $t_3=1+2.2=5$, $t_4=1+3.2=7$,

অনুরূপে $t_n=1+(n-1)2=2n-1$

এক্ষণে, $s=1+3+5+\ldots+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)$

আবার, $s=(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1$

(যোগ করিয়া) $2s=2n+2n+2n+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=2n\times n=2n^2$,

$\therefore$ $s=n^2$.

উদা. 9. $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots$ইহার 20 সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। [C.U. 1881]

এস্থলে দুইটি সমান্তর প্রগতি মিশাইয়া আছে। যথা, $(3+8+13+\cdots)$ এবং $(4+9+14+\cdots)$, সুতরাং প্রত্যেক প্রগতিতে পদসংখ্যা $=10$.

$\therefore$ $s=(3+8+13+\cdots$10-তম পদ পর্যন্ত$)+(4+9+14+\cdots$10-তম পদ পর্যান্ত$)$

$=\frac{10}{2}\{6+9\times5\}+\frac{10}{2}\{8+9\times5\}=5\times51+5\times53=520$.

উদা. 10. $3+5+7+\cdots$. প্রগতির কতগুলি পদের সমষ্টি 624 হইতে পারে? [C.U. '39 Sup.]

মনে কর, n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 624. এখানে $a=3$, $b=5-3=2$,

$\because$ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, $\therefore$ $\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=624$,

বা, $\frac{n}{2}(2n+4)=624$, বা, $n^2+2n=624$,

বা, $n^2+2n-624=0$, বা, $(n+26)(n-24)=0$, $\therefore$ $n=-26$ বা 24.

$\because$ পদসংখ্যা ঋণ-রাশি হইতে পারে না, $\therefore$ -26 গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=24$.

[দ্রষ্টব্য : $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ এই সূত্রের a, b, n ও S এই চারিটি রাশির যে কোন তিনটি জানা থাকিলে ঐ সূত্র-সাহায্যে অবশিষ্ট রাশিটি নির্ণয় করা যায়।]

উদা. 11. 17, 5, −7,… শ্রেণির কতগুলি পদের সমষ্টি −78?

[D. B. '31]

মনে কর, শ্রেণিটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি −78; এস্থলে প্রথম পদ $a=17$, সাধারণ অন্তর $b=5-17=-12$.

∵ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, ∴ $\frac{n}{2}\{34+(n-1)\times(-12)\}=-78$,

বা, $\frac{n}{2}(46-12n)=-78$, বা, $23n-6n^2+78=0$,

বা, $6n^2-23n-78=0$, বা, $(6n+13)(n-6)=0$, ∴ $n=-\frac{13}{6}$ বা 6

∵ n পদসংখ্যা ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হয় না,

∴ নির্ণেয় পদসংখ্যা = 6.

উদা. 12. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 ও শেষপদ 96 এবং পদগুলির সমষ্টি 1575; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

∵ $S=\frac{n}{2}(a+l)$, ∴ $\frac{n}{2}(9+96)=1575$, বা, $\frac{n}{2}=\frac{1575}{105}=15$, ∴ $n=30$

এখানে শেষ বা n-তম পদ = 96, ∴ $a+(n-1)b=96$ (b সাধারণ অন্তর)

বা, $9+29b=96$, বা, $29b=87$, ∴ $b=3$.

∴ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর = 3.

উদা. 13. 10+8+6+… শ্রেণির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 28; n-এর মান-নির্ণয় কর এবং দুইটি উত্তর হওয়ার কারণ দেখাও।

এখানে প্রথম পদ $a=10$, সাধারণ অন্তর $b=8-10=-2$.

∵ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, ∴ $\frac{n}{2}\{20+(n-1)\times -2\}=28$,

বা, $11n-n^2-28=0$, বা, $n^2-11n+28=0$, বা, $(n-4)(n-7)=0$,

∴ $n=4$ বা 7. এস্থলে দুইটি উত্তরই সম্ভব হইবে; কারণ, শ্রেণির পঞ্চম হইতে সপ্তম এই 3টি পদের সমষ্টি শূন্য। শ্রেণিটির 7টি পদ = 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, সুতরাং উহার প্রথম 4টি পদের সমষ্টি ও প্রথম 7টি পদের সমষ্টি সমান।

উদা. 14. দেখাও যে, 4, 12, 20, 28,… শ্রেণিটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম (জোড়) সংখ্যার বর্গ।

এস্থলে প্রথম পদ $a=4$, সাধারণ অন্তর $b=12-4=8$.

∴ $S_n=\frac{n}{2}\{2.4+(n-1)\times 8\}=\frac{n}{2}(8+8n-8)=4n^2=(2n)^2$.

∴ n-এর মান যে-কোন অখণ্ড যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা হউক না কেন 2n-এর মান সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা হইবে, ∴ $(2n)^2$ একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ।

∴ প্রদত্ত শ্রেণির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ হইল।

উদা. 15. একটি সমান্তর শ্রেণির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল 40, উহার সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষপদ 13; n নির্ণয় কর।

[C.U. '46; Pat. U. '38]

এখানে n-তম পদই শেষ পদ।

∴ $a+(n-1)d=13$, বা, $a+(n-1)\times 2=13$,

∴ $a=13-2n+2=15-2n$.

আবার, ∵ $\frac{n}{2}(a+l)=S$,

∴ $\frac{n}{2}(15-2n+13)=40$ [a, l, S-এর মান বসাইয়া]

বা, $-n^2+14n-40=0$, ∴ $n^2-14n+40=0$,

বা, $(n-4)(n-10)=0$, ∴ $n=4$, বা, 10.

[দ্রষ্টব্য: ∵ শেষপদ 13 এবং সাধারণ অন্তর 2, ∴ পদসংখ্যা $n=4$ হইলে, প্রথম পদ হইবে 7; আর $n=10$ হইলে, প্রথম পদ হইবে −5 এবং তখন প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। ∴ দুইটি উত্তরই সম্ভব।]

উদা. 16. পর পর 21টি অযুগ্ম পদের শেষ পদ 51 হইলে উহাদের সমষ্টি কত?

এখানে শ্রেণিটির শেষ পদ 51 এবং, সাধারণ অন্তর 2, সুতরাং শ্রেণিটি উল্টাইয়া লিখিলে $51+49+47+\cdots$ এই শ্রেণি হইবে। ইহার সাধারণ অন্তর −2 এবং পদসংখ্যা $n=21$.

∴ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{21}{2}\{2\times 51+(21-1)\times -2\}$

$=\frac{21}{2}(102-40)=\frac{21}{2}\times 62=651$.

উদা. 17. একটি সমান্তর শ্রেণির অষ্টাদশ পদ 39 হইলে উহার প্রথম 35টি পদের সমষ্টি কত হইবে?

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

∴ $t_{18}=a+(18-1)b=a+17b$ ∴ $a+17b=39$ (স্বীকার);

এখন, $S_{35}=\frac{35}{2}\{2a+(35-1)b\}=\frac{35}{2}(2a+34b)$

$=35(a+17b)=35\times 39=1365$.

উদা. 18. একটি সমান্তর শ্রেণির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি 120 এবং প্রথম 15 পদের সমষ্টি 255, উহার প্রথম n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

∵ $S_{10}=120$, ∴ $\frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=120$,

বা, $5(2a+9b)=120$, ∴ $2a+9b=24$ ...(1)

আবার, ∵ $S_{15}=255$, ∴ $\frac{15}{2}(2a+14b)=255$, বা, $2a+14b=34$ ...(2)

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=3$, $b=2$,

∴ $S_n=\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2)$.

উদা. 11. 17, 5, $-7, \cdots$ প্রগতির কতগুলি পদের সমষ্টি -78?

[D. B. '31]

মনে কর, প্রগতিটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 78 ;— এস্থলে প্রথম পদ $a=17$, সাধারণ অন্তর $b=5-17=-12$.

$\because$ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$. $\therefore$ $\frac{n}{2}\{34+(n-1)\times(-12)\}=-78$,

বা, $\frac{n}{2}(46-12n)=-78$, বা, $23n-6n^2+78=0$,

বা, $6n^2-23n-78=0$, বা, $(6n+13)(n-6)=0$, $\therefore$ $n=-\frac{13}{6}$ বা 6

$\because$ পদসংখ্যা ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হয় না,

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=6$.

উদা. 12. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 ও শেষপদ 96 এবং পদগুলির সমষ্টি 1575 ; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

$\because$ $S=\frac{n}{2}(a+l)$, $\therefore$ $\frac{n}{2}(9+96)=1575$, বা, $\frac{n}{2}=\frac{1575}{105}=15$, $\therefore$ $n=30$

এখানে শেষ বা n-তম পদ $=96$, $\therefore$ $a+(n-1)b=96$ (b সাধারণ অন্তর)

বা, $9+29b=96$, বা, $29b=87$, $\therefore$ $b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $=3$.

উদা. 13. $10+8+6+\cdots$ প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 28 ; n-এর মান নির্ণয় কর এবং দুইটি উত্তর হওয়ার কারণ দেখাও।

এখানে প্রথম পদ $a=10$, সাধারণ অন্তর $b=8-10=-2$.

$\because$ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s$, $\therefore$ $\frac{n}{2}\{20+(n-1)\times-2\}=28$,

বা, $11n-n^2-28=0$, বা, $n^2-11n+28=0$, বা, $(n-4)(n-7)=0$,

$\therefore$ $n=4$ বা 7. এস্থলে দুইটি উত্তরই সম্ভব হইবে ; কারণ, প্রগতির পঞ্চম হইতে সপ্তম এই 3টি পদের সমষ্টি শূন্য। প্রগতিটির 7টি পদ $=10, 8, 6, 4, 2, 0, -2$, সুতরাং ইহার প্রথম 4টি পদের সমষ্টি ও প্রথম 7টি পদের সমষ্টি সমান।

উদা. 14. দেখাও যে, 4, 12, 20, 28, $\cdots$ প্রগতিটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম (জোড়) সংখ্যার বর্গ।

এস্থলে প্রথম পদ $a=4$, সাধারণ অন্তর $b=12-4=8$.

$\therefore$ $S_n=\frac{n}{2}\{2.4+(n-1)\times8\}=\frac{n}{2}(8+8n-8)=4n^2=(2n)^2$.

$\therefore$ n-এর মান যে-কোন অখণ্ড যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা হউক না কেন $2n$-এর মান সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা হইবে, $\therefore$ $(2n)^2$ একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ।

$\therefore$ প্রদত্ত প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ হইল।

উদা. 15. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল 40, উহার সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষপদ 13 ; n নির্ণয় কর।

[C.U. '46 ; Pat. U. '18]

এখানে n-তম পদই শেষ পদ।

$\therefore\ a+(n-1)b=13$, বা, $a+(n-1)\times 2=13$,

$\therefore\ a=13-2n+2=15-2n$.

আবার, $\because\ \frac{n}{2}(a+l)=S$,

$\therefore\ \frac{n}{2}(15-2n+13)=40$ [a, l, S-এর মান বসাইয়া]

বা, $-n^2+14n-40=0$, $\therefore\ n^2-14n+40=0$,

বা, $(n-4)(n-10)=0$, $\therefore\ n=4$, বা, 10.

[দ্রষ্টব্য : $\because$ শেষপদ 13 এবং সাধারণ অন্তর 2, $\therefore$ পদসংখ্যা $n=4$ হইলে, প্রথম পদ হইবে 7 ; আর $n=10$ হইলে, প্রথম পদ হইবে -5 এবং তখন প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। $\therefore$ দুইটি উত্তরই সম্ভব।]

উদা. 16. পর পর 21টি অযুগ্ম পদের শেষ পদ 51 হইলে উহাদের সমষ্টি কত ?

এখানে প্রগতিটির শেষ পদ 51 এবং, সাধারণ অন্তর 2, সুতরাং প্রগতিটি উল্টাইয়া লিখিলে $51+49+47+\cdots$এই প্রগতি হইবে। ইহার সাধারণ অন্তর -2 এবং পদসংখ্যা $n=21$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{21}{2}\{2\times 51+(21-1)\times -2\}$

$=\frac{21}{2}(102-40)=\frac{21}{2}\times 62=651.$

উদা. 17. একটি সমান্তর প্রগতির অষ্টাদশ পদ 39 হইলে উহার প্রথম 35টি পদের সমষ্টি কত হইবে ?

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

$\therefore\ t_{18}=a+(18-1)b=a+17b$. $\therefore\ a+17b=39$ (স্বীকার) ;

এক্ষণে, $S_{35}=\frac{35}{2}\{2a+(35-1)b\}=\frac{35}{2}\{2a+34b\}$

$=35(a+17b)=35\times 39=1365.$

উদা. 18. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি 120 এবং প্রথম 15 পদের সমষ্টি 255, উহার প্রথম n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

$\because\ S_{10}=120$, $\therefore\ \frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=120$,

বা, $5(2a+9b)=120$, $\therefore\ 2a+9b=24\cdots(2)$

আবার, $\because\ S_{15}=255$, $\therefore\ \frac{15}{2}(2a+14b)=255$, বা, $2a+14b=34\ldots(2)$

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=3$, $b=2$,

$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2).$

উদা. 19. কোন শ্রেণীর বালকদের বয়সগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী যাহার সাধারণ অন্তর 4 মাস। সর্বকনিষ্ঠ বালকটির বয়স 8 বৎসর এবং বয়সগুলির সমষ্টি 168 বৎসর হইলে বালকদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [C. F. A. 1872]

মনে কর, বালকদের সংখ্যা n. এখানে প্রথম পদ 8 বৎসর এবং সাধারণ অন্তর $=4$ মাস $=\frac{1}{3}$ বৎসর।

$\therefore\ \frac{n}{2}\{2\times 8+(n-1)\times\frac{1}{3}\}=168$, বা, $\frac{n}{2}(16+\frac{n-1}{3})=168$,

বা, $\frac{n}{2}\times\frac{n+47}{3}=168$, বা, $n^2+47n=1008$,

বা, $n^2+47n-1008=0$, বা, $(n-16)(n+63)=0$,

$\therefore\ n=16$, বা, -63. $\because$ বালকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ নির্ণেয় বালক-সংখ্যা $=16$.

উদা. 20. একটি 200 ফুট গভীর কূপ খনন করিতে প্রথম এক ফুটের জন্য খরচ হয় 1 টাকা 10 পয়সা এবং পরবর্তী প্রত্যেক ফুটের জন্য 10 পয়সা করিয়া অতিরিক্ত খরচ লাগে। ঐ কূপ খননে মোট কত ব্যয় হইবে?

প্রদত্ত শর্ত হইতে $a=110$ পয়সা, $b=10$ পয়সা এবং $n=200$.

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ (অর্থাৎ S) $=\frac{200}{2}\{2.110+(200-1)\times 10\}$ পয়সা
$=2210$ টাকা।

উদা. 21. দুই ব্যক্তি একই পথে একসঙ্গে যাত্রা আরম্ভ করিল। একজন প্রত্যহ 10 মাইল করিয়া সমভাবে যাইতে লাগিল। অপর ব্যক্তি প্রথম দিন 8 মাইল গিয়া পরে প্রতিদিন পূর্ব দিন অপেক্ষা অর্ধ মাইল করিয়া বেশী যাইতে লাগিল। দ্বিতীয় ব্যক্তি কত দিন পরে প্রথম ব্যক্তিকে ধরিবে? [Pat. U. '20]

মনে কর, নির্ণেয় দিনসংখ্যা $=n$. এই n দিনে দুই ব্যক্তিই সমান পথ যাইবে। প্রথম ব্যক্তি প্রত্যহ 10 মাইল করিয়া যায়,

$\therefore$ সে n দিনে যায় $10n$ মাইল...(1),

আর দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম দিন 8 মাইল, দ্বিতীয় দিন $8\frac{1}{2}$ মাইল, তৃতীয় দিন 9 মাইল এই হিসাবে যায়। এক্ষেত্রে প্রথম পদ $a=8$, সাধারণ অন্তর $b=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ সে n দিনে যায় $\frac{n}{2}\{2.8+(n-1)\times\frac{1}{2}\}$ মা., বা, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})$ মা....(2)

এখন (1) ও (2) হইতে পাই, $\frac{n}{2}(\frac{31+n}{2})=10n$.

বা, $\frac{31+n}{2}=20$ [$\frac{n}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া], বা, $31+n=40$,

$\therefore\ n=9$, $\therefore$ নির্ণেয় সময় $=9$ দিন!

§ 2·7. স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় যোগফল

1, 2, 3, 4,......প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (natural numbers) বলে। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা বলিলে, $1, 2, 3, \cdots, n$ এইগুলি বুঝাইবে।

I. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=1$ এবং পদ-সংখ্যা $=n$.

$$\therefore\ S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}\{2.1+(n-1).1\}=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

II. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল :

[C. M. '15 ; D. B. '32, '34, '40 ; G. U. '51]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

এক্ষণে, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ [অভেদে সমান, অর্থাৎ n-এর মান যাহাই হউক না কেন, উভয়পক্ষ সর্বদা সমান]।

এখন ঐ অভেদে n-এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$\begin{aligned}
1^3-0^3 &= 3.1^2-3.1+1\\
2^3-1^3 &= 3.2^2-3.2+1\\
3^3-2^3 &= 3.3^2-3.3+1\\
\cdots\quad \cdots &\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\\
n^3-(n-1)^3 &= 3n^2-3n+1
\end{aligned}$$

(যোগ করিয়া) $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$
$-3(1+2+3+\cdots+n)+n,$

বা, $n^3=3s-\dfrac{3n(n+1)}{2}+n,$

বা, $3s=n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n=\dfrac{2n^3+3n(n+1)-2n}{2}$.

$=\dfrac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore\ s=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

[দ্রষ্টব্য : যোগ করিবার সময় বামপক্ষের সব পদ কাটিয়া গিয়া কেবল n^3 অবশিষ্ট আছে। ডান পক্ষে সাধারণ উৎপাদক 3কে বাহিরে রাখা হইয়াছে। $1+1+1+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত যোগ করিয়া যোগফল n হয়; কারণ 5টি 1 যোগ করিয়া 5 হয়, সুতরাং n-সংখ্যক এক যোগ করিয়া n হইল।]

III. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ত্রিঘাত (cube)গুলির যোগফল :

[C. U. '18]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

n-এর মান যাহাই হউক না কেন,

$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ [অভেদে সমান]

এক্ষণে, n-এর স্থানে পর পর 1, 2, 3,…, n পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1$$

(যোগ করিয়া) $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$
$-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n,$

বা, $n^4=4s-\dfrac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n(n+1)}{2}-n$

$\therefore\quad 4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$
$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$
$=n(n+1)(n^2-n+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$
$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$
$=n(n+1)(n^2+n)=n(n+1)n(n+1)=n^2(n+1)^2,$

$\therefore\quad s=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$

[দ্রষ্টব্য : I ও III লক্ষ্য করিয়া দেখ. III-এর যোগফল I-এর যোগফলের বর্গ। সুতরাং ইহা মনে রাখা সহজ। $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.]

এই সূত্রগুলির প্রয়োগে বিবিধ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইবে)

নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 2D

উদা. 1. যে প্রগতির n-তম পদ $n(n-1)$ তাহার প্রথম n পদের সমষ্টি কত ?

মনে কর, সমষ্টি s. এখানে $t_n=n(n-1)=n^2-n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$t_1=1^2-1$$
$$t_2=2^2-2$$
$$t_3=3^2-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2-n$$

যোগ করিয়া $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{2n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : যোগে বাম পক্ষের $t_1+t_2+\cdots+t_n=s$ লেখা হইল।]

উদা. 2. n সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ কর $1.2+2.3+3.4+\cdots$.

[C. U. '12, '17, '39 Sup., '44, '51 ; D. B. '26, '33, '41, 44]

এস্থলে প্রত্যেক পদের ন্যায় n-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত। প্রদত্ত প্রগতির পদগুলির প্রথম উৎপাদকগুলি 1, 2, 3, ⋯এইভাবে হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি 2, 3, 4,⋯ এইভাবে হইয়াছে।

∴ ইহার $t_n=(1, 2, 3,\cdots$.এর n-তম পদ$)\times(2, 3, 4\cdots$এর n-তম পদ$)$ $=n(n+1)=n^2+n.$ এক্ষণে, $n=1; 2, 3,\cdots,$ n বসাইয়া পাই

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2+n$$

(যোগফল) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}.$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)n(+2)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : এরূপ স্থলে প্রথমে n-তম পদ নির্ণয় করিয়া n-এর স্থানে, 1, 2, 3,⋯প্রভৃতি লিখিয়া যোগফল নির্ণয় করিতে হয়। অঙ্ক দেখিয়া n-তম পদ নির্ণয়ের উপায় স্থির করিতে হয়। প্রত্যেক পদে দুই বা তিনটি উৎপাদক থাকিলে উপরে প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।]

উদা. 3. প্রগতিটির n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর $1^2+3^2+5^2+\cdots$ [C. U. '50]

এস্থলে $t_n=1, 3, 5,\cdots$ এই প্রগতির n-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

(যোগ করিয়া) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$

এক্ষণে, n-এর স্থানে পর পর 1, 2, 3,···, n পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1$$

(যোগ করিয়া) $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$
$-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$,

বা, $n^4=4s-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}-n$

$\therefore\quad 4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$
$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$
$=n(n+1)(n^2-n+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$
$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$
$=n(n+1)(n^2+n)=n(n+1)n(n+1)=n^2(n+1)^2$,

$\therefore\quad s=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$

[দ্রষ্টব্য : I ও III লক্ষ্য করিয়া দেখ. III-এর যোগফল I-এর যোগফলের বর্গ। সুতরাং ইহা মনে রাখা সহজ। $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.]

এই সূত্রগুলির প্রয়োগে বিবিধ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইবে)

নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 2D

উদা. 1. যে প্রগতির n-তম পদ $n(n-1)$ তাহার প্রথম n পদের সমষ্টি কত ?

মনে কর, সমষ্টি s. এখানে $t_n=n(n-1)=n^2-n$.

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$t_1=1^2-1$$
$$t_2=2^2-2$$
$$t_3=3^2-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2-n$$

যোগ করিয়া $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{2n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : যোগে বাম পক্ষের $t_1+t_2+\cdots+t_n=s$ লেখা হইল।]

উদা. 2. n সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ কর $1.2+2.3+3.4+\cdots$.

[C. U. '12, '17, '39 Sup., '44, '51 ; D. B. '26, '33, '41, 44]

এস্থলে প্রত্যেক পদের ন্যায় n-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত। প্রদত্ত প্রগতির পদগুলির প্রথম উৎপাদকগুলি 1, 2, 3, ⋯এইভাবে হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি 2, 3, 4,⋯ এইভাবে হইয়াছে।

∴ ইহার $t_n=(1, 2, 3,\cdots$.এর n-তম পদ$)\times(2, 3, 4\cdots$এর n-তম পদ$)$ $=n(n+1)=n^2+n.$ এক্ষণে, $n=1; 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2+n$$

(যোগফল) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}.$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)n(+2)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : এরূপ স্থলে প্রথমে n-তম পদ নির্ণয় করিয়া n-এর স্থানে, 1, 2, 3,⋯প্রভৃতি লিখিয়া যোগফল নির্ণয় করিতে হয়। অঙ্ক দেখিয়া n-তম পদ নির্ণয়ের উপায় স্থির করিতে হয়। প্রত্যেক পদে দুই বা তিনটি উৎপাদক থাকিলে উপরে প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।]

উদা. 3. প্রগতিটির n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর $1^2+3^2+5^2+\cdots$ [C. U. '50]

এস্থলে $t_n=1, 3, 5,\cdots$ এই প্রগতির n-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

(যোগ করিয়া) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

উদা. 4. $2^2+5^2+8^2+\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর। [D. B. '35]

এস্থলে $t_n=2+5+8+\cdots$ এই শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ

$$=\{2+(n-1)\times 3\}^2=(3n-1)^2=9n^2-6n+1.$$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots,n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=9.1^2-6.1+1$$
$$t_2=9.2^2-6.2+1$$
$$t_3=9.3^2-6.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=9.n^2-6.n+1$$

(যোগ করিয়া) $\therefore\quad s=9(1^2+2^2+\cdots+n^2)-6(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{6n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{3n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+2n}{2}=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

উদা. 5. $1+4+8+13+19+26+\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, যোগফল s এবং n-তম পদ t_n.

অতএব, $s=1+4+8+13+19+26+\cdots+t_n$

আবার, $s=\quad 1+4+8+13+19+\cdots+t_{n-1}+t_n$

(এক পদ সরাইয়া লিখিয়া)

(বিয়োগ করিয়া) $0=1+3+4+5+6+7\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+3+4+5+6+\ldots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত [পক্ষান্তর করিয়া]

$$=1+\{3+4+5+6+\cdots(n-1) \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\}$$

$$=1+\frac{n-1}{2}\{6+(n-2)\times 1\}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n-1.$$

এখন, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{3}{2}.1-1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{3}{2}.2-1$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{3}{2}.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{3}{2}n-1$$

(যোগ করিয়া) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}(1+2+\cdots+n)-n$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{3n(n+1)}{4}-n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)-12n}{12}$$

$$=\frac{2n(n^2+6n-1)}{12}=\frac{n(n^2+6n-1)}{6}.$$

[দ্রষ্টব্য : এস্থলে দেখ, অন্য প্রণালীতে t_n স্থির করিতে হইল। এখানে দেখা গেল যে পর পর পদগুলির অন্তরফলগুলি সমান্তর প্রগতি গঠন করে। তাই এক পদ করিয়া সরাইয়া লিখিয়া বিয়োগ করিয়া t_n নির্ণয় করা হইল। এখানে আরও দেখ t_n যে প্রগতির সমষ্টির সমান তাহার প্রথম পদটি অর্থাৎ 1টি বাদে বাকী পদগুলি সমান্তর প্রগতিভুক্ত বলিয়া বাকী পদগুলির সংখ্যা n অপেক্ষা 1 কম অর্থাৎ $n-1$ ধরা হইল ; কারণ, একটি পদ (অর্থাৎ 1) বাদ গিয়াছে।]

উদা. 6. n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3, \cdots$এর n-তম পদ$)\times(2, 3, 4, \cdots$এর n-তম পদ$)$ $\times(3, 4, 5, \cdots$এর n-তম পদ$)=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=1^3+3.1^2+2.1$$
$$t_2=2^3+3.2^2+2.2$$
$$t_3=3^3+3.3^2+2.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+3.n^2+2.n$$

(যোগ করিয়া) $s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2(1+2+\cdots+n)$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right\}=n(n+1)\left\{\frac{n^2+5n+6}{4}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

উদা. 7. $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3, \cdots$এর n-তম পদ$)\times(3, 4, 5, \cdots$এর n-তম পদের বর্গ$)$

$$=n\times(n+2)^2=n^3+4n^2+4n.$$

এস্থলে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^3+4.1^2+4.1$$
$$t_2=2^3+4.2^2+4.2$$
$$t_3=3^3+4.3^2+4.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+4.n^2+4.n$$

$$\therefore\ s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+4(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32).$$

উদা. 8. (1), (1+2),(1+2+3),...., প্রগতিটির n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $t_n=(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

এক্ষণে, $n=1, 2, 3,\cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{1}{2}.2$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{1}{2}.3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{1}{2}.n$$

(যোগ করিয়া) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{12}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

উদা. 9. (1)+(2+3)+(4+5+6)+·· n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে 1, 2, 3 প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। এখন দেখিতে হইবে যে n-সংখ্যক বন্ধনী তুলিয়া দিলে মোট কতগুলি পদ হইবে। এখানে দেখা যায় যে, প্রথম বন্ধনীর ভিতর পদসংখ্যা 1,

দ্বিতীয় বন্ধনীতে পদসংখ্যা 2, তৃতীয় বন্ধনীতে 3, সুতরাং সকল বন্ধনী তুলিয়া দিলে মোট পদসংখ্যা হইবে $(1+2+3+\cdots\cdots+n)$ অর্থাৎ $\frac{n(n+1)}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+2+3+\cdots\cdots\frac{n(n+1)}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ $\left[\because\ S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,\right.$

$\therefore$ এখানে n-এর স্থানে $\frac{n(n+1)}{2}$ বসান হইল।]

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+1\right\}=\frac{n(n+1)}{4}\times\frac{n^2+n+2}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$

উদা. 10. $1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

(i) যদি n কোন যুগ্ম বা জোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots\cdots\frac{n}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=-1\times\frac{n}{2}=-\frac{n}{2}.$

(ii) যদি n কোন বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে

প্রদত্ত রাশি $=1+\{(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots\cdots$

$\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}

$=1+\{1+1+1+\cdots\cdots\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত }

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=1+1\times\frac{n-1}{2}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}.$

এখানে পদসংখ্যা বিজোড় বলিয়া প্রথম পদকে ছাড়িয়া বাকী পদসংখ্যা $n-1$ জোড় হইবে। এখন দুইটি করিয়া পদ এক একটি বন্ধনীভুক্ত করায় মোট $\frac{n-1}{2}$ সংখ্যক বন্ধনী বা পদ হইল।]

উদা. 11. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$ ইহার n-পদের সমষ্টি কত ?

এস্থলে, $t_n=\frac{1}{(1,2,3,\ldots.\text{এর } n\text{-তম পদ})(2,3,4,\ldots\text{এর } n\text{-তম পদ})}=\frac{1}{n(n+1)}$

$$\text{এক্ষণে, } t_1=\frac{1}{2.1}=1-\frac{1}{2}$$

$$t_2=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$t_3=\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t^n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$(\text{যোগ করিয়া})\ s=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

উদা. 12. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[W.B.S.F. '53]

$$\text{এস্থলে } t_n=\frac{1}{(1,3,5,\cdots\text{এর } n\text{-তম পদ})(3,5,7,\cdots\text{এর } n\text{-তম পদ})}$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\text{এক্ষণে, } t_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$t_2=\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$t_3=\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$(\text{যোগ করিয়া})\ s=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}.$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. $\therefore\ \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}=\frac{1}{1.3}$ এইভাবে ধরা যায়।

§ 2·8. $\sum$ চিহ্নের ব্যবহার (Use of $\sum$ sign):

গ্রীক অক্ষর $\sum$ (sigma)-এর দ্বারা অনেক সময় প্রগতির যোগ সংক্ষেপে করা যায়। কতকগুলি পদের যোগফলকে ঐ পদের n-তম পদের আগে $\sum$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন $t_1+t_2+\cdots+t_n$কে সংক্ষেপে লেখা হয় $\sum t_n$।

সুতরাং $\sum n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\sum n^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum n^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

মনে কর কোন শ্রেণীর n-তম পদ $t_n=a+bn+cn^2+dn^3+\cdots$আকারে প্রকাশ করা যায়। তবে উহার প্রথম n পদের যোগফল S_n-কে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$S_n=\sum t_n=\sum(a+bn+cn^2+dn^3+\cdots\cdots)$$
$$=\sum a+\sum bn+\sum cn^2+\sum dn^3+\cdots\cdots$$
$$=na+b\sum n+c\sum n^2+d\sum n^3+\cdots\cdots$$

উদা. 1. $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$, ইহার n-তম পদের যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে n-তম পদ $t_n=n(n+1)=n^2+n$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $S=\sum t_n=\sum(n^2+n)=\sum n^2+\sum n$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\tfrac{1}{2}n(n+1)\{\tfrac{1}{3}(2n+1)+1\}$$
$$=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

উদা. 2. $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots\cdots$ইহার n-তম পদের যোগফল নির্ণয় কর। [H. S. '67]

এখানে n-তম পদ $t_n=(3, 5, 7,\cdots$ এর n-তম পদ$)^3$

$-(2, 4, 6,\cdots$এর n-তম পদ$)^3$

$$=(2n+1)^3-(2n)^3=12n^2+6n+1.$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীটির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল

$$S_n=\sum t_n=12\sum n^2+6\sum n+n$$
$$=12.\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6.\ \frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=n(4n^2+9n+6).$$

উদা. 3. 90 ও 890-এর মধ্যবর্তী যে অখণ্ড সংখ্যাগুলি পূর্ণবর্গ তাহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [S. F. '57]

90-এর পরবর্তী পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইতেছে $=10^2=100$, এবং

890-এর পূর্ববর্তী পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইতেছে $=(30-1)^2=29^2$।

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=10^2+11^2+\cdots+29^2$

$=(1^2+2^2+\cdots+29^2)-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

$=\dfrac{29(29+1)(2\times29+1)}{6}-\dfrac{9(9+1)(2\times9+1)}{6}$

$=8555-285=8270.$

উদাহরণমালা 2E

উদা. 1. সমান্তর প্রগতিতে আছে এরূপ 3টি সংখ্যার সমষ্টি 27 এবং তাহাদের গুণফল 693 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-b$, a, $a+b$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $a-b+a+a+b=27\cdots(1)$

এবং $(a-b).a.(a+b)=693\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $3a=27$, $\therefore\ a=9$.

(2) হইতে পাই $a(a^2-b^2)=693$, বা, $9(81-b^2)=693$,

বা, $81-b^2=77$, বা, $b^2=4$, $\therefore\ b=\pm2$.

অতএব, $b=2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $(9-2)$, 9 ও $(9+2)$ অর্থাৎ 7, 9, 11 এবং $b=-2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $9-(-2)$, 9, $9-2$ অর্থাৎ 11, 9, 7.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় = 7, 9 ও 11 ; অথবা, 11, 9 ও 7.

উদা. 2. চারিটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতিতে আছে। প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 10 এবং মধ্যপদদ্বয়ের গুণফল 24 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-3b$. $a-b$. $a+b$, $a+3b$ [সাধারণ অন্তর $2b$]

অতএব, প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই

$a-3b+a+3b=10\cdots(1)$ এবং $(a-b)(a+b)=24\cdots(2)$,

এক্ষণে, (1) হইতে $2a=10$, $\therefore\ a=5$; (2) হইতে $a^2-b^2=24$,

বা, $25-b^2=24$, বা, $b^2=1$, $\therefore\ b=\pm1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $=(5-3), (5-1), (5+1)$ ও $(5+3)$;

অথবা, $(5+3), (5+1), (5-1)$ ও $(5-3)$

= 2, 4, 6 ও 8 ; অথবা 8, 6, 4 ও 2.

[দ্রষ্টব্য : (1) পদসংখ্যা যদি অযুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদটি a এবং সাধারণ অন্তর b ধরিতে হয়। (2) পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে মধ্যে পর পর $a-b$, $a+b$ দুইটি মধ্যপদ এবং সাধারণ অন্তর $2b$ ধরিয়া দুই পাশের পদগুলি লিখিবে।]

উদা. 3. 69কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে এবং প্রথম দুইটির গুণফল 483 হয়।

মনে কর, অংশত্রয় যথাক্রমে $a-b$, a, $a+b$.

$\therefore$ শর্তানুসারে $a-b+a+a+b=69 \cdots(1)$ এবং $(a-b)a=483 \cdots(2)$

(1) হইতে পাই $3a=69$, $\therefore$ $a=23$.

(2) হইতে পাই $(23-b)\times 23=483$, বা, $23-b=21$,

$\therefore$ $b=2$. $\therefore$ নির্ণেয় অংশত্রয় $=21, 23, 25$.

উদা. 4. a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে, $ab+bc = 2b^2$.

$\because$ a, b, c সমান্তর প্রগতির পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $b-c=c-b$, $\therefore$ $2b=a+c$.

এক্ষণে, উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করিয়া পাই $2b^2=ab+bc$.

উদা. 5. a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$-ও সমান্তর প্রগতিতে আছে।

$\because$ a, b, c সমান্তর প্রগতির পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ সমান্তর প্রগতি হইবে,

অর্থাৎ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর প্রগতি।

উদা. 6. a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ও সমান্তর প্রগতিতে আছে।

[C. U. '10, '38 ; D. B. '45 ; G. U. '50]

[অন্য প্রণালী] $\because$ a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতি (স্বীকার),

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$.

এক্ষণে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর প্রগতি হইবে

যদি $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$ হয়, অর্থাৎ যদি $b^2-a^2=c^2-b^2$ হয় ; কিন্তু প্রদত্ত শর্ত হইতে ইহারা সমান দেখানো হইয়াছে।

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর প্রগতি।

উদা. 7. যে সমান্তর প্রগতির n পদের সমষ্টি $5n^2+7n$, তাহার প্রথম দুইটি পদ নির্ণয় কর। [C. U. '41]

n-সংখ্যক পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করা হইল।

অতএব, $S_n=5n^2+7n$; এখন, $n=1$ ও 2 বসাইয়া পাই

$S_1=5.1^2+7.1=12$ (প্রথম একটি পদের সমষ্টি),

$S_2=5.2^2+7.2=34$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি),

$\therefore\ t_1=S_1=12$ (প্রথম একটি পদের যোগফল প্রথম পদই হয়।)

এবং $t_2=S_2-S_1=34-12=22$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়)।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পদ $=12$ ও 22.

উদা. 8. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম p পদের সমষ্টি q এবং প্রথম q পদের সমষ্টি p. উহার প্রথম $(p+q)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $\frac{p}{2}\{2a+(p-1)b\}=q\cdots(1)$

এবং $\frac{q}{2}\{2a+(q-1)b\}=p\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $2ap+p^2b-pb=2q\cdots(3)$

এবং (2) হইতে পাই $2aq+q^2b-qb=2p\cdots(4)$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$2a(p-q)+b(p^2-q^2)-b(p-q)=2(q-p)=-2(p-q)$.

$\therefore\ 2a+(p+q)b-b=-2$ [$p\neq q$ ধরিয়া, উভয়পক্ষকে $p-q$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $2a+(p+q-1)b=-2\cdots(5)$

এক্ষণে, $p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)b\}$ [সূত্র অনুসারে]

$=\frac{p+q}{2}\times(-2)$ [(5) হইতে] $=-(p+q)$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, যে-কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি ইহার প্রথম $3n$ পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ। (C. U. 1876]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{2n+(n-1)b\}\ldots(1)$

$S_{2n}=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)b\}=n\{2a+(2n-1)b\}\cdots(2)$

এবং $S_{3n}=\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}\ldots(3)$

এক্ষণে, $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $= S_{2n} - S_n$

$$= n\{2a+(2n-1)b\} - \tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$$
$$= \tfrac{n}{2}\{4a+4bn-2b-2a-bn+b\}$$
$$= \tfrac{n}{2}(2a+3bn-b\} = \tfrac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$$

আবার $\frac{1}{3} \times S_{3n} = \frac{1}{3} \times \frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\} = \frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, যে-কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি = প্রথম $3n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

উদা. 10. কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ a এবং q-তম পদ b. প্রমাণ কর যে উহার প্রথম $p+q$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{p+q}{2}\left(a+b-\frac{a-b}{p-q}\right)$ হইবে।

মনে কর, প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$.

$\therefore \quad f+(p-1)d = a \ldots (1)$

এবং $f+(q-1)d = b \cdots (2)$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $d(p-q) = a-b, \quad \therefore \quad d = \frac{a-b}{p-q}$.

আবার, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $a+b = 2f+(p+q-2)d$.

$\therefore \quad p+q$ পদের সমষ্টি $= \frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-1)d\}$

$$= \frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-2)d+d\} = \frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** অঙ্কে a ও b আছে বলিয়া প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর a ও b না ধরিয়া অন্য ধরিতে হইল।]

উদা. 11. a, b, c যথাক্রমে কোন সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

মনে কর, প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $f+(p-1)d = a \cdots (1)$, $f+(q-1)d = b \cdots (2)$, এবং $f+(r-1)d = c \ldots (3)$.

এক্ষণে, $(1)-(2)$ করিয়া পাই $(p-q)d = a-b \ldots (4)$

এবং $(2)-(3)$ " " $(q-r)d = b-c \ldots (5)$

$\therefore \quad (4) \div (5)$ করিয়া পাই $\frac{p-q}{q-r} = \frac{a-b}{b-c}$,

$\therefore \quad a(q-r) - b(q-r) = b(p-q) - c(p-q)$,

বা, $\quad a(q-r)+b(r-q)-b(p-q)+c(p-q)=0$,

বা, $\quad a(q-r)+b(r-q-p+q)+c(p-q)=0$.

$\therefore \quad a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদা. 7. যে সমান্তর প্রগতির n পদের সমষ্টি $5n^2+7n$, তাহার প্রথম দুইটি পদ নির্ণয় কর। [C. U. '41]

n-সংখ্যক পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করা হইল।

অতএব, $S_n=5n^2+7n$; এখন, $n=1$ ও 2 বসাইয়া পাই

$S_1=5.1^2+7.1=12$ (প্রথম একটি পদের সমষ্টি),

$S_2=5.2^2+7.2=34$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি),

$\therefore\ t_1=S_1=12$ (প্রথম একটি পদের যোগফল প্রথম পদই হয়।)

এবং $t_2=S_2-S_1=34-12=22$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়)।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পদ $=12$ ও 22.

উদা. 8. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম p পদের সমষ্টি q এবং প্রথম q পদের সমষ্টি p. উহার প্রথম $(p+q)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $\frac{p}{2}\{2a+(p-1)b\}=q\cdots(1)$

এবং $\frac{q}{2}\{2a+(q-1)b\}=p\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $2ap+p^2b-pb=2q\cdots(3)$

এবং (2) হইতে পাই $2aq+q^2b-qb=2p\cdots(4)$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$2a(p-q)+b(p^2-q^2)-b(p-q)=2(q-p)=-2(p-q)$.

$\therefore\ 2a+(p+q)b-b=-2$ [$p\neq q$ ধরিয়া, উভয়পক্ষকে $p-q$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $2a+(p+q-1)b=-2\cdots(5)$

এক্ষণে, $p+q$ পদের সমষ্টি $=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)b\}$ [সূত্র অনুসারে]

$=\frac{p+q}{2}\times(-2)$ [(5) হইতে] $=-(p+q)$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, যে-কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি ইহার প্রথম $3n$ পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ। (C. U 1876]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{2n+(n-1)b\}\ldots(1)$

$S_{2n}=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)b\}=n\{2a+(2n-1)b\}\cdots(2)$

এবং $S_{3n}=\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}\ldots(3)$

একণে, $2n$ সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $= S_{2n} - S_n$

$$= n\{2a+(2n-1)b\} - \tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$$
$$= \tfrac{n}{2}\{4a+4bn-2b-2a-bn+b\}$$
$$= \tfrac{n}{2}\{2a+3bn-b\} = \tfrac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$$

আবার $\frac{1}{3}\times S_{3n} = \frac{1}{3}\times\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\} = \frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}.$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, যে-কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি = প্রথম $3n$ সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

উদা. 10. কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ a এবং q-তম পদ b. প্রমাণ কর যে উহার প্রথম $p+q$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\dfrac{p+q}{2}\left(a+b-\dfrac{a-b}{p-q}\right)$ হইবে।

মনে কর, প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$.

$\therefore \quad f+(p-1)d = a \ldots(1)$

এবং $f+(q-1)d = b \cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $d(p-q) = a-b, \quad \therefore \quad d = \frac{a-b}{p-q}.$

আবার, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $a+b = 2f+(p+q-2)d.$

$\therefore \quad p+q$ পদের সমষ্টি $= \frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-1)d\}$

$$= \frac{p+q}{2}\{2f+(p+q-2)d+d\} = \frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

[দ্রষ্টব্য : অঙ্কে a ও b আছে বলিয়া প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর a ও b না ধরিয়া অন্য ধরিতে হইল।]

উদা. 11. a, b, c যথাক্রমে কোন সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$

মনে কর, প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $f+(p-1)d = a \cdots(1)$, $f+(q-1)d = b \cdots(2)$, এবং $f+(r-1)d = c \ldots(3)$.

একণে, (1) − (2) করিয়া পাই $(p-q)d = a-b \ldots(4)$

এবং (2) − (3) „ „ $(q-r)d = b-c \ldots(5)$

$\therefore \quad (4)\div(5)$ করিয়া পাই $\dfrac{p-q}{q-r} = \dfrac{a-b}{b-c},$

$\therefore \quad a(q-r) - b(q-r) = b(p-q) - c(p-q),$

বা, $a(q-r)+b(r-q)-b(p-q)+c(p-q)=0,$

বা, $a(q-r)+b(r-q-p+q)+c(p-q)=0.$

$\therefore \quad a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$

উদা. 12. যদি কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b ও c হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ হইবে। [C. U. '45 ; D. B. '43, '45 ; G. U. '49, '51]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\frac{p}{2}\{2f+(p-1)d\}=a\cdots(1)$,

$\frac{q}{2}\{2f+(q-1)d\}=b\cdots(2)$ এবং $\frac{r}{2}\{2f+(r-1)d\}=c\ldots(3)$.

(1)-এর উভয়পক্ষকে $\frac{p}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $2f+(p-1)d=\frac{2a}{p}\ldots(4)$

অনুরূপ (2) হইতে $2f+(q-1)d=\frac{2b}{q}\cdots(5)$

এবং (3) " $2f+(r-1)d=\frac{2c}{r}\ldots(6)$.

সুতরাং $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)$

$$=\{f+\tfrac{1}{2}(p-1)d\}(q-r)+\{f+\tfrac{1}{2}(q-1)d\}(r-p)$$
$$+\{f+\tfrac{1}{2}(r-1)d\}(p-q)$$
$$=f(q-r+r-p+p-q)+\frac{d}{2}\{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)$$
$$-(q-r+r-p+p-q)\}$$
$$=f.0+\frac{d}{2}(0-0)=0+0=0.$$

দ্রষ্টব্য। উদা. 11-এর প্রমাণ এই পদ্ধতিতেও করা যায় এবং বিপরীত ক্রমে উদা 12-এর প্রমাণ উদা 11-এর পদ্ধতিতে করা যায়।

উদা. 13. দুইটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত $n-1 : n+1$; উহাদের পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রগতিদ্বয়ের প্রথম পদ যথাক্রমে a ও f এবং সাধারণ অন্তর b ও d.

পঞ্চম পদদ্বয়ের অনুপাত অর্থাৎ $\dfrac{a+4b}{f+4d}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\dfrac{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}{\frac{n}{2}\{2f+(n-1)d\}}=\dfrac{n-1}{n+1}$,

বা, $\dfrac{2a+(n-1)b}{2f+(n-1)d}=\dfrac{n-1}{n+1}$; এক্ষণে $n=9$ বসাইলে পাই

$$\frac{2a+8b}{2f+8d}=\frac{9-1}{9+1},\ \text{বা},\ \frac{2(a+4b)}{2(f+4d)}=\frac{8}{10},\ \therefore\ \frac{a+4b}{f+4d}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=4 : 5$.

উদা. 14. তিনটি সমান্তর প্রগতির একই প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2 ও 3 ; যদি s_1, s_2, s_3 যথাক্রমে উহাদের n-সংখ্যক পদের সমষ্টি সূচিত করে, তবে দেখাও যে $s_1+s_3=2s_2$. [Cf. H. S. '62]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$.

$$\therefore\ s_1=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 1\}=\tfrac{n}{2}(2a+n-1),$$
$$s_2=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 2\}=\tfrac{n}{2}(2a+2n-2),$$
$$s_3=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 3\}=\tfrac{n}{2}(2a+3n-3),$$
$$\therefore\ s_1+s_3=\tfrac{n}{2}(2a+n-1)+\tfrac{n}{2}(2a+3n-3)$$
$$=\tfrac{n}{2}(4a+4n-4)=2.\tfrac{n}{2}(2a+2n-2)=2s_2.$$

উদা. 15. একটি কুজ বহুভুজের কোণগুলি একটি সমান্তর প্রগতি। ক্ষুদ্রতম কোণটি $88°$ ও সাধারণ অন্তর $10°$ হইলে উহার বাহুর সংখ্যা কত ?

মনে কর, বাহুসংখ্যা $=n$. এস্থলে প্রথম পদ $a=88°$, সাধারণ অন্তর $=10°$.

$\because$ কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+\,4$ সমকোণ

$=$ বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ,

$\therefore\ \tfrac{n}{2}\{2.88°+(n-1).10°\}+360°=2.n.90°.$

বা, $88n+5n^2-5n+360=180n.$

বা, $5n^2-97n+360=0$, বা, $5n^2-72n-25n+360=0$,

বা, $(n-5)(5n-72)=0$, $\therefore\ n=5$ বা, $\frac{72}{5}$.

$\because$ বাহুসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=5$.

প্রশ্নমালা 2 C

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $1+3+5+7+\cdots$ 10-সংখ্যক পদ পর্যন্ত। [C. U. '23]
2. $5+8+11+\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
3. $14+10+6+\cdots$ 12-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
4. $-14-11-8\cdots$. 20-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
5. $1+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$ 19-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
6. $1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
7. $12+12{\cdot}6+13{\cdot}2+\cdots$ 21-তম পদ পর্যন্ত।
8. $1+5+9+\cdots$ $(n-1)$-তম পর্যন্ত।
9. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots$ $(n+2)$-তম পদ পর্যন্ত।
10. $\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})+\cdots$ 19-তম পদ পর্যন্ত।

11. $2+5+8+\cdots+152$. [C. U. '48]

12. $9+7+5+\cdots+(-25)$.

সূত্র প্রয়োগ না করিয়া যোগফল নির্ণয় কর :—

13. $1+3+5+7+\cdots$ 30-তম পদ পর্যন্ত। [C. U. '16]

14. $4+7+10+\cdots$ 112-তম পদ পর্যন্ত। [D. B. '44]

15. $5+8+11+\cdots$ 51-তম পদ পর্যন্ত। [E. B. S. B. '51]

16. $3+7+11+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

17. $1+4+7+10+\cdots+37$. [C. U. '19]

18. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '10, '19 ; D. B. '28]

19. 320 ও 442-এর মধ্যবর্তী 7-এর গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

20. 100 ও 200-এর মধ্যবর্তী অযুগ্ম (বিজোড়) সংখ্যাগুলির সমষ্টি কত ?

21. 30টি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার শেষটি 127 ; উহাদের সমষ্টি কত ?

22. যে সমান্তর প্রগতির চতুর্থ ও পঞ্চদশতম পদ যথাক্রমে 13 ও 57 তাহার প্রথম 21টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

23. 10, 8, 6,$\cdots$এই প্রগতির দশম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া পরপর 16টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

24. কোন সমান্তর প্রগতির 21-তম পদটি 43 ; প্রথম 41টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

25. 2, 8, 14,$\cdots$প্রগতির কতগুলি পদের যোগফল 352 ? [C. U. '49]

26. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম দুইটি পদ $1\frac{1}{2}$ ও $2\frac{1}{3}$; উহার কতগুলি পদের সমষ্টি 171 হইবে ? [D. B. '40]

27. যোগফল নির্ণয় কর : $1+4+6+9+11+14+\cdots$21-তম পদ পর্যন্ত।

28. একটি সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফল n^2। প্রগতিটির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

29. এমন একটি সমান্তর প্রগতি নির্ণয় কর যাহার r পদের সমষ্টি $2r^2+3r$।

30. $21+19+17+\cdots$.সমান্তর প্রগতির কতিপয় পদের সমষ্টি 120 ; উহার শেষ পদ ও পদসংখ্যা নির্ণয় কর। [D. B. '47]

31. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $\frac{n(4n^2-1)}{3}$. উহার r-তম পদটি নির্ণয় কর।

32. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি 171 ও প্রথম 24টি পদের সমষ্টি 996 ; উহার 41টি পদের সমষ্টি কত ?

33. প্রমাণ কর যে 8, 16, 24,…প্রগতির যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টির সহিত এক যোগ করিলে একটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমান হইবে।

34. 39 ও 17823-এর মধ্যবর্তী অখণ্ড বর্গ সংখ্যাগুলির সমষ্টি কত ? [S. F. '60 (Addl.)]

35. সমান্তর প্রগতিভুক্ত পর পর তিনটি সংখ্যার যোগফল 36 এবং গুণফল 1140. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

36. এমন চারিটি সমান্তর সংখ্যা নির্ণয় কর যেন তাহাদের সমষ্টি 22 এবং প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির গুণফল 10 হয়।

37. a এবং c-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যকের যোগফল নির্ণয় কর।

38. প্রমাণ কর যে দুইটি রাশির মধ্যস্থ n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যকের সমষ্টি ঐ রাশিদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যকটির n গুণ।

39. একটি সমান্তর প্রগতির n-তম পদ $2n-1$. শ্রেণীটির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। [D. B. '46]

প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর :—

40. $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\cdots$ [W. B. S. F. '52]

41. $3.7+5.10+7.13+9.16+\cdots$ [D. B. '36]

42. $5^2+8^2+11^2+\cdots$

43. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots$

44. $2.3+3.4+4.5+\cdots$ [E. B. S. B. '49]

45. $1+3+6+10+15+\cdots$

46. $1+4+9+16+25+\cdots$

47. $2.3.4+3.4.5+4.5.6+\cdots$

48. $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

49. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots$

50. $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots$

51. (a) $1.7+3.9+5.11+\cdots$ [C. U. High '50]

(b) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$ r-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(c) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots(2n+1)$-তম পদ পর্যন্ত [H. S. '69]

(d) যোগফল নির্ণয় কর :—

$$n.1+(n-1).2+(n-2).3+(n-3)4+\cdots+1.n.$$ [C. U. 1889]

(e) যোগফল নির্ণয় কর : $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$. [H. S. '66]

52. যদি x, y, z সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে $y+z$, $z+x$ ও $x+y$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

53. $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$, $\frac{a+b}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

54. $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

55. চারিটি সমান্তরীয় সংখ্যার প্রান্তীয় সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং মধ্যক দুইটির গুণফল $29\frac{1}{4}$; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

56. a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,
$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$ [D. B. '35]

[সংকেত : $\because$ a, b, c সমান্তর প্রগতি, $\therefore$ $a+c=2b$]

57. কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম p, q ও r-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে x, y ও z হইলে প্রমাণ কর যে, $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0.$ [C. U.]

58. এক ব্যক্তি তাহার বন্ধুকে বিনা সুদে 1000 টাকা এই শর্তে ধার দিল যে মাসিক কিস্তিতে ঐ ধার শোধ করিতে হইবে এবং পর পর কিস্তির পরিমাণ 2 টাকা করিয়া কমিবে। যদি প্রথম কিস্তি 64 টাকা হয়, তবে কত মাসে ঐ ধার শোধ হইবে ? [C. U. '29]

59. একটি কুব্জ বহুভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। যদি ক্ষুদ্রতম কোণটি $120°$ ও সাধারণ অন্তর $5°$ হয়, তবে উহার পদ সংখ্যা কত ?

60. একটি ঋজু পথের উপর পর পর 5 গজ ব্যবধানে 100টি প্রস্তর রাখা আছে। এক ব্যক্তি প্রথম প্রস্তর হইতে 5 গজ দূরে রক্ষিত একটি ঝুড়ি হইতে চলিতে আরম্ভ করিয়া প্রতিবার একটি করিয়া প্রস্তর ঐ ঝুড়িতে আনিতে লাগিল। তাহাকে মোট কত গজ চলিতে হইবে ? [Pat. U. '19]

61. এক ব্যক্তিকে 162 কি.মি. ভ্রমণ করিতে হইবে। সে প্রথম দিন 30 কি.মি., দ্বিতীয় দিন 27 কি.মি., তৃতীয় দিন 24 কি.মি. এই ভাবে যাইতে লাগিল। সে কত দিনে ভ্রমণ শেষ করিবে ?

62. একটি গাছ প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসর অপেক্ষা এক ইঞ্চি কম বাড়ে। উহা যদি প্রথম বৎসর এক গজ বাড়ে, তবে কত বৎসরে উহার বৃদ্ধি শেষ হইবে এবং তখন উহার উচ্চতা কত হইবে ?

63. এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে তাহার 65 টাকা ঋণ শোধ করিবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা দিল এবং পর পর প্রত্যেক পরবর্তী মাসে কিস্তিগুলি এক টাকা করিয়া বাড়াইতে লাগিল। কত সময়ে ঐ ঋণ শোধ হইবে ?

[C. U. '30, '50]

64. কোন স্থান হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে যাইতে লাগিল এবং তাহার $4\frac{1}{2}$ ঘন্টা পরে B রওনা হইয়া একই দিকে প্রথম ঘণ্টায় 3 মাইল, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল, তৃতীয় ঘণ্টায় 4 মাইল এইভাবে যাইতে লাগিল। B কত ঘণ্টায় Aকে ধরিবে ? [H. S. 1965]

গুণোত্তর প্রগতি (Geometrical Progression)

§ 2·9. **গুণোত্তর প্রগতি** (G. P.) : কোন প্রগতির অন্তর্গত পদগুলি যদি এরূপ হয় যে উহাদের যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্বপদের অনুপাত সর্বদাই সমান হয়, তাহা হইলে এরূপ প্রগতিকে গুণোত্তর প্রগতি বলে। আর ঐ নিয়ত সমান অনুপাতটিকে ঐ প্রগতির **সাধারণ অনুপাত** (Common Ratio) বলে। যথা—

(1) 1, 3, 9, 27,⋯ ইহা গুণোত্তর প্রগতি ও ইহার সাধারণ অনুপাত 3.

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$. ইহা গুণোত্তর প্রগতি, ইহার সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ r দ্বারা সূচিত করা হয়। (2) প্রথমদিক হইতে পদগুলিকে পর পর ঐ সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে পর পর পদগুলি পাওয়া যায়। (3) সুতরাং শেষ দিক হইতে পদগুলিকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা পর পর ভাগ করিতে থাকিলে পরপর পরবর্তী পদগুলি পাওয়া যায়। (4) কোন গুণোত্তর প্রগতির পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হয়।]

§ 2·10. **সাধারণ অনুপাত নির্ণয়।** গুণোত্তর প্রগতির যে কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ব পদের দ্বারা ভাগ করিলে সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়।

সাধারণ পদ (General term)। কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে প্রগতিটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$

এক্ষণে প্রথম পদ $= t_1 = a$ অর্থাৎ ar^{1-1}

দ্বিতীয় পদ $= t_2 = ar$ অর্থাৎ ar^{2-1}

তৃতীয় পদ $= t_3 = ar^2$ অর্থাৎ ar^{3-1}, ইত্যাদি।

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক পদে r-এর ঘাত উহার পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। $\therefore$ প্রগতিটির n তম পদ বা $t_n = ar^{n-1}$.

যদি প্রগতিতে n-সংখ্যক পদ থাকে, তবে t_n হইবে শেষ পদ। শেষপদকে l দ্বারা লিখিলে পাই, $l = ar^{n-1}$.

দ্রষ্টব্য : (1) a, b, c যদি গুণোত্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ হয়, তবে $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, বা, $ac = b^2$ হইবে। বিপরীতক্রমে $ac = b^2$ হইবে, a, b, c কোন গুণোত্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদ।

(2) গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে, প্রগতির পদগুলি হইতেছে, $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}$. দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে a এবং r-এর মান বাহির করা সম্ভব এবং ইহা হইতে অন্য পদগুলি লিখা যাইবে।

(3) $l = ar^{n-1}$ হইতে পাই, $a = \frac{l}{r^{n-1}}, ar = \frac{l}{r^{n-2}}, \cdots, ar^{n-2} = \frac{l}{r}, l.$ বিপরীতক্রমে লিখিলে গুণোত্তর প্রগতির পদগুলিকে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়, $l, \frac{l}{r}, \frac{l}{r^2}, \cdots, \frac{l}{r^{n-2}}, \frac{l}{r^{n-1}}$.

(4) গুণোত্তর প্রগতির পদগুলিকে একই সংখ্যাদ্বারা গুণ করিলে বা ভাগ করিলে বা গুণোত্তর প্রগতির পদগুলির অন্যোন্যক লইলে, বা পদগুলিকে যে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে, প্রাপ্ত প্রগতিগুলিও গুণোত্তর প্রগতি হইবে। কারণ, যদি গুণোত্তর প্রগতিটি $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}$ হয়, তবে প্রতিটি পদকে x দ্বারা গুণ করিলে বা ভাগ করিলে বা প্রতিটি পদের অন্যোন্যক লইলে বা প্রতিটি পদকে m-ঘাতে উন্নীত করিলে নিম্নলিখিত প্রগতিগুলি পাওয়া যায়,

$$ax, arx, ar^2x, \cdots ar^{n-1}x ;$$

$$\frac{a}{x}, \frac{ar}{x}, \frac{ar^2}{x}, \cdots, \frac{ar^{n-1}}{x} ;$$

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \cdots, \frac{1}{ar^{n-1}} ;$$

$$a^m, a^m r^m, a^m r^{2m}, \ldots, a^m (r^m)^{n-1} \text{।}$$

স্পষ্টতঃ প্রতিটি প্রগতি গুণোত্তর এবং ইহাদের সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে, $r, r, \frac{1}{r}, r^m$.

উদাহরণমালা 2F

উদা. 1. 1, 2, 4, 8, ... প্রগতির ষষ্ঠ পদটি নির্ণয় কর।

এখানে ১ম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{2}{1} = 2$, এবং পদসংখ্যা $n = 6$.

$\because t_n = ar^{n-1}, \quad \therefore t_6 = 1.2^5 = 32.$

উদা. 2. $1, -3, 9, -27 \cdots$ প্রগতির n-তম পদটি নির্ণয় কর।

এখানে $a=1$, $r=\frac{-3}{1}=-3$.

$\therefore \; t_n = ar^{n-1} = 1.(-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$.

উদা. 3. $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$ প্রগতির n-তম পদটি নির্ণয় কর। [C. U.]

এখানে প্রথম পদ $a=\sqrt{3}$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \; t_n = ar^{n-1} = \sqrt{3}.(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}$.

উদা. 4. যে গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 2 এবং দশম পদ 1, তাহার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=2$ এবং $t_{10}=1$. মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\because \; t_n = ar^{n-1}$, $\therefore \; t_{10}=2r^9$, বা, $1=2r^9$,

বা, $r^9=\frac{1}{2}$, $\therefore \; r=\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$.

উদা. 5. কোন গুণোত্তর প্রগতির চতুর্থ পদ 2 এবং 11-তম পদ $\frac{1}{64}$, উহার নবম পদ কত ?

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $t_4=2$, অর্থাৎ $ar^3=2 \cdots (1)$

এবং $t_{11}=\frac{1}{64}$, অর্থাৎ $ar^{10}=\frac{1}{64} \cdots (2)$

এক্ষণে $(2)\div(1)$ করিয়া পাই $r^7=\frac{1}{128}=(\frac{1}{2})^7$, $\therefore \; r=\frac{1}{2}$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $a(\frac{1}{2})^3=2$, বা, $\frac{1}{8}a=2$, $\therefore \; a=16$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_9=ar^8=16\times\frac{1}{2^8}=2^4\times\frac{1}{2^8}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

উদা. 6. $9, 3, 1 \cdots$ প্রগতির কোন্ পদের মান $\frac{1}{243}$ হইবে ?

মনে কর, $\frac{1}{243}$ প্রদত্ত প্রগতির n-তম পদ। এস্থলে প্রথম পদ $a=9$, এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \; ar^{n-1}=\frac{1}{243}$, বা, $9.(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{243}$

বা, $3^2\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{243}$, বা, $\frac{1}{3^{n-3}}=\frac{1}{3^5}$ বা, $3^{n-3}=3^5$,

$\therefore \; n-3=5$, $\therefore \; n=8$. অতএব $\frac{1}{243}$ প্রদত্ত প্রগতিটির অষ্টম পদ।

উদা. 7. যদি কোন গুণোত্তর প্রগতিতে 6টি পদ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল, উহার তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফলের সমান।

মনে কর, প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$.

এখানে শেষ পদ $t_6 = ar^5$.

$\therefore$ প্রথম ও শেষ পদের গুণফল $= a \times ar^5 = a^2r^5$.

আবার তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফল $= ar^2 \times ar^3 = a^2r^5$.

$\therefore$ প্রথম পদ $\times$ শেষ পদ $=$ তৃতীয় পদ $\times$ চতুর্থ পদ।

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী যে-কোন দুই পদের গুণফল ধ্রুবক। [D. B. '31]

মনে কর, প্রথম পদ $= a$, শেষ পদ $= b$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$.

প্রথম ও শেষ দিক হইতে p-তম পদ লইয়া পরীক্ষা করা যাউক।

প্রথম দিক হইতে p-তম পদ $= ar^{p-1}$ এবং শেষ দিক হইতে ধরিয়া পূর্বের p-তম পদ $= \dfrac{b}{r^{p-1}}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $= ar^{p-1} \times \dfrac{b}{r^{p-1}} = ab =$ ধ্রুবক।

উদা. 9. কোন গুণোত্তর প্রগতির p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে c ও d হইলে প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [C. U. '34]

মনে কর, প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^{p-1} = c \ldots (1)$ এবং $ar^{q-1} = d \ldots (2)$

এক্ষণে, (1) ÷ (2) করিয়া পাই $\dfrac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}} = \dfrac{c}{d}$, বা, $r^{p-q} = \dfrac{c}{d}$ $\therefore r = \left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

এখন (1) হইতে পাই $a\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{p-1}{q-1}} = c$.

$$\therefore \quad a = c \times \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{p-1}{p-q}} = c^{\frac{1-q}{p-q}} . d^{\frac{p-1}{p-q}} = \left(c^{1-q} . d^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

উদা. 10. একটি গুণোত্তর প্রগতির $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n ; উহার p-তম ও q-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অনুপাত $= r$.

এক্ষণে $t_{p+q} = m$ অর্থাৎ $ar^{p+q-1} = m \quad .(1)$

এবং $t_{p-q} = n$ অর্থাৎ $ar^{p-q-1} = n \ldots (2)$

$\therefore$ (1) ÷ (2) করিয়া $r^{p+q-1-p+q+1} = \dfrac{m}{n}$, বা, $r^{2q} = \dfrac{m}{n}$, $\therefore r = \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $a\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p+q-1}=m$, বা, $a\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}=m$,

$\therefore\quad a=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}$

$\therefore$ নির্ণেয় $t_p=ar^{p-1}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}\times\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}^{p-1}$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$$

$$=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p+q-1+1-p}{2q}}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{q}{2q}}=m.\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}=m\times\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$$

$=m^{\frac{1}{2}}.n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}.$ অনুরূপে $t_q=a.r^{q-1}=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{q}{2q}}$

[দ্রষ্টব্য : $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{2q}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{-\left(\frac{1-p}{2q}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-p}{2q}}}=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$.

এইরূপে লেখা যায়। পরবর্তী অধ্যায়ে সূচকতত্ত্ব দেখ]

প্রশ্নমালা 2 D

1. 4, 8, 16,⋯ প্রগতিটির 6-তম পদটি নির্ণয় কর।

2. 1, −3, 9,⋯প্রগতিটির 9-তম পদটি নির্ণয় কর।

3. $\frac{5}{4}$, 1, $\frac{4}{5}$,⋯প্রগতিটির 7-তম পদটি নির্ণয় কর।

4. 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$,⋯প্রগতিটির n-তম পদটি নির্ণয় কর।

5. 16, 8, 4,⋯প্রগতিটির n-তম পদটি নির্ণয় কর।

6. 3, −9, 27,⋯প্রগতিটির p-তম পদটি নির্ণয় কর।

7. যে গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 9, এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{3}$, তাহার সপ্তম পদটি নির্ণয় কর।

8. একটি গুণোত্তর প্রগতির ষষ্ঠ পদ ও সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ ও 1. উহার 11-তম পদটি নির্ণয় কর।

9. একটি গুণোত্তর প্রগতিটির চতুর্থ এবং নবম পদদ্বয় যথাক্রমে 8 এবং 256, প্রগতিটি নির্ণয় কর।

10. একটি গুণোত্তর প্রগতির দশম পদ ও চতুর্দশ পদ দুইটি $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{33}$. উহার 17-তম পদটি নির্ণয় কর।

11. একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম দুইটি পদ 3 ও 1. উহার দশম পদটি নির্ণয় কর।

12. একটি গুণোত্তর প্রগতির পঞ্চম এবং দ্বাদশ পদ যথাক্রমে 48 ও 6144। প্রগতিটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

13. 128, 64, 32,....প্রগতিটির কোন্ পদ $\frac{1}{2}$?

14. 320 সংখ্যাটি কি 5, -10, 20···প্রগতিটির পদ ?

15. একটি গুণোত্তর প্রগতির r-তম পদটি 2^{r-1}. প্রগতিটির দশম ও n-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।

16. একটি গুণোত্তর প্রগতির p-তম ও q-তম পদ দুইটি যথাক্রমে a এবং b. প্রগতিটির n-তম পদটি নির্ণয় কর।

গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean)

§ **2·11.** (1) যদি তিনটি রাশি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তবে মধ্যম রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

(2) কতকগুলি রাশি গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করিলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের ততগুলি গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

উদাহরণমালা 2 G

উদা. 1. a এবং b-র গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর। [C. U. '48]

মনে কর, গুণোত্তরীয় মধ্যকটি m, সুতরাং a, m, b গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করিল। $\therefore \frac{m}{a}=\frac{b}{m}$ [$\because$ প্রত্যেকটি সাধারণ অনুপাতের সমান]

বা, $m^2=ab$. $\therefore m=\pm\sqrt{ab}$. (সাধারণতঃ ধনাত্মক বর্গমূলটি লওয়া হয়)।

[দ্রষ্টব্য ঃ এখানে দেখা গেল দুইটি রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক তাহাদের গুণফলের বর্গমূলের সমান। ইহা মনে রাখিবে।]

উদা. 2. a এবং b-এর মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

এখানে প্রথম পদ a, শেষ পদ b এবং উহাদের মধ্যস্থিত n-সংখ্যক মধ্যক লইয়া একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি হইবে এবং ঐ প্রগতিটির পদসংখ্যা হইবে $n+2$, উহার শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ b.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

$$\therefore\ b=ar^{n+1},\ \text{বা},\ r^{n+1}=\frac{b}{a},\qquad \therefore\ r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় মধ্যকগুলি}=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},\cdots,a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

উদা. 3. 2 এবং 162-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. '30, '49]

2 ও 162-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাইলে 5 পদযুক্ত একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি হইবে। তাহার প্রথম পদ 2, এবং পঞ্চম পদ 162.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore\ t_5=162,\ \therefore\ ar^4=162,$ বা, $2r^4=162,$

বা, $r^4=81=(\pm3)^4,\ \therefore\ r=\pm3.$

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=2\times3$ বা, $2\times-3=6$ বা, -6

দ্বিতীয় মধ্যক $=6\times3$ বা, $-6\times-3=18$ বা, 18

তৃতীয় মধ্যক $=18\times3$ বা, $18\times-3=54$ বা, -54

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক তিনটি $=6, 16, 54$; অথবা $-6, 18, -54$.

উদা. 4. $3\frac{5}{9}$ এবং $40\frac{1}{2}$ এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [D. B. '35]

এখানে প্রদত্ত পদদ্বয় মধ্যবর্তী 5টি মধ্যক সমেত একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করে। উহার প্রথম পদ $3\frac{5}{9}$, পদসংখ্যা $=5+2=7$.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

এখানে $t_7=40\frac{1}{2},\ a=3\frac{5}{9}=\frac{32}{9},\ \therefore\ ar^{7-1}=40\frac{1}{2},$

বা, $\frac{32}{9}\cdot r^6=\frac{81}{2}$, বা, $r^6=\frac{81\times9}{2\times32}=\frac{3^6}{2^6}=(\frac{3}{2})^6,\ \therefore\ r=\pm\frac{3}{2}.$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=5\frac{1}{3}, 8, 12, 18, 27$;

অথবা, $-5\frac{1}{3}, 8, -12, 18, -27.$

উদা. 5. দুইটি সংখ্যার মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9 ; ঐ সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [C. U. '26]

মনে কর, সংখ্যা দুইটি a ও b.

$\because$ a ও b-এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যকটি $=\frac{a+b}{2}$,

$\therefore$ এখানে $\frac{a+b}{2}=15$, বা, $a+b=30\ldots(1)$

আবার, $\because$ a ও b-এর মধ্যস্থিত গুণোত্তরীয় মধ্যকটি $=\pm\sqrt{ab}$

$\therefore$ এখানে $\sqrt{ab}=9,\ \therefore\ ab=81\cdots(2)$

এক্ষণে, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=40^2-4\times81=900-324=576,$

$\therefore\ a-b=\pm\sqrt{576}=\pm24\ldots(3)$;

এখন (1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই $a=27$ এবং $b=3$;

অথবা, $a=3, b=27$ [যদি $a-b=-24$ হয়].

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 27 ও 3 ; অথবা, 3 ও 27.

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, দুইটি বাস্তব ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

[C. U. '28, '39, '41. '44, '47, '48, G. U. '52]

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় a ও b. $\because$ a, b ধনাত্মক,

$\therefore$ উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক $=\frac{a+b}{2}$, এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\sqrt{ab}$

এক্ষণে, $\frac{a+b}{2}-(\sqrt{ab})=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$, এখানে a ও b ধনরাশি বলিয়া $\sqrt{a}$ ও $\sqrt{b}$ বাস্তব; সুতরাং $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ একটি পূর্ণবর্গ হওয়ায় একটি ধনরাশি। [পঞ্চম অধ্যায় দেখ]।

$\therefore$ $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, অর্থাৎ সমান্তরীয় মধ্যকটি $>$ গুণোত্তরীয় মধ্যক।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, a ও b-এর মধ্যবর্তী n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল উহাদের মধ্যবর্তী একটি মাত্র গুণোত্তরীয় মধ্যকের n-তম ঘাতের সমান।

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

a ও b-র মধ্যবর্তী মধ্যকটি $=\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ ঐ মধ্যকটির n-তম ঘাত $=\{(ab)^{\frac{1}{2}}\}^n=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এবং n-সংখ্যক মধ্যকগুলি $=ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots, \frac{b}{r^3}, \frac{b}{r^2}, \frac{b}{r}$.

মনে কর, উহাদের গুণফল $=p$. প্রমাণ করিতে হইবে $p=(ab)^{\frac{n}{2}}$

এক্ষণে, $p=ar\times ar^2\times ar^3\cdots\cdots\times\frac{b}{r^3}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r}$

এবং $p=\frac{b}{r}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r^3}\times\cdots\cdots\times ar^3\times ar^2\times ar$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore$ (গুণ করিয়া) $p^2=ab\times ab\times ab\times\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=(ab)^n, \quad \therefore \quad p=(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

[দ্রষ্টব্য : এই প্রণালীটি বুঝিয়া লও। এখানে a প্রথম পদ, b শেষ পদ এবং r সাধারণ অনুপাত বলিয়া প্রথম মধ্যক ar, দ্বিতীয় মধ্যক ar^2, তৃতীয় মধ্যক ar^3,...এইভাবে লেখা যায়। আবার শেষ দিক হইতে ধরিলে শেষ মধ্যক অর্থাৎ b-এর পূর্বপদ $=\frac{b}{r}$, তার আগের মধ্যক $\frac{b}{r^2}$, ...এইভাবে লেখা হইল। উপরের গুণটি লক্ষ্য কর—প্রথম পংক্তির ar-এর সহিত দ্বিতীয় পংক্তির $\frac{b}{r}$ গুণ করিয়া হয় ab, এইরূপে $ar^2\times\frac{b}{r^2}=ab$ ইত্যাদি হইল।]

উদা. 8. দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা p ও q-এর সমান্তরীয় মধ্যক A এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক G ; প্রমাণ কর যে, $A > G > \frac{G^2}{A}$. [G. U. '50]

এখানে $A = p$ ও q-এর সমান্তরীয় মধ্যক $= \frac{p+q}{2}$

এবং $G = p$ ও q-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক $= \sqrt{pq}$

$\therefore \frac{G^2}{A} = \frac{pq}{\frac{p+q}{2}} = \frac{2pq}{p+q} = k$ (মনে কর)।

এক্ষণে, $\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq} = \frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$, ইহা ধনাত্মক বলিয়া $\frac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$ অর্থাৎ $A > G$ (প্রমাণিত হইল)।

আবার, $A.k = \frac{p+q}{2} \times \frac{2pq}{p+q} = pq = G^2 = G.G.$ কিন্তু $A > G$ প্রমাণিত হইয়াছে, $\therefore$ $k < G$ অর্থাৎ $G > \frac{G^2}{A}$, $\therefore$ $A > G > \frac{G^2}{A}$.

উদা. 9. যদি a ও b-এর সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যকদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$a : b = (m + \sqrt{m^2 - n^2}) : (m - \sqrt{m^2 - n^2})$. [A. U. 1889]

a ও b-র সমান্তরীয় মধ্যক $= \frac{a+b}{2}$ এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক $= \sqrt{ab}$

$\therefore \frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = m : n$ (স্বীকার),

বা, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$, বা, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{m+n}{m-n}$, বা, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$ (বর্গমূল লইয়া)

বা, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$ (যোগ-ভাগ প্রণালী দ্বারা),

বা, $\frac{a}{b} = \frac{m+n+m-n+2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n+m-n-2\sqrt{m^2-n^2}}$ (বর্গ করিয়া পাই)

বা, $\frac{a}{b} = \frac{2(m+\sqrt{m^2-n^2})}{2(m-\sqrt{m^2-n^2})}$

$\therefore a : b = (m + \sqrt{m^2 - n^2}) : (m - \sqrt{m^2 - n^2})$.

উদা. 10. যদি p ও q দুইটি অসমান ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক A, গুণোত্তরীয় মধ্যক G এবং $H=\dfrac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ হয়, তবে দেখাও যে A>G>H. [E. B. S. B. '48]

এস্থলে $A=\frac{p+q}{2}$, $G=\sqrt{pq}$, এবং $H=\dfrac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}=\dfrac{2}{\frac{p+q}{pq}}=\frac{2pq}{p+q}$

[অবশিষ্ট অংশ উদা. 8-এর ন্যায় কর।]

প্রশ্নমালা 2 E

গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :—

1. 5 এবং 125. 2. $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{3}$. 3. -3 এবং -27.

4. -6 এবং $-2\frac{2}{3}$. 5. x^3y এবং xy^3 ; $3\sqrt{3}$ এবং $9\sqrt{3}$.

6. 4 এবং 324-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. 1890]

7. 5 এবং 135-এর মধ্যে 2টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. '16]

8. 25 এবং 164025-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [Par. U. '19]

9. $\frac{1}{9}$ ও 9-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [C.U. '14]

10. $\frac{81}{16}$ এবং $\frac{64}{729}$-এর মধ্যে 9টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

11. প্রমাণ কর যে, যে-কোন গুণোত্তরীয় প্রগতির $2n$-তম পদ উহার n-তম এবং $3n$-তম পদের মধ্যসমানুপাতী। [C. U. 1877]

12. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর প্রগতির যে-কোন একটি পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল ঐ পদটির বর্গের সমান। [C. U. '15]

[**সংকেত :** মনে কর, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং m-তম পদটি প্রদত্ত। এখানে m-তম পদ $=ar^{m-1}$, $\therefore$ উহার বর্গ $=(ar^{m-1})^2$. এক্ষণে m-তম পদের পূর্বের p-তম ও পরের p-তম পদের গুণফল $=(ar^{m-1})^2$ দেখাইতে হইবে। m-তম পদের পূর্বের p-তম পদ $=\dfrac{ar^{m-1}}{r^p}=ar^{m-1-p}$ এবং m-তম পদের পরবর্তী p-তম পদ $=ar^{m-1}\times r^p=ar^{m-1+p}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{m-1-p}\times ar^{m-1+p}=a^2r^{2m-2}=(ar^{m-1})^2$.]

13. যদি দুইটি রাশির সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G হয়, তবে দেখাও যে রাশি দুইটি $A\pm\sqrt{A^2-G^2}$.

14. যদি কোন গুণোত্তর প্রগতির পদসংখ্যা অযুগ্ম হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল উহার মধ্যপদের বর্গের সমান।

15. একটি গুণোত্তর প্রগতিতে যুগ্ম সংখ্যক পদ আছে। প্রমাণ কর যে, উহার মধ্যপদ দুইটির গুণফল উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফলের সমান।

[সংকেত : মনে কর পদ-সংখ্যা $=2n$. $\therefore$ n-তম এবং $(n+1)$-তম পদদ্বয় শ্রেণীটির দুইটি মধ্যপদ (middle terms) হইবে।]

16. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক 25 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 24 হইবে।

17. যদি দুইটি প্রদত্ত সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যকটি A এবং দুইটি গুণোত্তরীয় মধ্যক p ও q হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}=2A$.

18. দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যকটির 3 গুণ। প্রমাণ কর যে ঐ সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $3+2\sqrt{2} : 3-2\sqrt{2}$.

গুণোত্তর প্রগতির সমষ্টি নির্ণয়

§ 2·12. গুণোত্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি :

মনে কর, প্রগতিটির প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং সমষ্টি $=s$.

এখানে পদসংখ্যা $=n$, সুতরাং n-তম পদ $=ar^{n-1}$.

$$\text{অতএব } s=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}\cdots(1)$$

$$\text{এবং } (1)\times r \text{ করিয়া } sr= \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots(2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $s-sr=a-ar^n$,

বা, $s(1-r)=a(1-r^n)$, $\therefore$ $s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots(3)$

আবার, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $sr-s=ar^n-a$

$$\therefore \quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots(4)$$

দ্রষ্টব্য : (1) উপরে যোগফলের দুইটি সূত্র পাওয়া গেল। r-এর মান এক অপেক্ষা বেশী ও ধনরাশি হইলে দ্বিতীয় সূত্র, অন্যথা প্রথম সূত্র প্রয়োগ করিবে। শেষ পদ যদি l হয়, তবে $l=ar^{n-1}$; এখন সূত্র (4) হইতে পাই $s=\frac{ar^n-a}{r-1}=\frac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}=\frac{lr-a}{r-1}$, শেষ পদ জানা থাকিলে এই সূত্র প্রয়োগ করিবে। (2) প্রতি অঙ্কে প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n কত তাহা উদাহরণ 1-এর মত আগে লিখিবে

(3) সূত্রটি এইভাবে মনে রাখিবে

$$n\text{-সংখ্যক পদের যোগফল} = \frac{\text{সাধারণ অনুপাত} \times \text{শেষ পদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অনুপাত} - 1}$$

উদাহরণমালা 2H

উদা. 1. $1+2+4+\cdots$এর 20-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর। [C. U. '22]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$ এবং পদসংখ্যা $n=20$.

মনে কর, যোগফল s.

$$\therefore \quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1.$$

উদা. 2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর। [C. U. '12 ; '39 Sup.]

এস্থলে $a=1$, $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$, পদসংখ্যা $=n$; মনে কর সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(\frac{1}{3})^n\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 3. $1-3+9-27+\cdots 13$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $a=1$, $r=-3\div 1=-3$, $n=13$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-3)^{13}\}}{1-(-3)}=\frac{1+3^{13}}{4}=\frac{1}{4}(1+3^{13}).$$

উদা. 4. $1-2+4-8+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=-2$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{\{1-(-2)^n\}}{3}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$$

[দ্রষ্টব্য : উদা. 3-এ $(-3)^{13}$-এর ঘাত অযুগ্ম বলিয়া উহা ঋণরাশি, সুতরাং $-(-3)^{13}=$ধনরাশি হইয়াছে। আর উদা. 4-এ $(-2)^n$ ধনরাশি কি ঋণরাশি তাহা নির্ণয় করা যায় না ; কারণ, n যুগ্ম হইলে উহা ধনরাশি এবং n অযুগ্ম হইলে $(-2)^n$ ঋণরাশি হইবে।]

উদা. 5. যোগফল নির্ণয় কর : $3+6+12+\cdots+384$.

এখানে $a=3$, $r=6\div 3=2$ এবং শেষ পদ $l=384$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমষ্টি}=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{2\times 384-3}{2-1}=765.$$

উদা. 6. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+4+16+\cdots$এর 10টি পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

এস্থলে $a=1,\ r=4\div 1=4.$

এক্ষণে $t_1=1,\ t_2=4=1.4^1,\ t_3=16=1.4^2.$

অতএব স্পষ্টতঃ $t_{10}=1.4^9=4^9$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore \quad s=1+4+4^2+\cdots\cdots+4^9 \quad \cdots(1)$

$\therefore \quad 4s= \quad 4+4^2+\cdots\cdots+4^9+4^{10} \cdots(2)$

এখানে (2)−(1) করিয়া পাই $3s=4^{10}-1, \quad \therefore \quad s=\frac{1}{3}(4^{10}-1).$

উদা. 7. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$এর n-তম পদ পর্যন্ত যোগ কর। [C. U. '10, '18, '23, '38; D B. '34, '40]

এখানে $t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2^1},\ t_3=\frac{1}{2^2},\ \therefore$ স্পষ্টত $t_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore \quad s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdots(1)$

এবং $\frac{1}{2}s= \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\cdots(2)$

[(1)কে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

এক্ষণে, (1)−(2) করিয়া পাই $\frac{1}{2}s=1-\frac{1}{2^n}, \quad \therefore \quad s=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

উদা. 8. কোন গুণোত্তর প্রগতির চতুর্থ পদ $\frac{1}{27}$ ও সপ্তম পদ $\frac{1}{729}$; উহার প্রথম n পদের সমষ্টি কত?

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$,

$\therefore$ শর্তদ্বয় হইতে পাই $ar^3=\frac{1}{27}\cdots\cdots(1)$ এবং $ar^6=\frac{1}{729}\cdots(2)$

(2)÷(1) করিয়া পাই $ar^6\div ar^3=\frac{1}{729}\div\frac{1}{27}$, বা, $r^3=\frac{1}{27}=(\frac{1}{3})^3$,

$\therefore \quad r=\frac{1}{3}. \quad \therefore \quad$ (1) হইতে $a.(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}, \quad \therefore \quad a=1.$

$$\text{এক্ষণে } s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{(3^n-1)}{3^n}$$

$$=\frac{3^n-1}{2.3^{n-1}}.$$

উদা. 9. যে প্রগতির p-তম পদ 3^p+3p তাহার প্রথম 10টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $t_p=3^p+3p$, $\therefore$ $p=1, 2, 3, \cdots, 10$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$t_1=3^1+3.1$$
$$t_2=3^2+3.2$$
$$t_3=3^3+3.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{10}=3^{10}+3.10$$

$\therefore$ সমষ্টি $s=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})+3(1+2+3+\cdots+10)$

$$=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}+3\times\tfrac{10}{2}(10+1)=\tfrac{3}{2}(3^{10}-1)+165=\frac{3^{11}+327}{2}.$$

উদা. 10 যোগফল নির্ণয় কর: $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$. [C. U. '30]

প্রদত্ত শ্রেণীটি দুইটি গুণোত্তর প্রগতির যোগফল।

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore$ $s=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

$=(a+a^2+a^3+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)-(x+x^2+x^3+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)$

$$=\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{x(x^n-1)}{x-1}.$$

উদা. 11. $(1)+(3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9)+\cdots$ শ্রেণীটির 12-তম বন্ধনীর অন্তর্গত পদগুলির সমষ্টি কত ?

এখানে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে 1টি, দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে 2টি, তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে 3টি এইভাবে পদ আছে। অতএব, 12-তম বন্ধনীতে পদসংখ্যা $=12$.

আবার দ্বিতীয় বন্ধনীতে প্রথম পদ 3^1, তৃতীয় বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2}$, চতুর্থ বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2+3}$; সুতরাং 12-তম বন্ধনীতে প্রথম পদ $=3^{1+2+3+\cdots+11}=3^{66}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=3^{66}+3^{67}+3^{68}+\cdots$ 12-তম পদ পর্যন্ত $=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$=\frac{3^{66}(3^{12}-1)}{3-1}=\frac{3^{66}(3^{12}-1)}{2}.$$

উদা. 12. $1, 2, 4, \cdots$ প্রগতির প্রথম হইতে কয়টি পদের সমষ্টি 255 হয় ?

মনে কর, প্রগতিটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 255. এখানে প্রথম পদ $a=1$ সাধারণ অনুপাত $r=2\div1=2$, এবং সমষ্টি $s=255$.

$\because$ $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=s$, $\therefore$ $\dfrac{1(2^n-1)}{2-1}=255$, বা, $2^n-1=255$,

বা, $2^n=256=2^8$, $\therefore$ $n=8$, $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=8$.

উদা. 13. কোন মূলধন হইতে প্রতিবৎসর পূর্ব-বৎসরের দ্বিগুণ সুদ হয়। প্রথম বৎসরের সুদ 50 টাকা হইলে 10 বৎসরে উহার মোট কত সুদ হইবে?

এখানে 10 বৎসরের মোট সুদ

$= (50 + 100 + 200 + \cdots 10$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত) টাকা

$= \frac{50(2^{10}-1)}{2-1}$ টা. $= 50(2^{10}-1)$ টা. $= 51150$ টাকা।

প্রশ্নমালা 2F

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$ 8-তম পদ পর্যন্ত। [C. U. '29]
2. $128+64+32+\cdots\cdots$ 9-তম পদ পর্যন্ত।
3. $1+3+9+27+\cdots\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত। [C. U. '24. '47]
4. $1-3+9-27+\cdots\cdots$ $2n$-তম পদ পর্যন্ত।
5. $2+1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 8-তম পদ পর্যন্ত।
6. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।
7. $\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$ 18-তম পদ পর্যন্ত।
8. $1+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1}+\cdots\cdots$ দশম পদ পর্যন্ত।
9. $\dot{5}+\dot{0}5+\dot{0}05+\cdots$ $(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত।
10. $\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত [C. U. '11]
11. $3-6+12-\cdots\cdots-384$. 12. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{256}$.
13. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।
14. $\frac{a+b}{a-b}+1+\frac{a-b}{a+b}+\cdots$ r-তম পদ পর্যন্ত।
15. $\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}+\cdots$ 12-তম পদ পর্যন্ত।
16. $1-2+4-8+\cdots$ $2p$-তম পদ পর্যন্ত।
17. $12+24+48+\cdots+768$
18. $\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত।

কোন সূত্র-সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :—

19. $4+2+1+\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত।
20. $2+4+8+\cdots$ প্রথম n-সংখ্যক পদের।

21. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত। [C. U. '12]

22. $6+12+24+\cdots\cdots+768$.

23. যে শ্রেণীর n-তম পদ 2^n+2n, তাহার প্রথম 8টি পদের সমষ্টি কত ?

24. $128+64+32+\cdots\cdots$এই প্রগতির কয়টি পদের সমষ্টি $255\frac{3}{4}$?

25. $1-2+4-8+\cdots\cdots$প্রগতিটির কয়টি পদের সমষ্টি -85 হইবে ?

26. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$, এই প্রগতিটির কয়টি পদ যোগ করিলে $1\frac{121}{243}$ হয় ?

27. একটি প্রগতির r-তম পদ $r+(\frac{1}{2})^r$ হইলে উহার প্রথম 6টি পদের সমষ্টি কত ?

28. কোন গুণোত্তর প্রগতির দ্বিতীয় পদ -3 এবং পঞ্চম পদ 81 ; উহার প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত ?

29. একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে 2 ও $\frac{1}{2}$; উহার প্রথম 8টি পদের সমষ্টি কত ?

30. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টি 12, এবং উহার চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সমষ্টি 324 ; উহার প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [E. B. S. B. '49]

31. যে গুণোত্তর প্রগতির চতুর্থ ও সপ্তম পদ যথাক্রমে 20 ও 160 তাহার প্রথম 25টি পদের সমষ্টি কত ? [D. B. '45]

32. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম 6টি পদের সমষ্টি প্রথম 3টি পদের সমষ্টির 9 গুণ। যদি উহার সপ্তম পদটি 384 হয়, তবে প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত ?

33. একটি আম গাছে প্রত্যেক বৎসর পূর্ব বৎসরের দ্বিগুণ আম হয়। প্রথম বৎসরে উহাতে 100টি আম হইলে 8 বৎসরে কয়টি আম হইবে ?

34. 21কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে ও তাহাদের গুণফল 64 হয়। [G. U. '53]

35. এক ব্যক্তি বিনা সুদে 8190 টাকা ধার করিলেন এবং 12টি মাসিক কিস্তিতে ধার শোধ করিলেন। যদি প্রতিটি কিস্তির টাকা পূর্বোক্ত কিস্তির দ্বিগুণ হয়, তবে প্রথম কিস্তি ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B. U.]

36. কোন শহরের বর্তমান লোকসংখ্যা এক লক্ষ। যদি ঐ শহরের লোক সংখ্যা প্রতি বৎসরে 20% বৃদ্ধি পায় তবে 5 বৎসর পরে শহরটির লোকসংখ্যা কত হইবে ? কত বৎসর পর শহরের লোকসংখ্যা বর্তমান সংখ্যার তিন গুণেরও বেশী হইবে ?

প্রগতি সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. যদি a, b, c ও d গুণোত্তর প্রগতি হয়, তবে দেখাও যে a^2+b^2, b^2+c^2 এবং c^2+d^2 একটি গুণোত্তর প্রগতি। [C U.'19]

এস্থলে a, b, c, d একটি গুণোত্তর প্রগতি। মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$$\therefore \quad b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=a^2+a^2r^2=a^2(1+r^2),$$

$$b^2+c^2=a^2r^2+a^2r^4=a^2r^2(1+r^2).$$

$$c^2+d^2=a^2r^4+a^2r^6=a^2r^4(1+r^2).$$

এক্ষণে, $a^2(1+r^2),\ a^2r^2(1+r^2),\ a^2r^4(1+r^2)$ এই পদ তিনটি গুণোত্তর প্রগতি ; কারণ, ইহাদের সাধারণ অনুপাত $=r^2$.

$\therefore \quad a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ একটি গুণোত্তর প্রগতি।

উদা. 2. a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

মনে কর, a, b, c গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত r,

$$\therefore \quad b=ar,\ c=ar^2.$$

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর প্রগতি হইবে যদি প্রমাণ করা যায় যে

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2b}\times 2=\frac{1}{b}.$$

এক্ষণে, $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}$$

$$=\frac{r+1}{ar(1+r)}=\frac{1}{ar}=\frac{1}{b}.$$

অতএব, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর প্রগতি।

উদা. 3. a, b, c সমান্তর প্রগতি এবং a, b, d গুণোত্তর প্রগতি হইলে প্রমাণ কর যে, $a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর প্রগতি।

$\because \quad a, b, c,$ সমান্তর প্রগতি, $\therefore \quad a+c=2b$, বা, $a-2b=-c \ldots(1)$

আবার, $\because \quad a, b, d$ গুণোত্তর প্রগতি, $\therefore \quad b^2=ad \cdots(2)$.

$a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর প্রগতি বলা যাইবে, যদি প্রমাণ করা যায় যে $(a-b)^2=a(d-c)=ad-ac.$

এক্ষণে, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = b^2 + a(a-2b)$
$= ad + a \times -c = ad - ac$ [(1) ও (2) হইতে]

$\therefore$ $a, a-b, d-c$ গুণোত্তর প্রগতি হইল।

[দ্রষ্টব্য : উদা. 1 ও উদা. 2-এ প্রদর্শিত প্রণালীতেও এই অঙ্ক কষা যায়।]

উদা. 4. 6 ও 16-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন প্রথম তিনটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতিতে এবং শেষ তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে।

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় b ও c.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $6, b, c$ সমান্তর প্রগতি···(1)

এবং $b, c, 16$ গুণোত্তর প্রগতি···(2).

(1) হইতে পাই $2b = 6 + c$···(3), এবং (2) হইতে পাই $c^2 = 16b$···(4).

এখন (3) ও (4) হইতে পাই $c^2 = 8.2b = 8(6+c) = 48 + 8c$,

বা, $c^2 - 8c - 48 = 0$, বা, $(c-12)(c+4) = 0$, $\therefore$ $c = 12$ বা -4.

যদি $c = 12$ হয়, তবে (3) হইতে পাই $b = 9$.

যদি $c = -4$ হয়, " " " " $b = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $= 9$ ও 12, অথবা 1 ও -4.

উদা. 5. 5 ও 135-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন সংখ্যা চারিটি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে। [C. U. '16]

মনে কর, উৎপন্ন গুণোত্তর প্রগতিটির সাধারণ অনুপাত r; এখানে প্রথম পদ $= 5$.

$\therefore$ $135 = t_4 = 5r^3$, বা, $r^3 = 27 = (3)^3$. বা, $r = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $= 5 \times 3$ ও $5 \times 3^2 = 15$ ও 45.

উদা. 6. তিনটি গুণোত্তরীয় সংখ্যার সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং তাহাদের গুণফল 64, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [A. U. ; E. B. S. B. '50]

মনে কর, সংখ্যাত্রয় $= \frac{a}{r}, a, ar$;

$\therefore$ শর্তানুসারে $\frac{a}{r} \times a \times ar = 64$···(1) এবং $\frac{a}{r} + a + ar = 24\frac{4}{5}$···(2)

এখন, (1) হইতে পাই $a^3 = 64$, $\therefore$ $a = 4$.

(2) হইতে পাই $\frac{4}{r} + 4 + 4r = \frac{124}{5}$ $[\because a = 4]$,

বা, $\frac{4}{r} + 4r = \frac{124}{5} - 4 = \frac{104}{5}$, বা, $\frac{1}{r} + r = \frac{26}{5}$,

বা, $5r^2 - 26r + 5 = 0$, বা, $(r-5)(5r-1) = 0$, $\therefore$ $r = 5$ বা $\frac{1}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $= \frac{4}{5}, 4, 20$; অথবা, $20, 4, \frac{4}{5}$.

উদা. 7. a, b, c কোন গুণোত্তর প্রগতির p-তম, q-তম, ও r-তম পদ হইলে প্রমাণ কর যে $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1.$

[C. U. '51 ; G. U. '50 ; S. F. '53 ; H. S. '68 ; C. Pre-U. '63]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

$\therefore\ a=fd^{p-1}$, $b=fd^{q-1}$ এবং $c=fd^{r-1}$.

$\therefore\ a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(fd^{p-1})^{q-r}(fd^{q-1})^{r-p}.(fd^{r-1})^{p-q}$

$=f^{q-r}.d^{pq-q-pr+r}\times f^{r-p}.d^{qr-r-pq+p}\times f^{p-q}.d^{rp-p-qr+q}$

$=f^{q-r+r-p+p-q}\times d^{pq-q-pr+r+qr-r-pq+p+rp-p-rq+q}$

$=f^{0}\times d^{0}=1\times 1=1.$

উদা. 8. a, b, c এবং x, y, z যথাক্রমে সমান্তর ও গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1.$

[C. U. '44, '50 : G. U. '49]

$\because\ a, b, c$ সমান্তর প্রগতি, $\therefore\ 2b=a+c$, বা, $a-b=b-c$;

$\because\ x, y, z$ গুণোত্তর প্রগতি, $\therefore\ y^2=xz.$

এক্ষণে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=x^{a-b}.y^{c-a}.z^{a-b}$ $[\because b-c=a-b]$

$=(xz)^{a-b}.y^{c-a}=(y^2)^{a-b}y^{c-a}=y^{2a-2b+c-a}$

$=y^{a+c-2b}=y^{2b-2b}=y^{0}=1.$

উদা. 9. $4+44+444+\cdots\cdots$এর n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। [Pat. U. '18]

মনে কর, যোগফল $=s$.

$\therefore\ s=4+44+444+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=4(1+11+111+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}(9+99+999+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}$

$=\frac{4}{9}\{10+10^2+10^3+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)—($n$-সংখ্যক 1)$\}$

$$=\frac{4}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}.$$

উদা. 10. $\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdots$এর n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। [C. U.]

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$s=\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(1-\cdot 1)+(1-\cdot 01)+(1-\cdot 001)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(n$ সংখ্যক $1)-(\cdot 1+\cdot 01+\cdot 001+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\right)$

$=n-\dfrac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}=n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$

উদা. 11. $1+4+10+22+46+\cdots$ এর n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

মনে কর, সমষ্টি s এবং n-তম পদ $=t_n$.

$s=1+4+10+22+46+\cdots+t_n$

আবার $s=\quad 1+4+10+22+\cdots+t_{n-1}+t_n$ (একটি পদ সরাইয়া লিখিয়া)

(বিয়োগ) $0=(1+3+6+12+24+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+3+6+12+24+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=1+\{3+6+12+24+\cdots(n-1)$*সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=1+\dfrac{3(2^{n-1}-1)}{(2-1)}=1+3(2^{n-1}-1)=3.2^{n-1}-2.$

এখন $n=1, 2, 3,\cdots, n$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$t_1=3.1\ -2$

$t_2=3.2\ -2$

$t_3=3.2^2-2$

....

$t_n=3.2^{n-1}-2$

$\therefore\quad s=3(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n$

$=3(1+2+2^3+\ \ n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-2n=3\times\dfrac{1(2^n-1)}{2-1}-2n$

$=3.2^n-3-2n.$

উদা. 12, $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots$এর n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। [C. U.]

$s=1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots+t_n$

আবার, $\quad s=\quad 1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\cdots+t_{n-1}+t_n$

(বিয়োগ) $\quad 0=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=\dfrac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

এখন $n=1, 2, 3,\ldots, n$ পর্যন্ত লিখিয়া পাই।

$t_1=2(1-\frac{1}{2})$

$t_2=2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$

*এখানে 1ব্যতীত অন্য পদগুলি গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত বলিয়া প্রগতির পদসংখ্যা $n-1$ ধরা হইল।

$$t_3 = 2\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$$

....

$$t_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\therefore \quad s = 2\left\{n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

$$= 2\left\{n - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}\right\} = 2\left\{n - 1 + \frac{1}{2^n}\right\} = 2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

উদা. 13. মান নির্ণয় কর : $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots n$ তম পদ পর্যন্ত।

এখানে স্পষ্টতঃ $t_n = n.a^{n-1}$.

$\therefore \quad s = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots + n\,a^{n-1}.$

এবং $sa = \quad a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (n-1)a^{n-1} + n.a^n.$

[a দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore$ (বিয়োগ) $s(1-a) = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}) - na^n$

$$= \frac{1(1-a^n)}{1-a} - na^n. \qquad \therefore \quad s = \frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a}.$$

দ্রষ্টব্য : শ্রেণীটির প্রতিটি পদে দুইটি উৎপাদক আছে। পদগুলির প্রথম উৎপাদকসমূহ, যথা 1, 2, 3, 4,......একটি সমান্তর শ্রেণীতে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি, 1, a, a^2......একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে অবস্থিত। এইরূপে যদি কোন শ্রেণীর পদগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী এবং একটি গুণোত্তর শ্রেণীর অনুরূপ পদসমূহের গুণফল হয়, তবে শ্রেণীটিকে সমান্তর-গুণোত্তর শ্রেণী বলে arithmetico-geometric series)।

উদা. 14. মান নির্ণয় কর : $(1) + (1+3) + (1+3+3^2)$
$+ (1+3+3^2+3^3+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত। [C. U. '31]

এখানে n-তম পদ অর্থাৎ $t_n = (1+3+3^2+3^3+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$= \frac{1(3^n-1)}{3-1} = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2}.$$

এখন, $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$t_1 = \frac{1}{2}.3^1 - \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{1}{2}\,3^2 - \frac{1}{2}$

$s_3 = \frac{1}{2}.3^3 - \frac{1}{2}$

....

$t_n = \frac{1}{2}.3^n - \frac{1}{3}$

$$\therefore \quad s = \frac{1}{2}\left(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n\right) - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times \frac{3(3^n-1)}{3-1} - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{3}{4}\left(3^n - 1\right) - \frac{n}{2} = \frac{3^{n+1}}{4} - \frac{3}{4} - \frac{n}{2} = \frac{1}{4}\left(3^{n+1} - 3 - 2n\right).$$

উদা. 15. a, b, c একটি গুণোত্তর প্রগতি ; x ও y যথাক্রমে a ও b-এর এবং b ও c-এর সমান্তরীয় মধ্যক। প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2 \text{ এবং } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$$

$\because$ a, b, c গুণোত্তর প্রগতি, $\therefore$ $b=ar,\ c=ar^2$ [r = সাধারণ অনুপাত]

আবার, $\because$ x ও y যথাক্রমে a ও b-এর এবং b ও c-এর সমান্তরীয় মধ্যক,

$$\therefore\ x=\frac{a+b}{2} \text{ এবং } y=\frac{b+c}{2}.$$

এক্ষণে, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=\dfrac{a}{\frac{a+b}{2}}+\dfrac{c}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}\right)=2\left(\dfrac{a}{a+ar}+\dfrac{ar^2}{ar+ar^2}\right)$

$$=2\left(\frac{ar+ar^2}{ar+ar^2}\right)=2.$$

আবার, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}+\dfrac{1}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\right)$

$$=2\left(\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}\right)=2\left(\frac{r+1}{ar+ar^2}\right)$$

$$=2\times\frac{r+1}{ar(r+1)}=\frac{2}{ar}=\frac{2}{b}.$$

উদা. 16. যদি কোন গুণোত্তর প্রগতির n-পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং পদগুলির অন্যোন্যকগুলির সমষ্টি R হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{S}{R}\right)^n=P^2$.

মনে কর, গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$,

পদসংখ্যা $=n$ এবং শেষ পদ $=l$; সুতরাং $S=a+ar+\cdots+l=\dfrac{rl-a}{r-1}$.

$\because$ অন্যোন্যক পদগুলি $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{ar}, \dfrac{1}{ar^2}, \cdots \cdots, \dfrac{1}{l}$.

$$\therefore\ R=\frac{\frac{1}{r}\times\frac{1}{l}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{r}-1}=\frac{\frac{a-rl}{arl}}{\frac{1-r}{r}}=\frac{(a-rl)r}{(1-r)arl}=\frac{(rl-a)}{(r-1)al}$$

$$\therefore\ \left(\frac{S}{R}\right)^n=\left\{\frac{rl-a}{r-1}\times\frac{(r-1)al}{(rl-a)}\right\}^n=(al)^n.$$

এক্ষণে, $P=a\times ar\times ar^2\times\cdots\times\dfrac{l}{r^2}\times\dfrac{l}{r}\times l \cdots(1)$

আবার, $P = l\times\frac{l}{r}\times\frac{l}{r^2}\times\cdots\times ar^2\times ar\times a$ [উল্টাইয়া লিখিয়া]···(2)

∴ (1)×(2) করিয়া $P^2 = al\times al\times al\times\cdots$ n-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=(al)^n$

$\therefore\ \left(\frac{S}{R}\right)^n = P^2.$

উদা. 17. প্রমাণ কর যে, কোন গুণোত্তর প্রগতির p-তম, q-তম ও r-তম পদগুলিও গুণোত্তর প্রগতি গঠন করিবে যদি p, q, r সমান্তর প্রগতি হয়।

মনে কর, প্রগতিটির প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

∴ উহার p-তম পদ $=fd^{p-1}$, q-তম পদ $=fd^{q-1}$,

এবং r-তম পদ $=fd^{r-1}$.

এক্ষণে, fd^{p-1}, fd^{q-1}, এবং fd^{r-1} গুণোত্তর প্রগতি হইবে,

যদি $(fd^{q-1})^2 = fd^{p-1}\times fd^{r-1}$ হয়, অর্থাৎ যদি $f^2d^{2q-2} = f^2d^{p+r-2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $d^{2q-2} = d^{p+r-2}$ হয়, অর্থাৎ যদি $2q-2 = p+r-2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2q = p+r$ হয়, অর্থাৎ যদি p, q, r সমান্তর প্রগতি হয়।

প্রশ্নমালা 2G

1. x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right) = x^3+y^3+z^3.$$

2. a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) $a^2+b^2+c^2,\ ab+bc+cd,\ b^2+c^2+d^2$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(iii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2 = (a-d)^2$.

[C. U. '43 ; D. B '25, '26]

যোগফল নির্ণয় কর :—

3. $7+77+777+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

4. $2+22+222+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

5. $\cdot2+\cdot22+\cdot222+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

6. $1.2+2.3+4.4+8.5+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

7. $1+3+7+15+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত। [D. B. '25, '26, '38]

8. $1+4+13+40+121+\cdots$ n-সংখ্যক-পদ পর্যন্ত।

9. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a, n-তম পদ l এবং প্রথম n পদের গুণফল P ; প্রমাণ কর যে $P=(al)^{\frac{n}{2}}$ [C. U. '18 ; D. B. '43,47]

10. যে প্রগতির r-তম পদ 2^r+2r তাহার প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

11. কোন গুণোত্তর প্রগতির ক্রমিক তিনটি পদের মধ্যপদটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 15 ; ঐ প্রগতিটি নির্ণয় কর। [C. U. '32]

12. (i) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

(ii) $1+3.3^2+5.3^3+7.3^4+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

(iii) $a+(a+b)r+(a+2b)r^2+(a+3b)r^3+\cdots$. n-তম পদ পর্যন্ত।

13. সমান্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি পদের সমষ্টি 15 এবং উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 4 ও 19 যোগ করিলে যোগফলগুলি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [C. U. '50]

14. গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা হইতে অন্য একটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে বিয়োগ করায় অন্তরফলগুলিও একটি গুণোত্তর প্রগতি হইল। প্রমাণ কর যে ঐ প্রগতি তিনটির একই সাধারণ অনুপাত। [B.U. 1890]

15. কোন গুণোত্তর প্রগতির n, $2n$ ও $3n$ পদের সমষ্টি যথাক্রমে s_1, s_2, s_3 হইলে প্রমাণ কর যে $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$. [B. U. 1882]

16. যদি দুইটি প্রদত্ত রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যকটি G হয় এবং উহাদের মধ্যে M ও N দুইটি সমান্তরীয় মধ্যক হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$G^2=(2M-N)(2N-M).$$

[সংকেত : মনে কর, সংখ্যাদ্বয় a, b. $\therefore$ $G^2=ab$.

আবার, $\because$ a, M, N, b সমান্তর প্রগতি, $\therefore$ a, M, N এবং M, N, b দুইটি সমান্তর প্রগতি। $\therefore$ $2M=N+a$ এবং $2N=M+b\cdots$]

17. যদি p ও q-এর মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যকের দ্বিগুণ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{p}{q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ অথবা $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

[সংকেত : $\frac{p+q}{2}=\pm 2\sqrt{pq}$, বা, $\frac{(p+q)^2}{4}=4pq$, বা, $\frac{(p+q)^2}{4pq}=\frac{4}{1}\cdots(1)$

$\therefore$ $\frac{(p+q)^2-4pq}{4pq}=\frac{3}{1}$ (ভাগ ক্রিয়া), বা, $\frac{(p+q)^2}{4pq}=\frac{3}{1}\cdots(2)$

$(1)\div(2)$ করিয়া $\frac{(p+q)^2}{(p-q)^2}=\frac{4}{3}$, বা, $\frac{p+q}{p-q}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\frac{2p}{2q}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ (যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া)

(2)-কে $\frac{(q-p)^2}{4pq}=3$ এইরূপ লিখিলে অনুরূপে পাই $\frac{p}{q}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$]

18. গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার গুণফল 512 এবং প্রথমটির সহিত 8 ও দ্বিতীয়টির সহিত 6 যোগ করিলে যোগফল দুইটি ও তৃতীয় সংখ্যাটি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [C. U. High '50]

19. প্রমাণ কর যে কোন গুণোত্তর প্রগতির m-তম, n-তম ও p-তম পদগুলিও একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করিবে যদি m, n, p একটি সমান্তর প্রগতি হয়।

20. যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে ও ধনাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a+c>2b$. [C. U. '47 (Addl.)]

21. কোন গুণোত্তর প্রগতির ক্রমিক 3টি পদের সমষ্টি 7 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 21, তাহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি নির্ণয় কর। [S. F. '59]

22. যদি কোন গুণোত্তর প্রগতিতে a, b, c যথাক্রমে n-তম, $2n$-তম ও $3n$-তম পদ হয়, তবে দেখাও যে $b^2=ac$.

23. কোন গুণোত্তর প্রগতির পর পর 3টি পদের সমষ্টি 13 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 91; উহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি কত?

24. কোন সমান্তর প্রগতির ও গুণোত্তর প্রগতির উভয়েরই p-তম, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হইলে প্রমাণ কর যে $a^{b-c}.b^{c-a}c^{a-b}=1$.

বিপরীত প্রগতি (Harmonic Progression)

§ 2·13. **সংজ্ঞা:** যদি কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলি (reciprocals) সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ রাশিগুলি বিপরীত প্রগতিতে (in Harmonic progression) আছে বলা হয়।

যথা, $a, b, c, d, \cdots\cdots$ শ্রেণীটি বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী হয়।

Harmonic (বা Harmonical) Progression-কে সংক্ষেপে H.P. লেখা হয়, সুতরাং বিপরীত প্রগতিকে সংক্ষেপে বিঃ প্রঃ লেখা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত: মনে কর, a, b, c পদ তিনটি বিপরীত প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ।

অতএব, এখানে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ,

$\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\cdots$(A), বা, $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$, বা, $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}\cdots(1)$

আবার (A) হইতে পাই $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac}$

$\therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c}\cdots\ldots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে এই সংজ্ঞা করা যায় যে, তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, যদি প্রথম রাশি ও তৃতীয় রাশির অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের সহিত দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অন্তরের অনুপাতের সমান হয়।

[দ্রষ্টব্য : $a,\ a+b,\ a+2b,\ldots\ldots$ইত্যাদি যদি একটি সমান্তর প্রগতি হয়, তবে $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}\ldots\ldots$ইত্যাদি বিঃ প্রঃ হইবে।

আবার, $a,\ a+b,\ a+2b,\cdots$শ্রেণীর n-তম পদ $a+(n-1)b$.

অতএব, ঐ বিঃ প্রঃ-এর n-তম পদ$=\frac{1}{a\times(n-1)b}$]

বিপরীত প্রগতির মধ্যক

§ **2·14.** তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে মধ্যের রাশিটিকে অন্য দুইটির বিপরীত মধ্যক (Harmonic mean) বলে। যথা a, b ও c বিপরীত প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে a ও c-এর বিপরীত মধ্যক b হইবে।

দেখ, আমরা দেখিয়াছি যে a, b, c বিপরীত প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে $b=\frac{2ac}{a+c}$ হয়।

অতএব, এখানে দুইটি পদের সহিত তাহাদের মধ্যকটির সম্বন্ধ পাওয়া গেল।

[দ্রষ্টব্য : (1) বিপরীত প্রগতির কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত পদগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর প্রগতি হইয়া থাকে। অতএব, কোন বিঃ প্রগতির কোন একটি পদ (যথা, n-তম) নির্ণয়ের জন্য প্রথমে বিঃ প্রঃ শ্রেণীর পদগুলির অন্যোন্যকের n-তম পদ নির্ণয় করিয়া সেই পদটির অন্যোন্যকই হইবে বিঃ প্রগতির n-তম পদ।

(2) দুই পদের মধ্যে n-সংখ্যক বিপরাত মধ্যক নির্ণয়েরও এই প্রণালী। সংজ্ঞা ভিন্ন অন্য কিছু পাঠ্য নহে বলিয়া বিপরীত প্রগতি বিষয়ে আর কিছু আলোচনা করা হইল না।]

তৃতীয় অধ্যায়

সূচক প্রকরণ (Theory of Indices)

§ 3·1. **সূচক।** a^3, a^m প্রভৃতিতে a-এর ঘাত যাহা দ্বারা সূচিত হইয়াছে (এখানে 3, m প্রভৃতি) তাহাকে ঘাতের সূচক বলে।

a^3-এর অর্থ $a\times a\times a$ (তিনটি a-এর ক্রমিক গুণফল), a^m-এর অর্থ $a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ সংখ্যক a-এর ক্রমিক গুণফল।

সূচক সম্বন্ধীয় নিম্নের নিয়মগুলি ভালরূপে শিখিতে হইবে।

§ 3·2. **সূচকের মূল নিয়মাবলী** (Fundamental laws of indices) :

নিম্নলিখিত নিয়মগুলিকে সূচকের মূল নিয়ম বলা হয়। যদি m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তাহা হইলে

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$, যখন $m>n$, $a\neq 0$.

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$

(4) $(ab)^m=a^mb^m$.

প্রমাণ (1) $a^m=a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$\therefore\ a^m\times a^n=(a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times(a\times a\times a\times\cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$=a^{m+n}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই নিয়মানুসারে p অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}$ হইবে। উৎপাদকের সংখ্যা আরও থাকিলে এই নিয়মে কার্য হইবে।]

(2) $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$

$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m-n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$=a^{m-n}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে হরের সব a-গুলি লবের n-সংখ্যক a-এর সহিত কাটিয়া গিয়া উপরে এখনও $(m-n)$ সংখ্যক a বাকী থাকিল। মনে রাখিবে ভাগে সূচকগুলি বিয়োগ করিতে হয়। এখানে যদি m অপেক্ষা n বড় হইত, তবে $\dfrac{1}{a^{u-m}}$ উত্তর হইত।]

(3) n অখণ্ড ধনসংখ্যা. সুতরাং

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots n}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$.

অনুসিদ্ধান্ত : $(a^{mn})^p = a^{mpn}, (a^m)^{np} = a^{mnp}$.

(4) $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$) \times$

$(b \times b \times b \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$)$

$= a^m \times b^m = a^m b^m$.

অনুসিদ্ধান্ত : $(abc\cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m \cdots\cdots\cdots$

$(a^k b^k c^k \cdots)^m = a^{km} b^{km} c^{km} \cdots\cdots$

§ **3·3.** ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং ভগ্নাংশ ঘাতের সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হইল :

সংজ্ঞা :

(*i*) m যখন একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা (Positive integer), তখন

$a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots (m$ সংখ্যক a-এর গুণফল)

(*ii*) m যখন একটি অখণ্ড ঋণসংখ্যা (Negative integer) তখন a^m-এর অর্থ, $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.

এখন $-m$ একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা। সুতরাং a^{-m}-এর অর্থ (*i*) অনুযায়ী নির্ণীত হইবে। উদাহরণ স্বরূপ,

$$a^{-3} = \frac{1}{a^{-(-3)}} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a \times a \times a}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ ইত্যাদি।}$$

(*iii*) যখন $m = 0$, তখন $a^m = 1$ বলা হয় অর্থাৎ $a^0 = 1$.

$\therefore$ 0 সূচকবিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যার মান সংজ্ঞানুসারে 1 হইবে।

(*iv*) এবার মনে কর, m একটি ভগ্নাংশ। প্রথমে ধরা যাক, $m = \frac{1}{n}$. যেখানে n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা। এখন প্রমাণ করা যায়, যদি 'a' যে-কোন একটি ধনসংখ্যা হয়, তবে $x^n = a$ সমীকরণের একটি মাত্রই ধনাত্মক সমাধান আছে, অর্থাৎ যে-কোন ধনসংখ্যার একটি মাত্রই ধনাত্মক n মূল (n-th. root) থাকে। [উপরোক্ত উপপাদ্যের প্রমাণ জটিলতর, এবং আমাদের আলোচ্য বিষয় বহির্ভূত]। এই n-তম মূলকে $a^{\frac{1}{n}}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং $a^{\frac{1}{n}}$

হইতেছে a-এর ধনাত্মক n-তম মূল, অর্থাৎ $(a^{\frac{1}{n}})=6$ হইলে $6^n=a$ হয়। উদাহরণ স্বরূপ $25^{\frac{1}{2}}=5$, কারণ 25-এর ধনাত্মক মূল বা বর্গমূল হইতেছে 5। লক্ষ্য কর অপর বর্গমূল -5কে $25^{\frac{1}{2}}$ বলা হয় না।

$(64)^{\frac{1}{6}}=2$, কারণ $2^6=64$. 64-এর -2, ইত্যাদি আরো পাঁচটি ষষ্ঠ-মূল আছে, সেগুলিকে $(64)^{\frac{1}{6}}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় না।

এবার মনে কর $m=a^{\frac{p}{q}}$, যেখানে p এবং q দুইটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $q>0$। এখন $\frac{p}{q}$-এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হয়।

$$a^{\frac{p}{q}}=(a^p)^{\frac{1}{q}} \text{ অর্থাৎ } a^p\text{-এর } q\text{-তম ধনাত্মক মূল } a^{\frac{p}{q}}।$$

বা, $=(a^{\frac{1}{q}})^p$ (অর্থাৎ a-এর ধনাত্মক q-তম মূলের p-তম ঘাত)।

দ্রষ্টব্য : প্রমাণ করা যায় $(a^p)^{\frac{1}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^p$.

উদাহরণ স্বরূপ : $64^{\frac{2}{3}}=(64^2)^{\frac{1}{3}}=(4096)^{\frac{1}{3}}=(16^3)^{\frac{1}{3}}=16.$

অথবা, $(64)^{\frac{2}{3}}=(64^{\frac{1}{3}})^2=(4)^2=16.$

$$32^{-\frac{4}{5}}=(32^{-4})^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{32^4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\left(\frac{1}{1066576}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{16^5}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{16},$$

অথবা, $32^{-\frac{4}{5}}=(32^{\frac{1}{5}})^{-4}=(2)^{-4}$ [কারণ $32=2^5$]

$$=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

§ 3·4. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা না হইয়া যদি যে কোন দুইটি মূলদ সংখ্যা হয়, তাহা হইলেও § 3·2 অনুচ্ছেদের নিয়মগুলি সিদ্ধ হইবে। প্রথমে আমরা নিয়ম-(1)টিকে প্রমাণ করিব। অর্থাৎ প্রমাণ করিবে যে

যদি m এবং n যে কোন দুইটি মূলদ রাশি হয়, তবে
$a^m\times a^n=a^{m+n}$ হইবে।

প্রমাণ : প্রমাণটি নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হইবে।

(i) প্রথমে মনে কর, m ধনাত্মক এবং n ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

মনে কর, $k=-n$, $\therefore$ k ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইবে।

এখন $a^m\times a^n=a^m\times a^{-k}=\dfrac{a^m}{a^k}$

$=a^{m-k}$ যদি $m>k$ হয় $=a^{m+n}$

$= \frac{1}{a^{k-m}}$ যদি $m<k$ হয় $= a^{-k+m} = a^{m+n}$

$= 1$ (যদি $m=k$ হয়) $= a^0 = a^{m-k} = a^{m+n}$.

m ঋণাত্মক এবং n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, অনুরূপে সূত্রটির প্রমাণ দেওয়া যায়।

(ii) এখন মনে কর, m এবং n দুইটিই ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

মনে কর, $m=-l$, $n=-k$. (l ও k ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা),

সুতরাং $a^m \times a^n = a^{-l} \times a^{-k} = \frac{1}{a^l} \times \frac{1}{a^k}$ (সংজ্ঞানুসারে)

$= \left(\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots\cdots l\right.$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত) $\times (a \times a \times a \times \cdots k$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots\cdots (k+l)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= \left(\frac{1}{a}\right)^{l+k} = \frac{1}{a^{l+k}}$ [$\because$ l এবং k ধনাত্মক]

$= a^{-(l+k)}$ (সংজ্ঞানুসারে) $= a^{-l-k} = a^{m+n}$.

(iii) এইবার মনে কর, m এবং n দুইটি ভগ্নাংশ। মনে কর, $m=\frac{p}{d}$, $n=\frac{q}{d}$ (m এবং n-এর হর দুইটির ল.সা.গু.-কে d ধরিয়া, m এবং n-কে সমহরবিশিষ্ট করা যায়)।

এখন, $a^m \times a^n = a^{\frac{p}{d}} \times a^{\frac{q}{d}} = (a^{\frac{1}{d}})^p \times (a^{\frac{1}{d}})^q$ (সংজ্ঞানুসারে)

$= b^p \times b^q$, ($a^{\frac{1}{d}} = b$ ধরিয়া)

$= b^{p+q}$ [*(i)* এবং *(ii)* অনুযায়ী]

$= (a^{\frac{1}{d}})^{p+q} = a^{\frac{p+q}{d}}$ (সংজ্ঞানুসারে)

$= a^{\frac{p}{d}+\frac{q}{d}} = a^{m+n}$.

সুতরাং $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ইহা m ও n-এর সকল মূলদ মানের জন্যই সত্য বলিয়া প্রমাণিত হইল।

m এবং n যে কোন মূলদ রাশি হইলে, § 3·2 অনুচ্ছেদের অন্য নিয়মগুলিও সিদ্ধ হয়, অর্থাৎ

m এবং n যে কোন মূলদ সংখ্যা হইলে,

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m b^m$.

প্রমাণ: (2) $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n}$

$= a^{m-n}$, (1) অনুযায়ী

(3) প্রথমে মনে কর n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ। মনে কর $n = \frac{p}{q}$, যেখানে p এবং q অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $q \neq 0$। এখন m-এর যে কোন মানের জন্য $(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \left\{(a^m)^p\right\}^{\frac{1}{q}}$, সংজ্ঞানুসারে

$$= \left\{a^{mp}\right\}^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m \cdot \frac{p}{q}} = a^{mn}.$$

এইবার মনে কর n একটি ঋণাত্মক সংখ্যা (অখণ্ড বা ভগ্নাংশ)

মনে কর $n = -k$. $\therefore$ $k = -n$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা। এখন

$(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}.$

(4) প্রথমে মনে কর, m একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ। মনে কর $m = \frac{p}{q}$. যেখানে p এবং q হইতেছে অখণ্ড ধনসংখ্যা $q \neq 0$। এখন

$$(ab)^m = (ab)^{\frac{p}{q}} = \left\{(ab)^p\right\}^{\frac{1}{q}} = (a^p b^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (a^{mq} b^{mq})^{\frac{1}{q}} \quad (\because \quad p = mq)$$

$$= \left\{(a^m b^m)^q\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{a^m b^m\right\}^{\frac{q}{q}} = a^m b^m.$$

এইবার মনে কর m একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা। মনে কর $m = -k$.

$\therefore$ $k = -m$ একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা।

এখন $(ab)^m = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k}$

$$= \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^m \cdot b^m.$$

দ্রষ্টব্য: (1) m এবং n অমূলদ (irrational) রাশি হইলেও উপরোক্ত নিয়মগুলি সিদ্ধ হয়।

(2) লক্ষ্য কর উপরোক্ত নিয়মগুলি $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এই নিয়মের সাহায্যে প্রমাণ করা হইয়াছে। এইজন্য অনেকে কেবলমাত্র এই নিয়মটিকে সূচকের মূল সূত্র (fundamental law of indices) বলেন।

উদাহরণঃ প্রমাণ কর $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(a.\frac{1}{b}\right)^m=a^m\left(\frac{1}{b}\right)^m=a^m(b^{-1})^m$$

$$=a^m.b^{(-1)m}=a^mb^{-m}=a^m.\frac{1}{b^m}=\frac{a^m}{b^m}.$$

§ 3·5. **সূচকের আর একটি প্রয়োজনীয় নিয়ম।**

যদি $a^m=a^n$ এবং $a\neq1$ হয়,

তবে $m=n$ হইবে।

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. গুণফল নির্ণয় কর : $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a$.

নির্ণেয় গুণফল $=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1}=a^{\frac{7}{4}}$.

উদা. 2. মান নির্ণয় কর : $\left(a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{6}}\right)\div a^{\frac{2}{3}}$.

প্রদত্ত রাশি $=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^0=1$.

উদা. 3. সরল কর : $\left(x^2y\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(x^{-4}y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^{2\times\frac{1}{4}}.y^{1\times\frac{1}{4}}\right).\left(x^{3\times\frac{1}{2}}.x^{-4\times\frac{1}{2}}\right).y^{-1\times\frac{1}{2}}$

$$=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{3}{2}}x^{-2}.y^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}.y^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=x^0y^{-\frac{1}{4}}$$

$$=1\times y^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{y}}.$$

উদা. 4. সরল কর : $4a^{-\frac{3}{4}}\div3b^{-\frac{2}{3}}$.

প্রদত্ত রাশি $=4a^{-\frac{3}{4}}\div3b^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{4a^{-\frac{3}{4}}}{3b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{4\times\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}}{3\times\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}}=\frac{4}{3}\times\dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{4\sqrt[3]{b^2}}{3\sqrt[4]{a^3}}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে লবের 4-এর ঘাত-সূচক 1, $-\frac{3}{4}$ নহে ; যদি $(4a)^{-\frac{3}{9}}$ থাকিত, তবে 4-এর ঘাত-সূচকও $-\frac{3}{4}$ হইত। হরে 3-এর ঘাতসূচকও 1.]

উদা. 5. গুণফল নির্ণয় কর :

$$\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right) \text{ এবং } \left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right).$$

গুণফল $=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2=x^{2^{n-1}\times2^1}-y^{2^{n-1}\times2^1}$

$$=x^{2^{n-1+1}}-y^{2^{n-1+1}}=x^{2^n}-y^{2^n}.$$

[দ্রষ্টব্য : $2n$ এবং 2^n এক নহে। $2n$ এর অর্থ n-এর সহিত 2-এর গুণফল এবং 2^n-এর অর্থ 2-এর n ঘাত। $2^{n-1}\times 2=2^{n-1+1}=2^n$, সুতরাং $x^{2^{n-1}}$ কে বর্গ করিলে x^{2^n} হয়।]

উদা. 6. $x^{2^n}-y^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর। [C. U.]

$$\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}=\frac{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}$$

$$=\frac{\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}=x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}.$$

উদা. 7. সরল কর : $\left(\frac{a^l}{b^m}\right)^n\times\left(\frac{b^n}{c^l}\right)^m\times\left(\frac{c^m}{a^n}\right)^l\cdot$ [C. U. '31]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^{nl}}{b^{mn}}\times\frac{b^{mn}}{c^{ml}}\times\frac{c^{ml}}{a^{nl}}=1.$

উদা. 8. সরল কর : $(x^a)^{b-c}(x^b)^{c-a}(x^c)^{a-b}.$ [C. U. '33]

প্রদত্ত রাশি $=x^{ab-ac}.x^{bc-ab}.x^{ac-bc}$

$=x^{ab-ac+bc-ab+ac-bc}=x^0=1.$

উদা. 9. সরল কর : $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\cdot\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\cdot\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}.$

[C. U. '16, '21, '24 ; D. B. '25, '30 ; G. U. '48, '50]

প্রদত্ত রাশি $=(x^{l-m})^{(l+m)}.(x^{m-n})^{(m+n)}.(x^{n-l})^{(n+l)}$

$=x^{l^2-m^2}.x^{m^2-n^2}.x^{n^2-l^2}=x^{l^2-m^2+m^2-n^2+n^2-l^2}=x^0=1.$

উদা. 10. সরল কর :

$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}.$ [C. U.]

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(x^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(x^{c-a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$=x^{a^3-b^3}.x^{b^3-c^3}.x^{c^3-a^3}=x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$=x^0=1.$

উদা. 11. সরল কর : $\dfrac{(bc)^{b-c}(ca)^{c-a}(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b})^{-1}}$. [D. B. '45]

প্রদত্ত রাশি $= b^{b-c}.c^{b-c}.c^{c-a}.a^{c-a}.a^{a-b}.b^{a-b}\times a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}$

$= a^{a-b+b-c+c-a}.b^{b-c+a-b+c-a}.c^{b-c+c-a+a-b}$

$= a^0.b^0.c^0 = 1\times 1\times 1 = 1.$

[দ্রষ্টব্য : $\because$ $\dfrac{1}{a^{-2}} = a^2$ হয়, $\therefore$ এখানে সমগ্র হরের ঘাত ঋণাত্মক অর্থাৎ -1 বলিয়া, তাহাকে লব করিয়া লিখিলে ঘাত ধনাত্মক হইবে।]

উদা. 12. সরল কর : $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}}$.

[C. U. '41 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '49 ; H. S. '62 (C)]

$$\text{প্রদত্তরাশি} = \frac{\left(x^b\right)^{\frac{1}{bc}}}{\left(x^c\right)^{\frac{1}{bc}}}\times\frac{\left(x^c\right)^{\frac{1}{ca}}}{\left(x^a\right)^{\frac{1}{ca}}}\times\frac{\left(x^a\right)^{\frac{1}{ab}}}{\left(x^b\right)^{\frac{1}{ab}}}$$

$$= \frac{(x)^{b\cdot\frac{1}{bc}}}{(x)^{c\cdot\frac{1}{bc}}}\times\frac{(x)^{c\cdot\frac{1}{ca}}}{(x)^{a\cdot\frac{1}{ca}}}\times\frac{(x)^{a\cdot\frac{1}{ab}}}{(x)^{b\cdot\frac{1}{ab}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{b}}}\times\frac{x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{c}}}\times\frac{x^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{1}{a}}} = 1.$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে উদা. 9 ও 10 এর প্রণালী হইতে ভিন্ন প্রণালীতে করা হইল।]

উদা. 13.. সরল কর : $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. [C. U. '24]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a-b^2)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b} = \frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b}$$

$$= \frac{a}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b} = \frac{a-a^{\frac{1}{2}}b}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b)}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{b}.$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে $a-b^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2-(b)^2 = (a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)$ হইল]

উদা. 14. সরল কর : $\left\{\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^4}}\times\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12}\times x^{22}$. [M. U. 1894]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}\times\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}^{12}\times x^{22}=\frac{x^{\frac{2}{3}\times 12}\,.\,y^{\frac{3}{2}\times 12}}{y^{\frac{4}{3}\times 12}\,.\,x^{\frac{5}{2}\times 12}}\times x^{22}$

$$=\frac{x^8y^{18}\times x^{22}}{y^{16}x^{30}}=\frac{x^{30}y^{18}}{y^{16}x^{30}}=\frac{y^{18}}{y^{16}}=y^{18-16}=y^2.$$

উদা. 15. সরল কর : $\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^8\sqrt{a^{-8}}}}$.

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^8\times a^{-4}}}=\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^4}}=\sqrt[5]{a^8.a^2}$

$$=\sqrt[5]{a^{10}}=a^{\frac{10}{5}}=a^2.$$

উদা. 16. সরল কর : $\left\{\frac{4^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2.2^m}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$ [H. S. '64 (C) & C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{(2^2)^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2^{m+1}}}{2.2^{-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{\frac{2^{2m+\frac{1}{2}}.\,2^{\frac{m+1}{2}}}{2^{1-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$

$$=\left\{\frac{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{2-m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}-\frac{2-m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$=\left\{2^{\frac{4m+1+m+1-2+m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{2^{3m}\right\}^{\frac{1}{m}}=2^3=8.$$

উদা. 17. সরল কর : $\frac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.6^n}{15^m.10^{n+2}.6^m}$. [P. U. 1918]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.2^n.3^n}{3^m.5^m.2^{n+2}.5^{n+2}.2^m.3^m}=\frac{2^{m+n+1}.3^{2m}.5^{m+n}}{3^{2m}.2^{m+n+2}.5^{m+n+2}}$

$$=2^{m+n+1-m-n-2}.5^{m+n-m-n-2}.=2^{-1}.5^{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5^2}=\frac{1}{50}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** $6^m=(2\times 3)^m=2^m.3^m$ এইভাবে লেখা যায়।]

উদা. 18. সরল কর : $\frac{3^p4^q6^r}{2^{r+q}12^{r+p}}$. [C. U. 1935]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{3^p.(2^2)^q.2^r.3^r}{2^{r+q}(2^2.3)^{r+p}}=\frac{3^{p+r}.2^{2q+r}}{2^{r+q}.2^{2r+2p}.3^{r+p}}$

$$=\frac{3^{p+r}.2^{2q+r}}{2^{3r+2p+q}.3^{r+p}}=2^{2q+r-3r-2p-q}=2^{q-2r-2p}.$$

উদা. 19. সরল কর : $\dfrac{2^a.(2^{a-1})^a}{2^{a+1}.2^{a-1}} \left\{\dfrac{8^{\frac{a}{3}}}{4}\right\}^{-a}$. [E.B.S.B. 1951]

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{2^a.2^{a^2-a}}{2^{a+1+a-1}}\left\{\dfrac{(2^3)^{\frac{a}{3}}}{2^2}\right\}^{-a} = \dfrac{2^{a+a^2-a}}{2^{2a}}\left\{\dfrac{2^a}{2^2}\right\}^{-a}$

$= \dfrac{2^{a^2}}{2^{2a}}(2^{a-2})^{-a} = 2^{a^2-2a}.2^{-a^2+2a} = 2^{a^2-2a-a^2+2a} = 2^0 = 1.$

উদা. 20. সরল কর : $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\ \sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\ \sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$. [C.U.1938]

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\left(x^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{1}{bc}}}{\left(x^{\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}}} \times \dfrac{\left(x^{\frac{c}{a}}\right)^{\frac{1}{ca}}}{\left(x^{\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}}} \times \dfrac{\left(x^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{1}{ab}}}{\left(x^{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}}}$

$= \dfrac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}} \times \dfrac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}} \times \dfrac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}} = 1.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে উদা. 9 ও 10 এর প্রণালী অপেক্ষা সহজ প্রণালীতে সমাধান দেখান হইল।]

উদা. 21. সরল কর : $\dfrac{a^2}{(1-a)^n} + \dfrac{2}{(1-a)^{n-1}} - \dfrac{1}{(1-a)^{n-2}}$.

[এখানে হরে $(1-a)$-এর বিভিন্ন ঘাত আছে, তন্মধ্যে n বৃহত্তম ঘাত, সুতরাং হরগুলির ল. সা. গু. $(1-a)^n$ হইবে।

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a^2+2(1-a)-(1-a)^2}{(1-a)^n} = \dfrac{a^2+2-2a-1+2a-a^2}{(1-a)^n}$

$= \dfrac{1}{(1-a)^n}$.

[দ্রষ্টব্য : ভাগে ঘাতসূচকগুলির বিয়োগ হয়, $\therefore (1-a)^n$কে $(1-a)^{n-1}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $(1-a)^{n-n+1} = (1-a)^1 = 1-a$ হয়।]

উদা. 22. সরল কর :— $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$ [B. U. 1891]

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^q\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$$

$$=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{p+q-p}}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{q+p-q}}=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^p}$$

$$=\frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^p\left(\frac{pq-1}{q}\right)^q}{\left(\frac{pq-1}{p}\right)^q\left(\frac{pq+1}{p}\right)^p}=\frac{\frac{(pq+1)^p}{q^p}\times\frac{(pq-1)^q}{q^q}}{\frac{(pq-1)^q}{p^q}\times\frac{(pq+1)^p}{p^p}}$$

$$=\frac{(pq+1)^p(pq-1)^q}{q^{p+q}}\times\frac{p^{p+q}}{(pq-1)^q(pq+1)^p}$$

$$=\frac{p^{p+q}}{q^{p+q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}.$$

উদা. 23. সরল কর :

$$\frac{1}{1+x^{q-r}+x^{q-p}}+\frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}}+\frac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}}.$$

[P. U. 1903]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{x^{-q}}{x^{-q}(1+x^{q-r}+x^{q-p})}+\frac{x^{-r}}{x^{-r}(1+x^{r-p}+x^{r-q})}$$
$$+\frac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-q}+x^{p-r})}$$

$$=\frac{x^{-q}}{x^{-q}+x^{-r}+x^{-p}}+\frac{x^{-r}}{x^{-r}+x^{-p}+x^{-q}}+\frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$$

$$=\frac{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}=1.$$

উদা. 24. $x^y=y^x$ হইলে দেখাও যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$ এবং যদি $x=2y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $y=2$. [C.U. '28, '49 ; A.U. '16 ; D.B. '50]

$\because\ x^y=y^x$, $\therefore\ x^{\frac{y}{y}}=y^{\frac{x}{y}}$, বা, $x=y^{\frac{x}{y}}$.

এক্ষণে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y}-1}$.

আবার, $\because$ $x=2y$, এবং $x^y=y^x$ (প্রদত্ত শর্ত)

$\therefore$ $x^y=y^x$, বা, $x=y^{\frac{x}{y}}=y^2$

আবার, $x=2y$, $\therefore$ $y^2=2y$, $\therefore$ $y=2$.

উদা. 25. যদি $m=a^x$, $n=a^y$ এবং $a^2=(m^y n^x)^z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$. [H. S. '63 ; B. U. 1890]

এখানে $a^2=(m^y n^x)^z=m^{yz}n^{xz}=(a^x)^{yz}.(a^y)^{xz}$

[m ও n-এর মান বসাইয়া]

$=a^{xyz}.a^{xyz}=a^{2xyz}$, $\therefore$ $2xyz=2$, $\therefore$ $xyz=1$.

উদা. 26. $a^x=b$, $b^y=c$, $c^z=a$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $xyz=1$. [C. U. 1906]

এখানে $a=c^z=(b^y)^z=b^{yz}=(a^x)^{yz}=a^{xyz}$,

বা, $a^1=a^{xyz}$, $\therefore$ $xyz=1$.

উদা. 27. $a^x=b^y$ এবং $b^x=a^y$, হইলে, প্রমাণ কর যে, $a=b$.

$\because$ $a^x=b^y \cdots\cdots(1)$ এবং $b^x=a^y \cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)×(2) করিয়া পাই $(ab)^x=(ab)^y$ $\therefore$ $x=y$

$\therefore$ $a=b^{\frac{y}{x}}=b^1=b$.

উদা. 28. $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে $a+b+c=0$. [H. S. '64]

$x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}=k$ (মনে কর)

$\therefore$ $\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a=k^a$, বা, $x=k^a$. অনুরূপে $y=k^b$ এবং $z=k^c$.

আবার, $\because$ $xyz=1$, $\therefore$ $k^a.k^b.k^c.=1$, বা, $k^{a+b+c}=1=k^0$,

$\therefore$ $a+b+c=0$.

উদা. 29. $a=x^{q+r}y^p$, $b={}^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$ হইলে, দেখাও যে, $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [C. U. '51]

$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(x^{q+r}y^p)^{q-r}.(x^{r+p}y^q)^{r-p}.(x^{p+q}y^r)^{p-q}$

$=x^{q^2-r^2}.y^{pq-pr}.x^{r^2-p^2}.y^{qr-pq}.x^{p^2-q^2}.y^{rp-rq}$

$=x^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.y^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

$=x^0.y^0=1\times1=1$.

উদা. 30. $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $3x^3+9x=8$. [Pat.'30]

এখানে $x^3=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$$=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)$$

বা, $x^3=3-3^{-1}-3.3^0(x)$ $\left[\because\ 3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}=x\right]$

বা, $x^3=3-\frac{1}{3}-3x$, বা, $x^3=\frac{8}{3}-3x$, বা, $3x^3=8-9x$,

$\therefore\ 3x^3+9x=8.$

উদা. 31. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$x^3-6x^2+6x-2=0.$ [C. U. '30, '36, '42, '50 ; D. B. '42]

$\because\ x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}},$

$\therefore\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}},\ \therefore\ (x-2)^3=\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3-6x^2+12x-8$

$$=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2^2+2+3.2(x-2)\ \left[\because\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right]$$

বা, $x^3-6x^2+12x-8=6+6x-12$

বা, $x^3-6x^2+12x-8-6-6x+12=0$

$\therefore\ x^3-6x^2+6x-2=0.$

উদা. 32. $a^{m^n}=(a^m)^n$, হইলে m-কে n-এর ঘাতরূপে প্রকাশ কর।

[Pat, '18]

$\because\ a^{m^n}=(a^m)^n,\ \therefore\ a^{m^n}=a^{mn}.\ \therefore\ m^n=mn,$

বা, $\frac{m^n}{m}=n,$ বা, $m^{n-1}=n,$ $\therefore\ m=n^{\frac{1}{n-1}}.$

উদা. 33. $p^x=q^y=r^z$ এবং $q^2=pr$, হইলে দেখাও যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}.$

[এখানে প্রথমে p ও r-কে q-এর ঘাতরূপে প্রকাশ কর।]

$\because\ p^x=q^y,\ \therefore\ p=q^{\frac{y}{x}}$ এবং $\because\ r^z=q^y,\ r=q^{\frac{y}{z}}.$

আবার, $\because\ q^2=pr,\quad \therefore\ q^2=q^{\frac{y}{x}}.q^{\frac{y}{z}}=q^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

$\therefore\ \frac{y}{x}+\frac{y}{z}=2,\quad \therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ [y দ্বারা ভাগ করিয়া]

উদা. 34. প্রমাণ কর যে, $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots$

$$\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}.$$ [C. U. 1945]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$=\frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

এইরূপে শেষ পর্যন্ত গুণ করিয়া পাই,

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$=\frac{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2}{x-y}=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}.$$

প্রশ্নমালা 3

মান নির্ণয় কর :—

1. $27^{\frac{2}{3}}$. 2. $9^{-\frac{3}{2}}$ 3. $(\frac{1}{81})^{-\frac{5}{4}}$ 4. $\sqrt[5]{32^4}$ [P. U. '30]

5. $243^{-\frac{2}{5}}$ 6. $\sqrt[4]{(625)^3}$.

সরল কর :—

7. $x^{-\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{4}}$. 8. $\left\{\left(x^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

9. $8a^{-\frac{3}{4}}\div 6b^{-\frac{2}{3}}\times\frac{1}{2}ab$. 10. $x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{2}}\div x^{\frac{7}{12}}$

11. $\left(a^2b^2\right)^{-\frac{1}{6}}\times\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}\div\left(b^3\right)^{\frac{1}{9}}$ 12. $\dfrac{\frac{1}{4^{-3}}-\frac{2}{10^{-2}}}{\frac{1}{2^{-2}}+\frac{1}{4^{-1}}}$

13. $\sqrt[4]{a^2b^3c^4} \div \sqrt[3]{a^4b^6} \times \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\right)^{-4}$.

14. $\sqrt{a^{-5}b^6} \times \sqrt[4]{a^2b^{-8}}$. 15. $\sqrt[3x]{a^4} \div \sqrt[5x]{a^{-4}}$.

16. $\sqrt[4]{a^2.\sqrt[3]{a^{-2}}}$. 17. $\left(\frac{x^{-3}y^4}{x^2y^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(\frac{x^2y^3}{x^{-3}y^4}\right)^2$

17. (a). $\left\{\sqrt[3]{4} \times \frac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$, [Pat. '23]

18. (i) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1$কে $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}-1$ দ্বারা গুণ কর। [C. U. '33]
এবং $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$কে $x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ কর।
[Pat. '29]

(ii) ভাগ কর : $a^2+6ac^{\frac{1}{3}}-4b+9c^{\frac{2}{3}}$কে $a-2b^{\frac{1}{2}}+3c^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

19. (x^n-y^{-n}) এবং (x^n+y^{-n})-এর গুণফল নির্ণয় কর।

20. $a^{-m}+b^n$কে $a^{-2m}-a^{-m}b^n+b^{2n}$ দ্বারা গুণ কর।

21. $x^{3^n}-y^{3^n}$কে $x^{3^{n-1}}-y^{3^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর।

22. $a-b$ দুই বর্গ রাশির বা ত্রিঘাত রাশির অন্তর হইলে প্রতিক্ষেত্রে উহার উৎপাদক নির্ণয় কর।

23. উৎপাদক নির্ণয় কর : $x^{2m}-y^{2n}$.

সরল কর :

24. $\frac{x^{a+b}.x^{a-b}.x^{c-2a}}{x^{c-a}}$. [C. U. 1870]

25. $(a+b)^m \times (a-b)^m \times (a^2+b^2)^m$. [M U. 1889]

26. $\left(a^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \times \frac{\sqrt{a^{2n}}}{a}$.

27. $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^b\}^c$. [M. U.]

28. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \div \left(\frac{x^a}{x^{a-b}}\right)^{\frac{a}{b}}$ [M. U. 1890]

29. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} \div \left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ [C. U. 1902]

30. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$ [Pat. '28

31. $\left\{\dfrac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\sqrt{3.3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$. [C. U. '25 ; W. B. S. F, '58]

32. $\left(\dfrac{x^{m^2+l^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\dfrac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}$.

32. (a) $\sqrt[ln]{\dfrac{x^l}{x^n}} \times \sqrt[mn]{\dfrac{x^n}{x^m}} \times \sqrt[lm]{\dfrac{x^m}{x^l}}$.

33. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

34. $\dfrac{(p+\frac{1}{q})^m(p-\frac{1}{q})^n}{(q+\frac{1}{p})^m(q-\frac{1}{p})^n}$. [B. U.]

35. $\sqrt[a-c]{x^{\frac{1}{a-b}}} \times \sqrt[b-a]{x^{\frac{1}{b-c}}} \times \sqrt[c-a]{x^{\frac{1}{c-a}}}$.

36. $\dfrac{2^{m+9}.3^{2m-n}.5^{m+n+2}.6^n}{6^m.10^{n+2}.15^m}$. [G. U. '51]

37. $\dfrac{2^n.6^{m+1}.10^{m-n}.15^{m+n-}}{4^m.3^{2m+n}.25^{m-1}}$. [P. U. '20]

38. $\dfrac{e^{2x}+e^{-x}-e^x-1}{e^{2x}-e^{-x}+e^x-1}$.

39. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\dfrac{1}{1+x^{n-p}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}$.

[C, U. '37, '42 ; G. U. '49 ; E. B. S. B, '51]

40. $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^a)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[a]{b^n}(\sqrt[m]{b})^r\right\}^{ma}} \div \left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^a\right\}^r$. 41. $\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

[D. B. '23, '50]

41. (a). $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}$. [W. B. S. F. '53]

42. $\dfrac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left\{\dfrac{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)}\right\}^2$ [C. U.]

43. $x^2=y^3$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}$.

44. $a^x=x^y$ এবং $a^z=z^x$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^2=yz$.

45. $\left(x^{n^2}\right)^n=\left(x^{2^n}\right)^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt[n+1]{n^3}=2$.

46. $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ হইলে দেখাও যে, $2x^3-6x=5$.

47. $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-3x^2-6x-4=0$.

48. $y=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $y^3+3y=x-\frac{1}{x}$.

49. $x=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে $x^3-6x=6$. [A, U. '12]

50. $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$, $c=xy^{r-1}$ হইলে দেখাও যে,
$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [Pat. U. 1918]

51. $x^{p^q}=\left(x^{\sqrt{p}}\right)^q$ হইলে pকে q দ্বারা প্রকাশ কর।

চতুর্থ অধ্যায়

করণী (Surds)

§ 41. করণী :

যে সকল সংখ্যাকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যা p এবং q ($q \neq 0$) এর অনুপাত $\frac{p}{q}$ রূপে প্রকাশ করা যায়, সেই সকল সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা (rational number) বলে। যেমন, 5, $-\frac{37}{35}$, 1·37, $-$·038 ইত্যাদি।

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না তাহাদিগকে অমূলদ সংখ্যা (irrational number) বলে। যেমন, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $3^{\frac{1}{4}}$, $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{5+\sqrt{7}}$, π, e, $\frac{1}{e}$ প্রভৃতি।

অমূলদ সংখ্যাগুলির মধ্যে কতকগুলি সংখ্যা মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ। যেমন $\sqrt{3}$ হইতেছে $x^2-3=0$ সমীকরণের বীজ; $1+\sqrt{2}$ হইতেছে $x^2-2x-1=0$ সমীকরণের বীজ; $\sqrt{5+\sqrt{7}}$ হইতেছে $x^4-10x^2-18=0$ সমীকরণের বীজ। লক্ষ্য কর উপরোক্ত সমীকরণগুলি মূলদ সহগযুক্ত। কিন্তু প্রমাণ করা যায় যে π, e প্রভৃতি সংখ্যাগুলি কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ নহে। যে-কোন মূলদ বা অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা (Real number) বলে।

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগবিশিষ্ট সমীকরণের বীজ সেগুলিকে বৈজিক সংখ্যা বলা হয় (algebraic number); যেমন 2, 1·3, $\sqrt{2}$ $3^{\frac{1}{3}}$, $2+\sqrt{3}$ ইত্যাদি।

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ নহে, সেগুলিকে বলা হয় তুরীয় সংখ্যা (Transcendental number); যেমন, e, π, $\pi-2$ ইত্যাদি।

সংজ্ঞা : অমূলদ বৈজিক সংখ্যাকে **করণী** (Surds) বলে। অর্থাৎ করণী হইতেছে কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের অমূলদ বীজ।

উদাহরণ : $\sqrt{2}$ একটি করণী ; কারণ, $\sqrt{2}$ হইতেছে মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণ $x^2-2=0$-এর বীজ।

$3^{\frac{1}{3}}$ একটি করণী, কারণ $3^{\frac{1}{3}}$ হইতেছে $x^3-3=0$ সমীকরণের বীজ। $3+\sqrt{2}$ একটি করণী, কারণ $3+\sqrt{2}$ হইতেছে মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণ $x^2-6x+7=0$ এর বীজ।

π, e ইত্যাদি সংখ্যা করণী নহে।

$\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ করণী নহে। কারণ, $\sqrt{4}=2$.

$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt{(\frac{2}{3})^4}=\frac{2}{3}$, সুতরাং উহারা মূলদ সংখ্যা, কিন্তু করণী অমূলদ সংখ্যা।

উপরোক্ত উদাহরণগুলি হইতে লক্ষ্য কর, করণী হইতেছে কোন মূলদ সংখ্যার কোন মূল যাহা সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না বা এইরূপ কোন সংখ্যা ও মূলদ সংখ্যার যোগ।

যেহেতু অমূলদ সংখ্যা অমেয় (incommensurable) রাশি এবং করণী হইতেছে অমূলদ সংখ্যা ; সুতরাং সকল করণীই অমেয়।

§ 4·2. **শুদ্ধ ও মিশ্র করণী :** যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে না তাহাকে শুদ্ধ করণী (pure surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ইত্যাদি।

আর যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে, তাহাকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। যথা, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}$ ইত্যাদি।

§ 4·3. **সরল ও যৌগিক করণী :** একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে **সরল করণী** (simple surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}$ ইত্যাদি। আর একাধিক করণী যদি '+' বা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে সেই রাশিকে **যৌগিক করণী** (compound surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}+3\sqrt{5}$, $\sqrt{15}-\sqrt{3}$ ইত্যাদি।

দুইটি শুদ্ধ করণীর বা একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার বৈজিক সমষ্টিকে **দ্বিপদ করণী** (Binomial surd) বলে। যথা, $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $3+2\sqrt{2}$, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ ইত্যাদি।

অনুরূপে, $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $3+\sqrt{7}-\sqrt{2}$ প্রভৃতিকে **ত্রিপদ করণী** (Trinomial surd) বলে।

§ 4·4. দ্বিপদবিশিষ্ট দুইটি করণীতে যদি পদ দুইটি একই হয় এবং উহাদের মধ্যবর্তী সংযোগ চিহ্নটি যদি পরস্পর বিপরীত (অর্থাৎ একটিতে '+' ও অন্যটিতে '−') হয়, তবে একটি করণীকে অন্য করণীটির **অনুবন্ধী করণী** (conjugate surd) বা **পূরক করণী** (complementary surd) বলে। যথা, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ও $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ও $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

§ 4·5. **করণীর ক্রম (Order) :** করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম প্রকাশিত হয়। যথা, $\sqrt{3}$ ও $2^{\frac{1}{2}}$ দ্বিতীয় ক্রমের (second order) করণী বা দ্বিঘাত (quadratic) করণী। ঐরূপ $\sqrt[3]{4}$ ও $5^{\frac{2}{3}}$ তৃতীয় (tbird) ক্রমের বা ত্রিঘাত (cubic) করণী। $\sqrt[n]{a}$ হইল n-তম ক্রমের করণী ইত্যাদি।

§ 4·6. **সমমূলীয় করণী :** কতকগুলি করণী একই ক্রমের হইলে তাহাদিগকে সমমূলীয় (equiradical) করণী বলা হয়।

$\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, প্রভৃতি চিহ্নগুলিকে মূলচিহ্ন বা radical sign বলে।

বিভিন্ন ক্রমের করণীকে সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt[3]{x^2}$ ও $\sqrt[4]{x^3}$কে সমমূলীয় করণীতে পরিণত কর।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলি 3 ও 4. উহাদের ল. সা. গু. = 12.

$\therefore\ \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2\times4}{3\times4}} = x^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{x^8}$

এবং $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3\times3}{4\times3}} = x^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{x^9}$.

$\therefore$ নির্ণেয় করণীগুলি হইল $\sqrt[12]{x^8}$ ও $\sqrt[12]{x^9}$.

§ 4·7. **করণীর তুলনা :** বিভিন্ন ক্রমের করণীর মধ্যে পরস্পর তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় করিতে হইলে করণীগুলিকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিতে হয়।

উদা. 1. $\sqrt{5}$ ও $\sqrt[3]{9}$ ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ?

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

এবং $\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{81}$

$\because\ 125 > 81,\ \therefore\ \sqrt[6]{125}$ অর্থাৎ $\sqrt{5}$ বৃহত্তর।

উদা. 2. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[4]{8}$কে মানের ক্রম অনুসারে লিখ।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলির, অর্থাৎ 3, 2, 4এর ল. সা. গু. = 12.

এক্ষণে, $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$

$\therefore$ মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হইবে $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$.

§ 4·8. **করণীর সরলতম আকার :** কোন কোন করণীকে একটি মূলদ রাশি ও একটি শুদ্ধ করণীর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। এইরূপে পরিবর্তিত আকারকে করণীটির সরলতম আকার (simplest form) বলে।

আবার, কোন মূলদরাশি ও একটি করণীর গুণফলকে একটি পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt{128}$ ও $\sqrt[3]{192}$কে সরলতম আকারে পরিণত কর।

$\sqrt{128} = \sqrt{64\times2} = \sqrt{8^2\times2} = (8^2\times2)^{\frac{1}{2}} = (8^2)^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}$

$= 8\times2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}$;

$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64\times3} = \sqrt[3]{4^3\times3} = 4\sqrt[3]{3}$.

উদা. 2. $3\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt[3]{3}$কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=9^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=(18)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{18}$;

$2\sqrt[3]{3}=2^3\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\times 3}=\sqrt[3]{24}$.

§ 4·9. **সদৃশ ও অসদৃশ করণী :** যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে, অথবা যে করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদকবিশিষ্ট করণী রূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাদিগকে সদৃশ (similar or ilke) করণী বলে।

যে করণীগুলি এরূপ নহে, তাহাদিগকে অসদৃশ (dissimilar or unlike) করণী বলে। যথা—

(i) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ ইহারা সদৃশ করণী ; কারণ, এখানে প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক $\sqrt{3}$.

(ii) $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{27}$ ইহারাও সদৃশ করণী ;
কারণ, $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$, এবং $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$.

(iii) $\sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ ইহারা অসদৃশ করণী ;
কারণ, $\sqrt{20}=\sqrt{4.5}=2\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{75}=\sqrt{25.3}=5\sqrt{3}$.

§ 4·10. **করণীর যোগ ও বিয়োগ :** কতকগুলি করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে সেইগুলিকে সরলতম আকারে পরিণত করিবে। যদি ঐগুলি **সদৃশ করণী** হয়, তবে উহাদের মূলদ উৎপাদকগুলির যোগফলের সহিত ঐ অমূলদ উৎপাদকটি গুণ করিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়। আর যদি ঐ করণীগুলি **অসদৃশ** হয়, তবে উহাদের যোগফল একটি পদ হইবে না, ঐগুলি '+' চিহ্ন দিয়া লিখিবে মাত্র। বিয়োগের নিয়মও এই।

উদা. 1. $4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$, ও $6\sqrt{2}$-এর সমষ্টি কত ?
নির্ণেয় সমষ্টি $=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=(4+3+6)\sqrt{2}=13\sqrt{2}$.

উদা. 2. $7\sqrt{2}$ ও $\sqrt{32}$-এর অন্তর কত ?
$7\sqrt{2}-\sqrt{32}=7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(7-4)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

উদা. 3. $\sqrt{12}, -4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$-এর সমষ্টি কত ?
নির্ণেয় সমষ্টি $=\sqrt{12}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}$
$=(2-4+6)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

উদা. 4. $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ এবং $4\sqrt{3}$-এর যোগফল নির্ণয় কর।
নির্ণেয় যোগফল $=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

উদা. 5. $2+\sqrt{3}$ এবং $2-\sqrt{3}$-এর যোগফল নির্ণয় কর।
নির্ণেয় যোগফল $=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$.

[**দ্রষ্টব্য :** করণীর যোগ বা অন্তরফল সর্বদা করণী নাও হইতে পারে।]

§ 4.11. **করণীর গুণন :** (i) করণীগুলি **সমমূলীয়** হইলে, উহাদের মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলির পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিতে হয়।

(ii) করণীগুলি **বিভিন্নক্রমের** হইলে, উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের ন্যায় গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. (a) $3\sqrt{2}\times4\sqrt{5}=12\sqrt{10}$; (b) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3$.

উদা. 2. $4\sqrt{3}\times5\sqrt{6}=20\sqrt{18}=20\sqrt{9\times2}=20\times3\sqrt{2}=60\sqrt{2}$

উদা. 3. $2\sqrt{5}\times\sqrt{32}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{5}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$
$=24\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=48\sqrt{5}$.

উদা. 4. $3\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[4]{2}=3\sqrt[12]{3^4}\times2\sqrt[12]{2^3}=6\sqrt[12]{3^4\times2^3}$
$=6\sqrt[12]{648}$.

(iii) **মিশ্র করণীসমূহের গুণন :** এইরূপ গুণনে বীজগণিতের মিশ্র রাশির গুণনের নিয়ম অনুসরণ করিতে হয়।

উদা. 1. $2\sqrt{3}+3\sqrt{4}$কে $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ কর।
গুণফল $=(2\sqrt{3}+3\sqrt{4})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})=(2\sqrt{3}\times3\sqrt{2})$
$+(3\sqrt{4}\times3\sqrt{2})+(2\sqrt{3}\times\sqrt{3})+(3\sqrt{4}\times\sqrt{3})$
$=6\sqrt{6}+9\sqrt{8}+6+3\sqrt{12}=6\sqrt{6}+18\sqrt{2}+6+6\sqrt{3}$.

উদা. 2. $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$কে $2\sqrt{6}-4\sqrt{3}$ দিয়া গুণ কর।
গুণফল $=(3\sqrt{2}\times2\sqrt{6})+(2\sqrt{5}\times2\sqrt{6})-(3\sqrt{2}\times4\sqrt{3})$
$-(2\sqrt{5}\times4\sqrt{3})$
$=6\sqrt{12}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}$
$=12\sqrt{3}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}$.

[**দ্রষ্টব্য :** $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ হয়, $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়। সুতরাং করণীগুলির গুণফল সব সময় করণী নহে।]

§ 4.12. **করণী-নিরসন** (Rationalisation) **:** (1) কোন করণীকে অন্য কোন উপযুক্ত করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করাকে করণী-নিরসন বলে। ঐরূপ লঘিষ্ঠ গুণককরণীকে **করণী-নিরসক** উৎপাদক বলে।

উদা. 1. $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ এবং $5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}=5$, সুতরাং $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়।
$\therefore$ $\sqrt{5}$কে $\sqrt{5}$ দ্বারা বা $5^{\frac{1}{2}}$ গুণ করিলে করণী-নিরসন হয় এবং উহা মূলদ রাশিতে পরিণত হয়। এখানে করণী-নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$.

উদা. 2. $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$; কিন্তু $2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}=2$, অর্থাৎ $2^{\frac{2}{3}}$কে $2^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ করিলে মূলদ সংখ্যা হয়। $\therefore$ $\sqrt[3]{4}$কে $\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয়। এখানে $\sqrt[3]{2}$ হইল করণী-নিরসক উৎপাদক।

(2) অমূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিয়া হরের করণী-নিরসন করা হয়। এইরূপ করিতে হইলে হরকে যে করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিবে, লবকেও তাহার দ্বারা গুণ করিতে হয়।

নিম্নের ভগ্নাংশগুলিকে মূলদ হরবিশিষ্ট কর :

উদা. 1. $\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

উদা. 2. $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}.$

উদা. 3. $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{(3+\sqrt{2})^2}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$

$$=\frac{9+2+6\sqrt{2}}{9-2}=\frac{11+6\sqrt{2}}{7}.$$

উদা. 4. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{3})}$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{27+8-12\sqrt{6}}{27-8}=\frac{35-12\sqrt{6}}{19}.$$

উদা. 5. $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=\frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2}{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})}$

$$=\frac{a+1+a-1+2\sqrt{a^2-1}}{a+1)-(a-1)}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-1}}{2}=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{1}.$$

§ 4·13. **করণীর ভাগ :** করণীকে অন্য একটি করণী বা মিশ্র করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া হরটিকে পূর্বের ন্যায় মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হয়।

উদা. 1. $\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$

উদা. 2. $(\sqrt{a}+2)\div(\sqrt{a}-1)=\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}=\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$

$$=\frac{a+3\sqrt{a}+2}{a-1}.$$

§ 4·14. দ্বিঘাত করণী সম্বন্ধে কতিপয় উপপাদ্য

I. (a) দুইটি সদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, $a\sqrt{x}$ ও $b\sqrt{x}$ দুইটি সদৃশ করণী। উহাদের গুণফল হইল $(a\sqrt{x}\times b\sqrt{x})$ বা abx এবং ইহা মূলদ।

উহাদের ভাগফল হইল $\frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{x}}$ বা $\frac{a}{b}$, ইহাও মূলদ।

(b) বিপরীতক্রমে যদি দুইটি করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হয়, তবে করণী দুইটি সদৃশ হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, দুইটি দ্বিঘাত করণী $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$-এর গুণফল একটি মূলদ রাশি p. এখানে $\sqrt{y}$ একটি দ্বিঘাত করণী বলিয়া y একটি মূলদ সংখ্যা।

যেহেতু, $\sqrt{x}\times\sqrt{y}=p$, $\therefore\ \sqrt{x}=\frac{p}{\sqrt{y}}=\frac{p}{y}\cdot\sqrt{y}$.

= একটি মূলদ রাশি $\left(\frac{p}{y}\right)\times\sqrt{y}$, অতএব $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$ সদৃশ করণী।

ভাগফল সম্বন্ধেও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল অমূলদ হইবে।

II. একটি সরল দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$, (a, b ও c মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{a}$ ও $\sqrt{c}$ দ্বিঘাত করণী)।

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $a=b^2+c\pm2b\sqrt{c}$,

$\therefore\ \sqrt{c}=\pm\frac{a-b^2-c}{2b}$, ইহা একটি মূলদ রাশি।

এখন দেখা যাইতেছে একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সহিত সমান হইতেছে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

III. যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং যদি x ও a মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ অমূলদ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

প্রমাণ : যদি x, a-র সহিত সমান না হয়, তবে মনে কর $x=a+m$.

এক্ষণে $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}=a+m+\sqrt{y}$,

$\therefore\ \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$, অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টির সমান হইতেছে, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore\ x=a$ এবং ইহা হইতে $\sqrt{y}=\sqrt{b}$ অর্থাৎ $y=b$ হইল।

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** উপপাদ্য III হইতে জানা গেল যে, $x\pm\sqrt{y}=a\pm\sqrt{b}$ এই আকারের সমীকরণে উভয়পক্ষের মূলদরাশি দুইটি সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশি দুইটিও সমান ধরা যাইবে। অর্থাৎ সমীকরণটি দুইটি পৃথক সমীকরণে $x=a$ এবং $y=b$ বিভক্ত করা যায়। এক্ষেত্রে অবশ্য $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ প্রকৃতপক্ষে অমূলদ হওয়া আবশ্যক।]

IV. যদি $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হয়,

তবে $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because\ \sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore\ x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$ (উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া)

$\therefore\ x=a+b$ এবং $\sqrt{y}=2\sqrt{ab}$

$\therefore\ x-\sqrt{y}=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\therefore\ \sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ হইবে।

V. যদি $\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because\ \sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$, $\therefore$ উভয় পক্ষের ত্রিঘাত লইয়া পাই $x+\sqrt{y}=a^3+3a^2.\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$

$[\because\ (\sqrt{b})^3=(\sqrt{b})^2.\sqrt{b}=b\sqrt{b}]$

$=(a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}$,

অতএব, $x=a^3+3ab\cdots(1)$ ⎫ উভয়পক্ষের মূলদ অংশদ্বয় এবং
এবং $\sqrt{y}=(3a^2+b)\sqrt{b}\cdots(2)$ ⎭ অমূলদ অংশদ্বয় সমান বলিয়া।

এক্ষণে, (1) − (2) করিয়া পাই

$x-\sqrt{y}=a^3-3a^2\sqrt{b}+3ab-b\sqrt{b}=(a-\sqrt{b})^3.$

$\therefore\ \sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}.$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে

$\sqrt[3]{(x+\sqrt{y})}=a+\sqrt{b}$ হইবে।

§ 4·15. করণীর বর্গমূল নির্ণয়

আমরা জানি যে, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$-এর বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টি হইবে, অর্থাৎ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$-এর বর্গকে $x+\sqrt{y}$ এই আকারে

প্রকাশ করা যায়। অতএব, $x+\sqrt{y}$ এই আকারের রাশির বর্গমূল $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ আকারের হইবে।

(1) $x+\sqrt{y}$-এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :

মনে কর, $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$

$\therefore\ a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{ab}=\sqrt{y}$ বা, $4ab=y\cdots\cdots(2)$

$\therefore\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-y,$

$\therefore\ a-b=\pm\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3).$

এক্ষণে, $\because\ a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $a-b=\pm\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3)$

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $a=\frac{1}{2}(x\pm\sqrt{x^2-y})$,

এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $b=\frac{1}{2}(x\mp\sqrt{x^2-y})$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\left[\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})\}}+\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})\}}\right].$$

[দ্রষ্টব্য : অনুরূপে $x-\sqrt{y}$-এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ এইরূপ ধরিবে।]

(2) **$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$-এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :**

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$

অতএব, এখানে $a=x+y+z$, $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$, $\sqrt{c}=2\sqrt{yz}$

এবং $\sqrt{d}=2\sqrt{zx}$ (মনে করা যাক)।

এক্ষণে, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}=2\sqrt{xy}\times2\sqrt{yz}$, $\therefore\ \sqrt{bc}=4y\sqrt{xz}$,

$$\therefore\ \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{d}}=\frac{4y\sqrt{xz}}{2\sqrt{xz}}=2y\ (\because\ \sqrt{d}=2\sqrt{xz}),\ \therefore\ y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}.$$

অনুরূপে পাওয়া যায় $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$ এবং $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\left\{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}\right)}\right\}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : উপরের বর্গমূল সম্ভব হইবে যদি x, y, z-এর যে মানগুলি পাওয়া গিয়াছে তাহাদের সমষ্টি a-র সমান হয় অর্থাৎ যদি $a=x+y+z$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a=\frac{\sqrt{bd}}{2\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{cd}}{2\sqrt{b}}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$ হয়।

এই শর্ত পূরণ না হইলে রাশিটির বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকারে নির্ণয় সম্ভব হইবে না।

উদা. 1. $5+2\sqrt{6}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [H. S., 1978]

মনে কর, $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

এক্ষণে, বর্গ করিয়া পাই $5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$.

$\therefore\ x+y=5\cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, অর্থাৎ $xy=6\cdots(2)$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5)^2-4\times 6=1$,

$\therefore\ x-y=\pm 1\quad\cdots(3)$

এক্ষণে, $\because\ x+y=5$ এবং $x-y=\pm 1$, $\therefore$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=2$; অথবা, $x=2$ এবং $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

উদা. 2. $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz},$$

ইহা সিদ্ধ হইবে যদি $x+y+z=9$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$ হয়।

এক্ষণে, $\because\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, $\therefore\ xy=6$; $\because\ 2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$,

$\therefore\ xz=8$, এবং $\because\ 2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$, $\therefore\ yz=12$.

$\therefore\ x^2y^2z^2=576$, $\therefore\ xyz=\pm 24$, $\therefore\ x=\pm 2$, $y=\pm 3$, $z=\pm 4$ এবং $x=2$, $y=3$, $z=4$ মানগুলির দ্বারা $x+y+z=9$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$.

প্রকাশ করা যায়। অতএব, $x+\sqrt{y}$ এই আকারের রাশির বর্গমূল $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ আকারের হইবে।

(1) $x+\sqrt{y}$-এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :

মনে কর, $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x+\sqrt{y}=a+b+2\sqrt{ab}$

$\therefore\ a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{ab}=\sqrt{y}$ বা, $4ab=y\cdots\cdots(2)$

$\therefore\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-y,$

$\therefore\ a-b=\pm\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3).$

এক্ষণে, $\because\ a+b=x\cdots\cdots(1)$

এবং $a-b=\pm\sqrt{x^2-y}\cdots\cdots(3)$

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া পাই $a=\frac{1}{2}(x\pm\sqrt{x^2-y})$,

এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $b=\frac{1}{2}(x\mp\sqrt{x^2-y})$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})\}}+\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})\}}].$$

[দ্রষ্টব্য : অনুরূপে $x-\sqrt{y}$-এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\sqrt{(x-\sqrt{y})}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ এইরূপ ধরিবে।]

(2) **$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$-এর বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :**

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$

অতএব, এখানে $a=x+y+z$, $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$, $\sqrt{c}=2\sqrt{yz}$

এবং $\sqrt{d}=2\sqrt{zx}$ (মনে করা যাক)।

এক্ষণে, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}=2\sqrt{xy}\times2\sqrt{yz}$, $\therefore\ \sqrt{bc}=4y\sqrt{xz}$,

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{d}}=\dfrac{4y\sqrt{xz}}{2\sqrt{xz}}=2y(\because\ \sqrt{d}=2\sqrt{xz})$, $\therefore\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bc}{d}}$.

অনুরূপে পাওয়া যায় $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bd}{c}}$ এবং $z=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{}^{bd}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}\right)}\right\}}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : উপরের বর্গমূল সম্ভব হইবে যদি x, y, z-এর যে মানগুলি পাওয়া গিয়াছে তাহাদের সমষ্টি a-র সমান হয় অর্থাৎ যদি $a=x+y+z$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a=\frac{\sqrt{bd}}{2\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{cd}}{2\sqrt{b}}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$ হয়।

এই শর্ত পূরণ না হইলে রাশিটির বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকারে নির্ণয় সম্ভব হইবে না।

উদা. 1. $5+2\sqrt{6}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [H. S., 1978]

মনে কর, $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

এক্ষণে, বর্গ করিয়া পাই $5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$.

$\therefore\ x+y=5\cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, অর্থাৎ $xy=6\cdots(2)$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5)^2-4\times 6=1$,

$\therefore\ x-y=\pm 1 \quad\cdots(3)$

এক্ষণে, $\because\ x+y=5$ এবং $x-y=\pm 1$, $\therefore$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=2$; অথবা, $x=2$ এবং $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

উদা. 2. $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $9+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz},$$

ইহা সিদ্ধ হইবে যদি $x+y+z=9$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$ হয়।

এক্ষণে, $\because\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, $\therefore\ xy=6$; $\because\ 2\sqrt{xz}=4\sqrt{2}$,

$\therefore\ xz=8$, এবং $\because\ 2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$, $\therefore\ yz=12$.

$\therefore\ x^2y^2z^2=576$, $\therefore\ xyz=\pm 24$, $\therefore\ x=\pm 2$, $y=\pm 3$, $z=\pm 4$ এবং $x=2$, $y=3$, $z=4$ মানগুলির দ্বারা $x+y+z=9$ সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$.

উদা. 3. $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $17-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$

$$=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz},$$

ইহা সম্ভব হইবে যদি $x+y+z=17$, $-2\sqrt{xy}=-6\sqrt{2}$,

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{6}$ এবং $-2\sqrt{yz}=-8\sqrt{3}$ হয়।

অতএব, $xy=18$, $xz=24$, $yz=48$, $\therefore$ $xyz=144$

$\therefore$ $x=3, y=6$ এবং $z=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8})$.

পর্যবেক্ষণের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :

দুইপদযুক্ত দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল পর্যবেক্ষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এইজন্য প্রথমে করণীকে $a+2\sqrt{b}$ এই আকারে পরিণত করিবে, তারপর পর্যবেক্ষণ দ্বারা এইরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিবে যেন তাহাদের সমষ্টি a-এর সমান এবং গুণফল b-এর সমান হয়।

উদা. 4 $7+2\sqrt{12}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এখানে এমন দুইটি সংখ্যা স্থির কর যাহাদের যোগফল $=7$ এবং গুণফল 12. 4 এবং 3 সেই সংখ্যাদ্বয়।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=4+3+2\sqrt{4.3}=(2)^2+(\sqrt{3})^2+2.2.\sqrt{3}$

$=(2+\sqrt{3})^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2+\sqrt{3})$.

[দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়। যথা, 4-এর বর্গমূল ± 2, a^2+b^2+2ab-এর বর্গমূল $\pm(a+b)$. অতএব, উপরের উদাহরণে $-2-\sqrt{3}$ আর একটি বর্গমূল হয়। অতএব, এরূপ স্থলেও $\pm(2+\sqrt{3})$ এইরূপে উত্তর লিখিবে।]

উদা. 5. $28-10\sqrt{3}$-এর বর্গমূল বাহির কর।

প্রদত্ত রাশি $=28-2.5.\sqrt{3}$

$=25+3-2.5.\sqrt{3}=(5)^2+(\sqrt{3})^2-2.5.\sqrt{3}=(5-\sqrt{3})^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5-\sqrt{3})$.

উদা. 6. $8+2\sqrt{15}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=5+3+2\sqrt{5.3}=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{3}$

$$=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

উদা. 7. $2-\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$2-\sqrt{3}=2-2.\tfrac{1}{2}.\sqrt{3}=2-2\sqrt{\tfrac{1}{4}}.\sqrt{3}=2-2\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}-2\sqrt{\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}}=(\sqrt{\tfrac{3}{2}})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2.\sqrt{\tfrac{3}{2}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$ ∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

উদা. 8. $7-4\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এখানে $7-4\sqrt{3}=7-2\sqrt{4\times 3}=4+3-2\sqrt{4\times 3}=(2-\sqrt{3})^2$.

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2-\sqrt{3})$.

উদা. 9. $\sqrt{48}+\sqrt{45}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এখানে $\sqrt{48}+\sqrt{45}=\sqrt{3}(\sqrt{16}+\sqrt{15})=\sqrt{3}(4+\sqrt{15})$

$$=\sqrt{3}\times\frac{8+2\sqrt{15}}{2}$$ [$\sqrt{15}$ এর সহগ 2 করিবার জন্য]

$$=\sqrt{3}\times\frac{5+3+2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}=\pm\left\{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}$.

উদা. 10. $9x+8y+12\sqrt{2xy}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$9x+8y+12\sqrt{2xy}=9x+8y+2\sqrt{72xy}=(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})^2$,

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{9x}+\sqrt{8y})=\pm(3\sqrt{x}+2\sqrt{2y})$.

উদা. 11. $\tfrac{1}{2}(3x-1)+\sqrt{2x^2+x-6}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=\tfrac{1}{2}\{(3x-1)+2\sqrt{2x^2+x-6}\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{2x-3)+(x+2)+2\sqrt{(2x-3)(x+2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\}^2$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}\right)$.

উদা. 12. $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [B. U.]

মনে কর, $\sqrt{(a+b+\sqrt{2ab+b^2})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

বর্গ করিয়া পাই, $a+b+\sqrt{2ab+b^2}=x+y+2\sqrt{xy}$.

∴ $x+y=a+b\cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=\sqrt{2ab+b^2}$

∴ $(x+y)^2=(a+b)^2$ এবং $4xy=2ab+b^2$.

এক্ষণে $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(a+b)^2-2ab-b^2=a^2$,

$\therefore\ x-y=\pm a\cdots(2)$. এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই

$x=a+\frac{b}{2}=\frac{2a+b}{2},\ y=\frac{b}{2}$; অথবা $x=\frac{b}{2},\ y=\frac{2a+b}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)$.

উদা. 13. $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt{32}-\sqrt{24}=\sqrt{8}(\sqrt{4}-\sqrt{3})=\sqrt{8}(2-\sqrt{3})$

$=\sqrt{8}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$ [$\sqrt{3}$-এর সহগ 2 করা হইল]

$=2\sqrt{2}\times\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}(3+1-2\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$.

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. মান নির্ণয় কর : $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{192}$. [C.U.'47]

প্রদত্ত রাশি $=3\sqrt{16\times3}-4\sqrt{25\times3}+5\sqrt{64\times3}=3\times4\sqrt{3}$

$-4\times5\sqrt{3}+5\times8\sqrt{3}=12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+40\sqrt{3}=32\sqrt{3}$.

উদা. 2. প্রমাণ কর : $\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{7}$. [C. U. '23]

$\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{25\times7}-\sqrt{16\times7}=5\sqrt{7}-4\sqrt{7}=\sqrt{7}$.

উদা. 3. $\frac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}$-এর আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর যখন $\sqrt{2}=1.4142$. [H. S. 1960 (Compl)]

$\frac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\frac{3+5\sqrt{2}+4}{9-8}=7+5\sqrt{2}$

$=7+5\times1.4142=7+7.0710=14.071$ (আসন্ন)।

উদা. 4. $\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+1}$ কে মূলদ হরবিশিষ্টরূপে পরিণত কর। [B.U.]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{(\sqrt{2}+1+\sqrt[4]{2})(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}$

$=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt[4]{2})^2}=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{7(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{3+\sqrt{2}}$

$=\frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{7}$

$=\frac{(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{1}$.

উদা. 5. দেখাও যে $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=a+x+\sqrt{ax+x^2}.$

[B. U.]

$$\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{a+x}(\sqrt{a+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{a(a+x)-a\sqrt{ax+x^2}}{a+x-x}=\frac{a(a+x+\sqrt{x+x^2})}{a}$$
$$=a+x+\sqrt{ax+x^2}.$$

উদা. 6. সরল কর : $\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}.$

[D. B. 28]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})\times\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$

$$-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})\times\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3(3-1)}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3(3-1)}.$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

উদা. 7. মান নির্ণয় কর : $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, যখন $x=3+2\sqrt{2}$.

[P. U. '28]

$\because\ x=3+2\sqrt{2}=2+1+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2,\ \therefore\ \sqrt{x}=\sqrt{2}+1.$

$\therefore\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}+1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$

উদা. 8. মান নির্ণয় কর : $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$

যখন $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}.$

[C. U.]

$\because\ x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}},\ \therefore\ x^2=\dfrac{n-1}{n+1},\ \therefore\ x^2-1=\dfrac{n-1}{n+1}-1=\dfrac{-2}{n+1}.$

এক্ষণে প্রদত্ত রাশি $=\left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}\right)^2-2\times\dfrac{x}{x-1}\times\dfrac{x}{x+1}$

$$=\left(\frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1}\right)^2-2.\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$= \left\{\frac{\frac{2(n-1)}{n+1}}{\frac{-2}{n+1}}\right\}^2 - \frac{\frac{2(n-1)}{n+1}}{\frac{-2}{n+1}} = \{-(n-1)\}^2 - \{-(n-1)\}$$

$$= (n-1)^2 + (n-1) = (n-1)(n-1+1) = n(n-1).$$

উদা. 9. মান নির্ণয় কর : $\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b}}}}\cdots$অসীম পর্যন্ত। [B.U.]

মনে কর, $x = \sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b}}}}\cdots$অসীম পর্যন্ত (প্রদত্ত রাশির সসীম মান থাকা সম্ভব ধরিয়া)।

$\therefore\ x^2 = a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b}}}\cdots$অসীম পর্যন্ত [বর্গ করিয়া]

$\therefore\ x^6 = a^3b\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\cdots$অসীম পর্যন্ত $= a^3bx$ [$\because$ করণী অংশ $= x$]

$\therefore\ \frac{x^6}{x} = a^3b$, বা, $x^5 = a^3b$, $\therefore\ x = \sqrt[5]{a^3b}$,

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[5]{a^3b}$.

উদা. 10. সরল কর : $\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. [B. U.]

প্রদত্ত রাশি $= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}$

$$= \frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)} = \frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1} = 4x\sqrt{x^2-1}.$$

উদা. 11. যদি $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, তবে $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$এর মান নির্ণয় কর। [B. U]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$$= \frac{1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2} = \frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1+x-(1-x)} = \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{2x}$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

উদা. 12. $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, এবং $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, হইলে $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [H. S. '60]

এখানে $x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$

এবং $xy=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1,$

$$\therefore \quad \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{(x+y)^2-xy}{(x+y)^2-3xy}=\frac{4^2-1}{4^2-3}=\frac{15}{13}.$$

উদা. 13. যদি $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $bx^2-ax+b=0.$ [D. B. '44]

প্রদত্ত শর্ত হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{a+2b}}{2\sqrt{a-2b}}, \quad \therefore \quad \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$ [বর্গ করিয়া]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a+2b}{a-2b}.$

$\therefore \quad \frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a}{4b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{a}{b},$ বা, $bx^2+b=ax, \quad \therefore \quad bx^2-ax+b=0.$

উদা. 14. প্রমাণ কর $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}$
$=\sqrt{2x}.$ [C. U. '27]

$\because \quad (\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}})^2$

$=y+\sqrt{2xy-x^2}+y-\sqrt{2xy-x^2}+2\sqrt{y^2-(\sqrt{2xy-x^2})^2}$

$=2y+2\sqrt{y^2-2xy+x^2}=2y+2\sqrt{(x-y)^2}=2y+2(x-y)$

$=2y+2x-2y=2x,$

$\therefore \quad \sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}=\sqrt{2x}.$

উদা. 15. $\sqrt[p]{x}-\sqrt[q]{x}$. এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

মনে কর, $\sqrt[p]{x}$ বা $x^{\frac{1}{p}}=a$ এবং $\sqrt[q]{y}$ বা $y^{\frac{1}{q}}=b.$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=(a-b).$

এক্ষণে যদি p ও q-এর ল.সা.গু. n হয়, তবে a^n ও b^n দুইটিই মূলদ হইবে; সুতরাং a^n-b^n রাশিটিও মূলদ হইবে।

এখানে n যে-কোন ধনাত্মক জোড় বা বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, a^n-b^n রাশিটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\because \quad a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{a-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

এবং a^n-b^n এখানে মূলদ,

$\therefore (a-b)$কে $(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ দ্বারা গুণ করিলে a^n-b^n গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণে p ও q-এর ল. সা. গু. n বলিয়া a^n মূলদ বলা হইল কেন তাহা বুঝিয়া লও। $\because$ p ও q-এর ল. সা. গু. n, $\therefore$ nকে p বা q দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে। মনে কর ভাগফল দুইটি যথাক্রমে m ও r. $\therefore a^n=(x^{\frac{1}{p}})^n=x^{\frac{n}{p}}=x^m$ এবং ইহা মূলদ, $\therefore$ a^n মূলদ। অনুরূপে b^n মূলদ।]

উদা. 16. $\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}$ বা $a^{\frac{1}{m}}+b^{\frac{1}{n}}$-এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

মনে কর, $a^{\frac{1}{m}}=x$ এবং $b^{\frac{1}{n}}=y$; সুতরাং প্রদত্ত রাশি $x+y$.

এখন, যদি m ও n-এর ল. সা. গু. p হয়, তবে x^p ও y^p দুইটিই মূলদ, সুতরাং x^p+y^p মূলদ হইবে।

(i) p জোড় (even) হইলে x^p-y^p রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p-y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots+xy^{p-2}-y^{p-1})$ হইয়া থাকে। অতএব, তখন $x+y$কে $x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots+xy^{p-2}-y^{p-1}$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফলটি মূলদ হইতেছে।

অতএব, এখানে নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots\cdots+xy^{p-2}-y^{p-1}.$$

(ii) p যদি বিজোড় হয়, তবে x^p+y^p রাশিটি $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং তখন $x^p+y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots\cdots-xy^{p-2}+y^{p-1})$.

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots\cdots-xy^{p-2}+y^{p-1}.$$

উদা. 17. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

প্রদত্ত রাশি $=2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}$, এখানে সূচক দুইটির হর 2 ও 3এর ল. সা. গু. 6.

মনে কর, $a=2^{\frac{1}{2}}$ এবং $b=3^{\frac{1}{3}}$; এখানে $a^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$,

$b=(3^{\frac{1}{3}})^6=9$; অতএব a^6, b^6 এবং a^6-b^6 প্রত্যেকটি মূলদ।

এক্ষণে, $a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$.

$\therefore$ $a+b$এর করণী নিরসক উৎপাদক

$$=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5.$$

$\therefore$ $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$এর নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=(2^{\frac{1}{2}})^5-(2^{\frac{1}{2}})^4.\ 3^{\frac{1}{3}}+(2^{\frac{1}{2}})^3.(3^{\frac{1}{3}})^2-(2^{\frac{1}{2}})^2.\ (3^{\frac{1}{3}})^3$$
$$+(2^{\frac{1}{2}}).(3^{\frac{1}{3}})^4-(3^{\frac{1}{3}})^5$$

$$=2^{\frac{5}{2}}-2^2.\ 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{3}{2}}.\ 3^{\frac{2}{3}}-2.3+2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{4}{3}}-3^{\frac{5}{3}}$$

$$=4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}-6+3\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}.$$

উদা. 18. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$-এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

$$\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1=9^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1=3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1$$

$=(3^{\frac{1}{3}})^2-3^{\frac{1}{3}}+1=a^2-a+1$ [$a=3^{\frac{1}{3}}$ ধরিয়া]

a^2-a+1কে $a+1$ দ্বারা গুণ করিলে a^3+1 হয়।

এখানে $(3^{\frac{1}{3}})^3+1$ বা $3+1$ মূলদ রাশি।

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক$=a+1=\sqrt[3]{3}+1$.

উদা. 19. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$-এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$
$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

এখন দেখিতে হইবে ইহাকে কি দিয়া গুণ করিলে $\sqrt{ab}$কে করণীমুক্ত করা যায়। দেখা যাইতেছে যে,

$$\{2\sqrt{ab}+(a+b-c)\}\{2\sqrt{ab}-(a+b-c)\}=4ab-(a+b-c)^2$$

এবং ইহা মূলদ।

আবার, $2\sqrt{ab}-(a+b-c)=2\sqrt{ab}-a-b+c$

$$=(\sqrt{c})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$=(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$\therefore$ নির্ণেয় করণী নিরসক উৎপাদক

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

উদা. 20. $\dfrac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}}$কে মূলদ হরবিশিষ্ট রাশিরূপে প্রকাশ কর।

এখানে হর $2-3^{\frac{1}{3}}$ এর সূচকগুলি 1 ও $\frac{1}{3}$ এবং সূচকদ্বয়ের হরগুলির ল. সা. গু. 3.

$\because \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$\therefore$ এখানে করণী নিরসক উৎপাদক $=(2)^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2$.

এক্ষণে প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব ও হরকে ঐ উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(2+3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}{(2-3^{\frac{1}{3}})\{2^2+2.3^{\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{3}})^2\}}$$

$$= \frac{11+8.3^{\frac{1}{3}}+4.3^{\frac{2}{3}}}{8-3} = \frac{11+8\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}}{5}.$$

উদা 21. $26+15\sqrt{3}$-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

মনে কর $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = x+\sqrt{y} \cdots\cdots(1)$

$\therefore \quad \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = x-\sqrt{y} \quad \cdots(2)$

(1) এবং (2) গুণ করিয়া পাই

$$x^2-y=\sqrt[3]{26^2-15^2.3}=\sqrt[3]{676-675}=\sqrt[3]{1}=1 \cdots(3)$$

(1) এর উভয় দিকের ঘন লইয়া পাই,

$$26+15\sqrt{3}=(x+\sqrt{y})^3=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}.$$
$$=(x^3+3xy)+(3x^2+y)\sqrt{y}.$$

উভয় পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় সমান বলিয়া

$26=x^3+3xy=x^3+3x(x^2-1)$ [(3) হইতে y-এর মান বসাইয়া]

বা, $4x^3-3x-26=0$

বা, $4x^3-8x^2+8x^2-16x+13x-26=0$

বা, $(x-2)(4x^2+8x+13)=0$

$\therefore \quad x=2. \quad \therefore \quad y=x^2-1=4-1=3.$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=2+\sqrt{3}$.

উদা 22. $17+12\sqrt{2}$-এর চতুর্থ মূল বাহির কর।

$$17+12\sqrt{2}=17+2\sqrt{72}=9+8+2\sqrt{9}.\sqrt{8}=(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2$$
$$=(3+2\sqrt{2})^2=(2+1+2\sqrt{2}.\sqrt{1})^2$$
$$=\{(\sqrt{2}+1)^2\}^2=(\sqrt{2}+1)^4$$

$\therefore \quad (17+12\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}+1.$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থমূল $=\sqrt{2}+1$.

প্রশ্নমালা 4

1. $\sqrt[3]{3}$ ও $\sqrt[4]{5}$কে সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ কর।

2. 2, $1\frac{1}{2}$ এবং x^2কে (i) দ্বিতীয় ক্রমের, (ii) তৃতীয় ক্রমের মূল চিহ্নযুক্ত রাশি হিসাবে প্রকাশ কর।

3. কোন্‌টি বৃহত্তর : $\sqrt[3]{5}$ বা $\sqrt[4]{8}$?

4. মানের ক্রম অনুসারে সাজাও :—

(i) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$; (ii) 3, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{10}$; (iii) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{8}$.

5. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর :—

$2\sqrt{5}$, $3\sqrt[3]{2}$, $x\sqrt[4]{y}$.

6. সরলতম আকারে লিখ :—

(i) $\sqrt{175}$, (ii) $2\sqrt{112}$, (iii) $5\sqrt{192}$, (iv) $\sqrt[3]{375}$,

(v) $4\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}$.

7. প্রমাণ কর $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$.

8. দেখাও যে $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$.

9. গুণফল নির্ণয় কর :—

(i) $3^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{3}$, (ii) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{4}$, (iii) $4\sqrt[3]{4}\times2\sqrt[3]{2}$,

(iv) $2\sqrt[3]{3}\times3\sqrt{6}$.

10. ভাগ কর :—

(i) $6\sqrt{5}$কে $2\sqrt{2}$ দ্বারা, (ii) $4\sqrt[3]{4}$কে $2\sqrt[3]{2}$ দ্বারা, (iii) $3\sqrt[4]{5}\div6\sqrt[4]{4}$.

11. যদি $\sqrt{2}=1{\cdot}1414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$ এবং $\sqrt{5}=2{\cdot}236$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিতগুলির দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, (ii) $\frac{4}{\sqrt{3}}$, (iii) $\frac{15}{\sqrt{5}}$, (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, (v) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

12. যদি $x+x\sqrt{3}=10$ হয়, তবে x-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

13. গুণ কর :

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$কে $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ দ্বারা,

(ii) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$কে $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ দ্বারা,

(iii) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$কে $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ দ্বারা,

(iv) $3\sqrt{5}-2\sqrt{6}$কে $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ দ্বারা,

(v) $\sqrt{x}+\sqrt{y-x}$কে $\sqrt{x}-\sqrt{y-x}$ দ্বারা,

(vi) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$কে $\sqrt{a-b}$ দ্বারা,

(vii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$কে $\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$ দ্বারা,

(viii) $x+\sqrt{y}$কে $\sqrt{x}-y$ দ্বারা,

14. বর্গ নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, (ii) $2-\sqrt{3}$, (iii) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$,
(iv) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$, (v) $a-\sqrt{b^2-a^2}$, (vi) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}$.

15. হরগুলির করণী-নিরসন কর :

(a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, (b) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$, (c) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}$. [B.U.]

16. $3+\sqrt{6}$কে $3+\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ কর।

17. মান নির্ণয় কর :

(a) $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ এবং (b) $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$.

সরল কর :

18. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

19. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. [B.U.]

20. $\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}$.

21. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}$ অসীম পর্যন্ত এর মান নির্ণয় কর।

22. যদি $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ এবং $b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তবে

$\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

23. (a). যদি $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $xy=1$ হয়,

তবে x^2+xy+y^2-এর মান নির্ণয় কর।

(b) যদি $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ হয় ;

তাহা হইলে $2x^4-8x^3-5x^2+26x-28$এর মান নির্ণয় কর।

24. বর্গমূল নির্ণয় কর :—

(a) $41+6\sqrt{32}$; (b) $28-6\sqrt{3}$; (c) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ [C.U. '24]
(d) $\sqrt{50}-\sqrt{48}$; (e) $\sqrt{175}+\sqrt{147}$, (f) $10\frac{3}{4}+3\sqrt{7}$.

25. বর্গমূল নির্ণয় কর :—

(a) $\frac{1}{2}(4x-3)+\sqrt{3x^2-7x+2}$ (b) $1+x^4+\sqrt{x^8+x^4+1}$

(c) $16+2\sqrt{15}+4\sqrt{6}+4\sqrt{10}$ (d) $11-2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(e) $x-y+z+2\sqrt{xz-yz}$.

26. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$-এর মান নির্ণয় কর যখন $x=4+2\sqrt{3}$.

27. সরল কর :—

(i) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ [B.U. 1888]

(ii) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3+\sqrt{5})}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$ [M.U. 1892]

(iii) $\frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{5}}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$.

28. যদি $x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $b^2x^2-2a^2x+b^2=0$.

29. প্রমাণ কর $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}=2x$.

30. যদি $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হয়,

তবে $x^3+3bx-2a$-এর মান নির্ণয় কর।

[Hints : $x^3=a+\sqrt{a^2+b^3}+a-\sqrt{a^2+b^3}+3(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\times$

$(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\{(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\}$

$=2a+3\{a^2-(\sqrt{a^2+b^3})^2\}^{\frac{1}{3}}x=2a+3(a^2-a^2-b^3\}^{\frac{1}{3}}.x$

$=2a+3(-b^3)^{\frac{1}{3}}.x=2a+3.(-1)^{\frac{1}{3}}.(b^3)^{\frac{1}{3}}x=2a-3bx\cdots$]

31. যদি $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হয়, তবে $(x+y+z)^3=27xyz$.

32. যদি $x=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ হয়, প্রমাণ কর $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.

[C. U. (D. M. H) '51]

[Hints : $x^3=ab^{-1}+a^{-1}b+3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}.a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$

$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+3a^{\circ}b^{\circ}.x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+3x$].

33. করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর :

(a) $\sqrt[3]{3}+1$ (b) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

(d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

34. মূলদ হরবিশিষ্ট কর :—

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ (b) $\dfrac{3-\sqrt[3]{2}}{3+\sqrt[3]{2}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

35. দেখাও যে $(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=7\sqrt{10}$.

36. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}$-এর আসন্ন দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

37. সরলতম মান বাহির কর :—

$\sqrt{[\sqrt{5}+\sqrt{\{5+8\sqrt{(9-4\sqrt{5})}\}}]}$.

38. যদি $(x+y)^{\frac{1}{3}}+(y+z)^{\frac{1}{3}}+(z+x)^{\frac{1}{3}}=0$ হয়, তবে দেখাও যে $(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3)$.

39. ঘনমূল নির্ণয় কর :

(i) $10+6\sqrt{3}$ (ii) $7-5\sqrt{2}$

(iii) $45-29\sqrt{2}$ (iv) $\frac{201}{8}-\frac{41}{4}\sqrt{5}$

40. চতুর্থ মূল নির্ণয় কর :

(i) $28+16\sqrt{3}$ (ii) $49-20\sqrt{6}$

(iii) $7-2\sqrt{3}$ (iv) $\frac{17}{16}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$

41. যদি $(a+\sqrt{a^2-yz})(b+\sqrt{b^2-zx})(c+\sqrt{c^2-xy})$
$=(a-\sqrt{a^2-yz})(b-\sqrt{b^2-zx})(c-\sqrt{c^2-xy})$ হয়, তবে দেখাও যে, উভয়পক্ষের মান $\pm xyz$ হইবে।

পঞ্চম অধ্যায়

জটিল রাশি (Complex number)

§ 5·1 ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন বাস্তব রাশির বর্গ ধনাত্মক হইয়া থাকে। অতএব বলা যায় যে-কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি হইতে পারে না। $\sqrt{-4}$ কখনও $+2$ বা -2 হইতে পারে না, $\sqrt{-x^2}$ কখনও $+x$ বা $-x$.এর সমান হইতে পারে না।

সুতরাং $\sqrt{-4}$ বা $\sqrt{-x^2}$ ইত্যাদির মান কোন বাস্তব রাশি নহে।

কিন্তু উচ্চতর গণিতে $\sqrt{-4}$ বা $\sqrt{-x^2}$ ইত্যাদি রাশি প্রায়শঃই ব্যবহৃত হয়। সেইহেতু ইহাদের কিছু অর্থ থাকা উচিত।

সংজ্ঞা : $x^2+1=0$ সমীকরণের সমাধান $\pm\sqrt{-1}$. $\pm\sqrt{-1}$কে $\pm i$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। $+i$ বা $-i$ এইরূপ দুইটি রাশি যাহারা বাস্তব সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের সকল নিয়ম সিদ্ধ করে।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $i^2+1=0$, বা, $i^2=-1$.

এক্ষণে, $(ai)^2$ [a বাস্তব রাশি]

$$=ai.ai=a.a.i.i=a^2i^2=a^2(-1)=-a^2.$$

[যেহেতু i গুণের বিনিময় নিয়ম সিদ্ধ করে]

$$\therefore\ (a.i)^2+a^2=0.$$

সুতরাং $x^2+a^2=0$ সমীকরণের একটি সমাধান ai.

অনুরূপে $-ai$, $x^2+a^2=0$ সমীকরণের আর একটি সমাধান।

সংজ্ঞা : $+ai$ বা $-ai$ আকারের রাশিগুলিকে (যেখানে a বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$) কাল্পনিক রাশি (Imaginary quantity) বলে।

দুইটি কাল্পনিক রাশির যোগফল, গুণফল ইত্যাদি সম্বন্ধে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি i এর সংজ্ঞানুসারে সত্য।

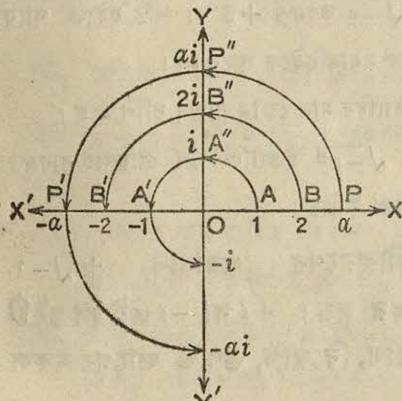
(1) $ai+bi=(a+b)i$ (2) $ai-bi=(a-b)i$

(3) $ai\cdot bi=abi^2=-ab$ (4) $\dfrac{ai}{bi}=\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$

§ 5·2. কাল্পনিক রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of Imaginary Quantity) :

কাল্পনিক সংখ্যা অর্থহীন নহে। বাস্তব সংখ্যার যেরূপ অস্তিত্ব আছে, ইহাদেরও সেইরূপ বাস্তব সত্তা আছে। ইহার প্রমাণস্বরূপ কাল্পনিক সংখ্যাকে একটি রেখার বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করিয়া দেখান হইবে।

মনে কর, $\overleftrightarrow{XX'}$ একটি সরল রেখা এবং O ও A উহার উপর যে-কোন দুইটি বিন্দু। শূন্য সংখ্যাটিকে O বিন্দু দ্বারা এবং 1 সংখ্যাকে A বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন 2 সংখ্যাটিকে B বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $OB = 2.OA$, সাধারণভাবে যে-কোন বাস্তব সংখ্যা aকে P বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হয়, যেখানে $OP = a \times OA$।



ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাকে $\overrightarrow{OX'}$ এর উপরের বিন্দুরূপে প্রকাশ করা হয়। -1কে A′ বিন্দুর দ্বারা, -2কে B′ বিন্দুর দ্বারা, $-a$কে P′ বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OP = OP'$।

লক্ষ্য কর, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ ইত্যাদি রেখাংশকে 180° কোণ ঘুরাইয়া, A, B, C বিন্দু হইতে A′, B′, C′ বিন্দু পাওয়া যায়। সুতরাং -1 দ্বারা গুণ এরূপ একটি প্রক্রিয়া বুঝায় যাহার প্রয়োগ করিলে কোন রেখাংশ ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে 180° কোণ ঘুরিয়া যায়। এখন $-1 = i^2 = i \times i$। এক্ষণে, $-a = a \times (-1) = a \times i^2 = (ai)i$ এইরূপে লেখা যায়।

অতএব -1 সংখ্যাটি, i দ্বারা গুণ প্রক্রিয়া 1-এর উপর পর পর দুইবার প্রয়োগ করিয়া পাওয়া গিয়াছে, এইরূপ কল্পনা করা যায়। যেহেতু -1 প্রক্রিয়ার দ্বারা রেখাংশ 180° কোণ ঘোরে, সুতরাং i প্রক্রিয়ার দ্বারা রেখাংশ 90° কোণ ঘুরিবে।

মনে কর $\overleftrightarrow{YY'}$ রেখা $\overleftrightarrow{XX'}$ রেখার O বিন্দুতে লম্ব। মনে কর A″, B″, P″ ইত্যাদি বিন্দু $\overrightarrow{OY}$ রেখার উপর অবস্থিত, যেখানে $OA = OA''$, $OB = OB''$, $OP = OP''$ ইত্যাদি। এক্ষণে যদি $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ ইত্যাদিকে 90° কোণে ঘুরান

হয়, তবে A, B, P বিন্দু যথাক্রমে A″, B″, P″ বিন্দুতে পতিত হইবে। যেহেতু A বিন্দু 1 সংখ্যাকে সূচিত করে, ∴ A″ বিন্দু $1 \times i = i$-কে সূচিত করিবে। B বিন্দু 2 সংখ্যাকে সূচিত করে, সুতরাং B″ বিন্দু $2 \times i = 2i$ সংখ্যাকে সূচিত করিবে। অনুরূপে P″ বিন্দু ai সংখ্যাকে সূচিত করে। অতএব কাল্পনিক সংখ্যাকে $\overrightarrow{OY}$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়। লক্ষ্য কর $(ai) \times i$ সংখ্যাটি P″ বিন্দুকে 90° ঘুরাইয়া পাওয়া যাইতেছে। সুতরাং A′ বা -1কে 90° ঘুরাইলে অর্থাৎ i দ্বারা গুণ করিলে $-i$ রাশিটি পাওয়া যায়। P′কে বা $-a$কে 90° ঘুরাইলে অর্থাৎ i দ্বারা গুণ করিলে $-ai$ রাশিটি পাওয়া যাইবে। সুতরাং কাল্পনিক সংখ্যাগুলি $\overleftrightarrow{YY'}$ সরলরেখার বিন্দুগুলি দ্বারা প্রকাশিত হইল। $\overleftrightarrow{XX'}$কে বাস্তব অক্ষ (real axis) এবং $\overleftrightarrow{YY'}$কে কাল্পনিক অক্ষ (imaginary axis) বলে।

§ 5·3. i-এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ঘাত :

m একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে i^m-এর অর্থ $i.i.i.\cdots\cdot m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত এবং $i^{-m} = \frac{1}{i^m}$.

(a) i-এর ধনাত্মক ঘাত।

$(i)^1 = i = \sqrt{-1}$; $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $(i)^3 = i^2.i = -1.i = -i$.

$(i)^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; $(i)^5 = (i^4).i = 1 \times i = i$.

$(i)^6 = i^4.i^2 = 1 \times -1 = -1$.

সাধারণভাবে যদি n কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে

$i^{4n} = (i^4)^n = (1)^n = 1$; $i^{4n+1} = i^{4n}.i = 1.i = i$;

$i^{4n+2} = i^{4n}i^2 = 1.(-1) = -1$.

$i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = 1.(-i) = -i$.

∴ i-এর যে কোন ধনাত্মক ঘাতের মান $+1$, -1, $+i$ ও $-i$-এর যে কোন একটি হইবে।

(b) i-এর ঋণাত্মক ঘাত :—

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i ; \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1.$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i ; \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{i^4}{i^5} = \frac{1}{i} = -i.$$

সাধারণভাবে n কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$i^{-4n}=\frac{1}{i^{4n}}=\frac{1}{(1)^n}=\frac{1}{1}=1\,;\; i^{-(4n+1)}=\frac{1}{i^{4n+1}}=\frac{1}{i^{4n}.i}=\frac{1}{i}=-i$$

$$i^{-(4n+2)}=\frac{1}{i^{4n+2}}=-1,\; i^{-(4n+3)}=\frac{1}{i^{4n+3}}=-\frac{1}{i}=i$$ ইত্যাদি।

$\therefore$ i-এর যে কোন ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাতের মান $+1$, -1, $+i$ ও $-i$-এর একটি হইবে।

§ 5·4. জটিল সংখ্যা (Complex number) :

একটি বাস্তব সংখ্যা এবং একটি কাল্পনিক সংখ্যার যোগফল বাস্তব বা কাল্পনিক কোন সংখ্যার দ্বারাই প্রকাশ করা যায় না। এই যোগফল নূতন ধরনের সংখ্যাকে সূচিত করে এবং এইরূপ সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা (complex number) বলে। সুতরাং জটিল সংখ্যা হইতেছে $a+ib$ আকারের যুক্ত দুইটি বাস্তব সংখ্যা a এবং b, যেখানে $i^2=-1$। দুইটি জটিল সংখ্যার সমতা, যোগ এবং গুণের সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া হয় :

মনে কর $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল সংখ্যা। এখন

I. $a+ib=c+id$ হইবে কেবলমাত্র যদি $a=c$ এবং $b=d$ হয়।

II. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

III. $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

IV. $(a+ib).(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

V. $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

যোগ এবং গুণের এই সংজ্ঞার জন্য জটিল সংখ্যাসমূহ বীজগণিতের নিয়মগুলি সিদ্ধ করে (অর্থাৎ অপসারণ, বিনিময়, বিচ্ছেদ এবং সংযোগ নিয়মগুলি সিদ্ধ হয়)। অতএব জটিল সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যার ন্যায় ব্যবহার করা হয়।

যদি $z=a+ib$ (a এবং b বাস্তব রাশি) একটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে aকে z-এর বাস্তব অংশ এবং bকে z-এর কাল্পনিক অংশ বলা হয় এবং অংশদ্বয়কে যথাক্রমে $Rl\,(z)$ এবং $Im\,(z)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়,

সুতরাং $Rl\,(a+ib)=a$ এবং $Im\,(a+ib)=b$.

দ্রষ্টব্য : (1) যদি $b=0$ হয়, তবে $a+ib=a$ একটি বাস্তব সংখ্যা। আবার $a=0$ হইলে $a+ib=ib$, একটি কাল্পনিক সংখ্যা। সুতরাং জটিল সংখ্যা হইতে বাস্তব এবং কাল্পনিক উভয় সংখ্যাই পাওয়া যায়।

অতএব জটিল সংখ্যা বাস্তব এবং কাল্পনিক সংখ্যার সাধারণ প্রকাশ (generalised expression).

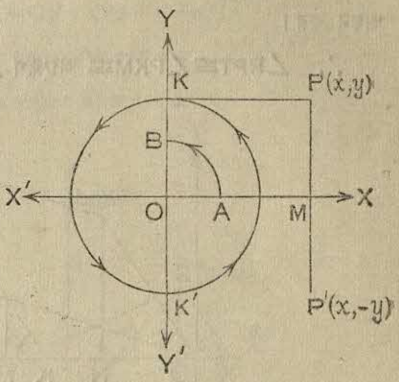
(2) অনেক সময় জটিল সংখ্যাকে $a+ib$ আকারে না লিখিয়া (a, b) আকারে লেখা হয়। যেমন $2+3i$কে $(2, 3)$ এইভাবে লেখা হয়।

§ 5·5. পূরক জটিল সংখ্যা :

সমান অংশবিশিষ্ট দুইটি জটিল রাশির মধ্যে যদি কেবল কাল্পনিক অংশের চিহ্ন দুইটি পরস্পর বিপরীত হয়, তবে একটি জটিল রাশিকে অন্যটির অনুবন্ধী বা পূরক জটিল রাশি (conjugate complex quantity) বলে। যথা, $a+ib$ এবং $a-ib$ দুইটি পূরক জটিল রাশি।

§ 5·6. জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of complex number) :

মনে কর $\overleftrightarrow{XX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YY'}$ দুইটি লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। $\overleftrightarrow{OX}$-এর উপর A যে-কোন একটি বিন্দু। এখন O বিন্দু দ্বারা শূন্য সংখ্যাকে এবং A বিন্দুর দ্বারা 1 সংখ্যাকে সূচিত করা হইল। অনুচ্ছেদ 5·2-এর ন্যায় যে-কোন বাস্তব সংখ্যা 'x'কে $\overleftrightarrow{XX'}$-এর উপর একটি বিন্দু M দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $OM=x\times OA$. অনুরূপে যে-কোন কাল্পনিক সংখ্যা



iyকে $\overleftrightarrow{YY'}$ রেখার উপর একটি বিন্দু K দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $OK=y\times OA$। মনে কর M এবং K বিন্দুতে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। জটিল সংখ্যা $x+iy$কে P বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$কে স্থানাঙ্কতলের ভুজ-অক্ষ এবং কোটি-অক্ষ ধরিয়া, যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, জটিল সংখ্যা $z=x+iy$কে সেই বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হয়।

দ্রষ্টব্য : (1) জটিল সংখ্যাকে যে তলের বিন্দু হিসাবে দেখান হয় সেই তলকে z-তল বা আরগণ্ড তল (Argand plane) বলে।

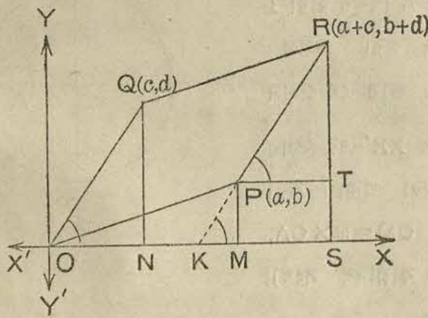
(II) পূরক জটিল সংখ্যা $x-iy$ হইতেছে $\overrightarrow{OX}$ রেখার P বিন্দুর প্রতিবিম্ব P′ বিন্দু এবং ঋণাত্মক জটিল সংখ্যা হইতেছে O বিন্দুতে প্রতিফলিত P বিন্দুর প্রতিবিম্ব Q বিন্দু।

দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ :—

চিত্রে $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ যথাক্রমে বাস্তব-অক্ষ ও কাল্পনিক অক্ষ এবং অক্ষদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর P, Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ সংখ্যা দুইটির জ্যামিতিক প্রকাশ। OP ও OQ যোগ কর এবং OPRQ সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। R বিন্দু $a+ib$ ও $c+id$ জটিল রাশিদ্বয়ের যোগফলের অর্থাৎ $(a+c)+i(b+d)$ রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ।

প্রমাণ : $\overrightarrow{OX}$এর উপর $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ ও $\overline{RS}$ এবং $\overline{RS}$এর উপর $\overline{PT}$ লম্ব অঙ্কন কর।

$\therefore$ $\angle RPT \cong \angle PKM \cong$ অনুরূপ $\angle QON$.



এক্ষণে RPT ও QON ত্রিভুজদ্বয়ে $\angle PTR \cong \angle ONQ$ (সমকোণ)

$\angle RPT \cong \angle QON$

এবং $\overline{PR} \cong \overline{OQ}$ (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু)।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$\therefore$ $\overline{ON} \cong \overline{PT} \cong \overline{MS}$ এবং $\overline{QN} \cong \overline{RT}$;

$\therefore$ $OS = OM + MS = OM + ON = a + c$.

এবং $RS = ST + RT = PM + QN = b + d$.

$\therefore$ R বিন্দু $(a+c)+i(b+d)$ রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ।

দুইটি জটিল রাশির অন্তর ফলের জ্যামিতিক প্রকাশ :—

চিত্রে P ও Q যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ রাশিদ্বয়ের জ্যামিতিক প্রকাশ। OP, OQ, PQ যোগ কর এবং $\overline{OQ}$-কে কর্ণ ধরিয়া OPQR সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। R বিন্দু $a+ib$ ও $c+id$ রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

প্রমাণঃ $\overleftrightarrow{XX'}$-এর উপর $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ ও $\overline{RS}$ লম্ব এবং $\overline{QN}$ এর উপর PT লম্ব টান।

মনে কর বর্ধিত $\overrightarrow{QP}$, $\overleftrightarrow{XX'}$কে K বিন্দুতে ছেদ করে।

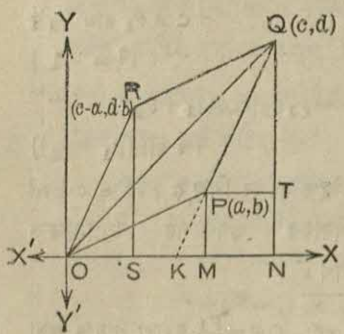
এক্ষণে PQT ও ORS ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle QPT \cong \angle PKM \cong \angle ROS$, $\angle QTP \cong \angle RSO$ এবং $\overline{PQ} \cong \overline{OR}$.

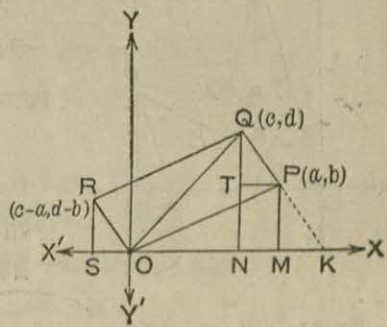
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

সুতরাং প্রথম চিত্রে, $OS = PT = NM = ON - OM = c - a$,

এবং দ্বিতীয় চিত্রে, $OS = PT = MN = OM - ON = a - c$,

কিন্তু OS ঋণাত্মক দৈর্ঘ্য ; $\therefore$ $OS = -(a-c) = c - a$.





আবার উভয় চিত্রে $RS = TQ = QN - TN = QN - PM = d - b$.

$\therefore$ R বিন্দু, $-(a-c)+i(d-b)$ বা $(c-a)+i(d-b)$

অর্থাৎ $c+id$ এবং $a+ib$ রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

দুইটি জটিল রাশির গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ :—

চিত্রে মনে কর $OA = 1$, $OP = p$, এবং $m\angle POA = \theta_1$; $OQ = p_2$ এবং $m\angle AOQ = \theta_2$.

[দ্রষ্টব্য : $m\angle AOB$-র অর্থ $\angle AOB$-র পরিমাপ।]

θ_1 পরিমাপের $\angle QOR$ অঙ্কন কর এবং $OR = p_1 p_2$ কর।

$\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর।

Rবিন্দু $(a+ib)(c+id)$ অর্থাৎ $(ac-bd)+i(ad+bc)$ রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ।

প্রমাণ : $OM = p_1 \cos\theta_1$ এবং $PM = p_1 \sin\theta_1$,

সুতরাং P বিন্দু $p_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ রাশিকে প্রকাশ করে। অনুরূপে Q বিন্দু $p_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ রাশিকে প্রকাশ করে।

এক্ষণে $OA = 1$, $OP = p_1$, $OQ = p_2$ এবং $m\angle AOR = \theta_1 + \theta_2$.

$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1p_2} = \frac{OQ}{OR}$ এবং $m\angle AOP = \theta_1 = m\angle QOR$.

$\therefore \triangle AOP$ ও $\triangle QOR$ সদৃশ।

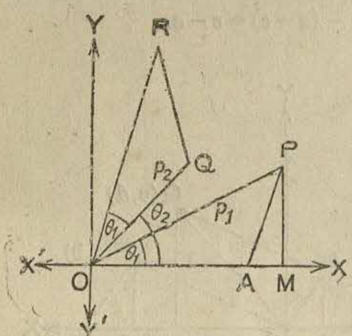
এক্ষণে, R হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্ব অঙ্কন করিয়া দেখান যায় যে R বিন্দু $p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ রাশির প্রকাশক।

আবার, $p_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, p_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= p_1p_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$[\because i^2 = -1]$

$= p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$



সুতরাং R বিন্দু $a+ib$ ও $c+id$ রাশিদ্বয়ের গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

উপরের চিত্রে $m\angle AOR = \theta_2 - \theta_1$ এবং $OR = \frac{p_1}{p_2}$ হইলে প্রমাণ করা যায় যে, R বিন্দু $p_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ও $p_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ রাশিদ্বয়ের ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

§ 5·7. জটিল রাশি সংক্রান্ত উপপাদ্য :

উপ. 1. জটিল রাশির যে কোন ধনাত্মক ঘাতও একটি জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $(a+ib)^2 = a^2 + i^2b^2 + 2iab = (a^2 - b^2) + 2abi$,

ইহা $A + iB$ আকারের বলিয়া জটিল রাশি।

আবার, $(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2ib + 3ai^2b^2 + i^3b^3$

$= a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - ib^3$

$[\because i^2 = -1$ এবং $i^3 = i^2.i = -i]$

$= (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$,

ইহাও $A + iB$ আকারের বলিয়া জটিল রাশি।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $(a+ib)$-এর যে কোন ঘাতই জটিল রাশি হইবে।

উপ. 2. জটিল রাশির যে কোন মূল একটি জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণঃ মনে কর, $a+ib$ $(b\neq 0)$-এর n-তম মূল x,

$\therefore\ \sqrt[n]{a+ib}=x, \quad a+ib=x^n.$

এখন যদি x বাস্তব হয়, তবে x^n বাস্তব হইবে।

$\therefore\ a=x^n$ হইবে, কারণ সমীকরণটির উভয় পক্ষের বাস্তব অংশ সমান। অতএব, এস্থলে b-এর মান শূন্য হইয়া যাইতেছে এবং $a+ib$-এর কাল্পনিক অংশ শূন্য হইলে উহা একটি বাস্তব রাশি হইয়া যাইবে; কিন্তু তাহা কল্পনাবিরুদ্ধ, কারণ স্বীকার করা আছে যে, $a+ib$ একটি জটিল রাশি।

অতএব, x একটি জটিল রাশি অর্থাৎ $a+ib$-এর যে কোন মূলও একটি জটিল রাশি।

§ 5·8. জটিল রাশির বর্গমূল নির্ণয়:

মনে কর, জটিল রাশিটি $a+ib$.

জটিল রাশির যে-কোন মূল জটিল রাশি হয় বলিয়া মনে কর, $\sqrt{a+ib}=x+iy$ (এখানে x ও y দুইটিই বাস্তব)।

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই

$$a+ib=x^2+i^2y^2+2ixy=x^2-y^2+2ixy.$$

$\therefore\ x^2-y^2=a\cdots(1)$ এবং $2xy=b\cdots(2)$.

আবার, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$,

$$\therefore\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots(3).$$

এখন (3) ও (1) যোগ করিয়া পাই

$$2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a, \quad \text{বা,} \quad x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

$$\therefore\ x=\pm\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}$$

আবার, (3) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই

$$2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a, \quad \text{বা,} \quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

$$\therefore\ y=\pm\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}$$

এক্ষণে (2) হইতে দেখা যাইতেছে, b-এর যে চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) xy-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

অতএব, (i) b যদি ধনাত্মক হয়, তবে x ও y দুইটিই ধনাত্মক কিংবা দুইটিই ঋণাত্মক হইবে।

তখন নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}+i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}].$$

(ii) b যদি ঋণাত্মক হয়, তবে x ও y পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত (একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক) হইবে ;

তখন নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}-i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}].$$

§ 5·9. জটিল সংখ্যার মডিউলাস ও অ্যাম্প্লিচিউড (Modulus and amplitude of two complex numbers)

তোমরা জান যে প্রত্যেক বাস্তব রাশির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়।

a^2+b^2-এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে (অর্থাৎ $+\sqrt{a^2+b^2}$কে) $a+ib$ ও $a-ib$ এই দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী (conjugate) জটিল রাশির মডিউলাস (modulus) বলে। ইহাকে সংক্ষেপে mod $(a+ib)$ লেখা হয়। সুতরাং mod $(a+ib)$ একটি বাস্তব সংখ্যা।

mod $(x-iy)=\sqrt{(x)^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$

অতএব, mod $(12+5i)=+\sqrt{12^2+5^2}=13.$

মডিউলাস সংক্রান্ত উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. দুইটি কাল্পনিক (বা জটিল) রাশির গুণফলের মডিউলাস ঐ রাশিদ্বয়ের মডিউলাস দুইটির গুণফলের সমান।

প্রমাণ : মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $z_1=a+ib$ এবং $z_2=c+id$,

সুতরাং উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ ও $\sqrt{c^2+a^2}.$

$\therefore$ ঐ মডিউলাস দুইটির গুণফল $=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}.$

আবার ঐ রাশিদ্বয়ের গুণফল $=z_1z_2$

$$=(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

$\therefore$ ঐ গুণফলের মডিউলাস $=\sqrt{(ac-ba)^2+(bc+ad)^2}$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}.$$

$\therefore$ mod $(z_1z_2)=$ mod $\{(a+ib)(c+id)\}$

$=$ mod $(a+ib)\times$ mod $(c+id)=$ mod $(z_1)\times$ mod $(z_2).$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

উপপাদ্য 2. দুইটি কাল্পনিক (অর্থাৎ জটিল) রাশির ভাগফলের মডিউলাস ঐ রাশিদ্বয়ের মডিউলাস দুইটির ভাগফলের সমান।

প্রমাণ : মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $z_1=a+ib$ এবং $z_2=c+id$, $z_2\neq 0$; সুতরাং উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ ও $\sqrt{c^2+d^2}$.

$\therefore$ ঐ মডিউলাস দুইটির ভাগফল $=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$.

আবার, ঐ রাশিদ্বয়ের ভাগফল

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$\therefore$ ঐ ভাগফলের মডিউলাস $=\sqrt{\left\{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right\}}$

$$=\sqrt{\left\{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

$$\therefore\quad \text{mod}\,\frac{z_1}{z_2}=\text{mod}\,\frac{a+ib}{c+id}=\frac{\text{mod}\,(a+ib)}{\text{mod}\,(c+id)}=\frac{\text{mod}\,z_1}{\text{mod}\,z_2}$$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে দেখ, $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. অতএব, বলা যায় যে দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশির যে কোনটির মডিউলাস রাশিদ্বয়ের গুণফলের ধনাত্মক বর্গমূলের সমান।]

মনে কর $z=x+iy$ জটিল সংখ্যাটি আরগণ্ড তলের P বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে।

$\therefore$ P-এর স্থানাঙ্ক (x, y).

ধরা যাক্ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$\therefore$ $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

যেখানে $r^2=x^2+y^2$ এবং $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

এক্ষণে, r-এর ধনাত্মক বর্গমূল অর্থাৎ $r=+\sqrt{x^2+y^2}$কে $x+iy$ সংখ্যার মডিউলাস (Modulus).

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ কোণটিকে $x+iy$ রাশির অ্যামপ্লিচিউড্ বা আরগুমেন্ট (argument) বলা হয় এবং ইহাকে amp $(x+iy)$ আকারে প্রকাশ করা হয়।

$\therefore$ amp $(x+iy)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$.

যেহেতু $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ এর একাধিক মান আছে, amp $(x+iy)$ বহু মান-বিশিষ্ট। ইহার মধ্যে মুখ্যমান (principal value)-টিকে (অর্থাৎ $-\pi$ এবং π-এর মধ্যেকার মানটিকে) amp $(x+iy)$-এর মুখ্যমান বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : (1) যে-কোন জটিল সংখ্যা z-কে $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $r=$ mod (z) এবং $\theta=$ amp (z). ইহাকে z-এর পোলার (polar) আকার বলা হয়।

(2) $\because$ $z=x+iy$ হইলে ইহার পূরক $\bar{z}=x-iy$, এবং $z.\bar{z}=x^2+y^2$, সুতরাং আমরা বলিতে পারি, mod $(z)=\sqrt{z\bar{z}}$.

(3) $z=0$ সংখ্যার মডিউলাস 0, কিন্তু অ্যামপ্লিচিউড্ অসংজ্ঞেয়।

অ্যামপ্লিচিউড্ সংক্রান্ত উপপাদ্য :

1. যদি z_1 এবং z_2 দুইটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে

amp $(z_1.z_2)=$ amp $(z_1)+$amp (z_2) হইবে,

অর্থাৎ দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের অ্যামপ্লিচিউড্ সংখ্যাদ্বয়ের অ্যামপ্লিচিউডের যোগফলের সমান।

প্রমাণ : মনে কর সংখ্যাদ্বয় হইতেছে $z_1=a+ib$ এবং $z_2=c+id$, সুতরাং উহাদের মডিউলাস ও অ্যামপ্লিচিউড্ যথাক্রমে

amp $(z_1)=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ এবং amp $(z_2)=\tan^{-1}\frac{d}{c}$

এক্ষণে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল,

$z_1.z_2=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$.

$$\therefore \text{ amp } (z_1.z_2)\tan^{-1}\frac{bc+ad}{ac-bd}=\tan^{-1}\frac{\frac{b}{a}+\frac{d}{c}}{1-\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}$$

(লব ও হরকে ac দ্বারা ভাগ করিয়া)

$$=\tan^{-1}\frac{b}{a}+\tan^{-1}\frac{d}{c}=\text{amp } (z_1)+\text{amp } (z_2).$$

II. যদি z_1 এবং $z_2(\neq 0)$ দুইটি জটিল রাশি হয়, তবে

$$\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{amp}(z_1)-\operatorname{amp}(z_2).$$

অর্থাৎ দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের অ্যামপ্লিচিউড ঐ সংখ্যাদ্বয়ের অ্যামপ্লিচিউড্-এর বিয়োগফলের সমান হইবে।

প্রমাণ: পূর্বের ন্যায় মনে কর $z_1=(a+ib)$ এবং $z_2=c+id$.

$\therefore\ \operatorname{amp}(z_1)=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ এবং $\operatorname{amp}(z_2)=\tan^{-1}\frac{d}{c}$.

এক্ষণে, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

$$\therefore\ \operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\tan^{-1}\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}}=\frac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}}{1+\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{d}{c}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\tan^{-1}\frac{d}{c}=\operatorname{amp}(z_1)-\operatorname{amp}(z_2).$$

III. যে কোন জটিল সংখ্যা z-এর জন্য

$$\operatorname{mod}(\bar{z})=\operatorname{mod} z \text{ এবং } \operatorname{amp}(\bar{z})=-\operatorname{amp}(z).$$

প্রমাণ: মনে কর $z=a+ib$. $\quad\therefore\ \bar{z}=a-ib$.

এক্ষণে, $\operatorname{mod}(z)=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\operatorname{mod}(\bar{z})=\sqrt{a^2+(-b)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad\therefore\ \operatorname{mod}(z)=\operatorname{mod}(\bar{z})$.

আবার $\operatorname{amp}(z)=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ এবং $\operatorname{amp}(\bar{z})=\tan^{-1}\frac{-b}{a}=-\tan^{-1}\frac{b}{a}$

$\therefore\ \operatorname{amp}(\bar{z})=-\operatorname{amp}(z)$.

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. গুণ কর $3\sqrt{-2}+4\sqrt{-3}$কে $5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3}$ দ্বারা।

$\sqrt{-2}=\sqrt{2\times -1}=\sqrt{2}\times\sqrt{-1}=\sqrt{2}i$, এবং $\sqrt{-3}=\sqrt{3}.i$

এক্ষণে, $(3\sqrt{-2}+4\sqrt{-3})(5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3})$

$=(3\sqrt{2}i+4\sqrt{3}i)(5\sqrt{2}i-2\sqrt{3}i)$

$=i(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})\times i(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$=i^2(3\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3})$

$=-1(30+20\sqrt{6}-6\sqrt{6}-24)=-(6+14\sqrt{6})$.

উদা. 2. $\frac{1}{4-\sqrt{-3}}$কে বাস্তব মূলদ হরবিশিষ্ট কর।

$$\frac{1}{4-\sqrt{-3}}=\frac{1}{4-i\sqrt{3}}=\frac{1\times(4+i\sqrt{3})}{(4-i\sqrt{3})(4+i\sqrt{3})}=\frac{4+i\sqrt{3}}{(4)^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{4+i\sqrt{3}}{16+3}=\frac{4+\sqrt{3}i}{19}.$$

উদা. 3. $\frac{2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-5}-3\sqrt{-3}}$কে বাস্তব, মূলদ হরবিশিষ্ট কর।

$$\frac{2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-5}-3\sqrt{-3}}=\frac{2\sqrt{5}i+3\sqrt{3}i}{2\sqrt{5}i-3\sqrt{3}i}=\frac{i(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{i(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{47+12\sqrt{15}}{-7}=-\frac{47+12\sqrt{15}}{7}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\frac{x+iy}{x-iy}+\frac{x-iy}{x+iy}.$

প্রদত্ত রাশি$=\frac{(x+iy)^2+(x-iy)^2}{(x)^2-(iy)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$

উদা. 5. সরল কর : $\frac{(a+i)^2}{a-i}-\frac{(a-i)^2}{a+i}.$

প্রদত্ত রাশি$=\frac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a-i)(a+i)}$

$$=\frac{(a+i-a+i)\{(a+i)^2+(a+i)(a-i)+(a-i)^2\}}{(a)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{2i(3a^2-1)}{a^2+1}=\frac{i(6a^2-2)}{a^2+1}.$$

উদা. 6. $\frac{4+3i}{3-2i}$কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।

$$\frac{4+3i}{3-2i}=\frac{(4+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{12+9i+8i+6i^2}{(3)^2-(2i)^2}=\frac{12+17i-6}{9+4}$$

$$=\frac{6+17i}{13}=\frac{6}{13}+\frac{17}{13}i,$$ ইহা $A+iB$ আকারের।

উদা. 7. $16-30i$এর বর্গমূল বাহির কর। [P. U. '36]

মনে কর, $\sqrt{16-30i}=x+iy$

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া $16-30i=x^2-y^2+2ixy$

$\therefore \quad x^2-y^2=16 \cdots\cdots(1)$ এবং $2xy=-30 \cdots\cdots(2)$

$\therefore \quad (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(16)^2+(-30)^2$
$=1156=(34)^2$

$\therefore \quad x^2+y^2=34 \cdots(3)$ [$\because x^2+y^2$ ধনাত্মক, $\therefore x^2+y^2 \neq -34$]

(3) ও (1) যোগ করিয়া পাই $x^2=25, \quad \therefore \quad x=\pm 5$.

(3) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $y^2=9, \quad \therefore \quad y=\pm 3$.

এখানে $\because$ xy ঋণাত্মক, $\therefore$ x ও y পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore \quad x=5$ হইলে $y=-3$, এবং $x=-5$ হইলে $y=3$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=5-3i$ এবং $-5+3i=\pm(5-3i)$.

[দ্রষ্টব্য : এইরূপ বর্গমূল নির্ণয়ের ইহাই সাধারণ প্রণালী। অনেক ক্ষেত্রে পরীক্ষা দ্বারা (by nspection) সহজে বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। পরের উদাহরণগুলি দেখ।]

উদা. 8. $2(21i-20)$-র বর্গমূল বাহির কর। [P.U. '45]

$2(21i-20)=42i-40=2.3.7i+9-49$
$=2.3.7i+(3)^2+(7i)^2$ [$\because (7i)^2=49i^2=-49$]
$=(3+7i)^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(3+7i)$.

উদা. 9. i-এর বর্গমূল বাহির কর।

$\because \quad i=\frac{1}{2}\times 2i=\frac{1}{2}(1+2i-1)=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)$
$=\frac{1}{2}(1+i)^2$,

$\therefore \quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

উদা. 10. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$-এর বর্গমূল বাহির কর। [C. U. '24]

$$\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}$$
$$=\frac{-3+1+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{(\sqrt{-3}+1)^2}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{\sqrt{-3}+1}{2}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-3}+1)$.

উদা. 11. $x+i\sqrt{1-x^2}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$x+i\sqrt{1-x^2}=\frac{2x+2i\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$=\frac{(1+x)-\overline{(1-x)}+2i\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})^2}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})$.

উদা. 12. দেখাও যে $\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0.$

এখানে লব $=1+i^2+2i+1+i^2-2i=2+2i^2=2-2=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{0}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0.$

উদা. 13. $a^2+b^2=1$ হইলে, দেখাও যে x-এর একটি বাস্তব মানের জন্য সমীকরণ $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$টি সিদ্ধ হয়। [C. U. '33]

$\because\ \frac{1-ix}{1+ix}=\frac{a-ib}{1},$

$\therefore\ 1-ix=a+axi-ib-i^2bx$

$=a+axi-ib+bx \quad [\because\ -i^2=+1],$

বা, $1-a+ib=bx+axi+ix$, বা, $(1-a)+ib=x\{b+(a+1)i\}$,

$\therefore\ x=\frac{(1-a)+ib}{b+(a+1)i}$ ইহাকে মূলদ হরবিশিষ্ট করিয়া পাই

$$x=\frac{\{(1-a)+ib\}\{b-(a+1)i\}}{b^2-\{(a+1)i\}^2}=\frac{2b+i(a^2+b^2-1)}{b^2+(a+1)^2}.$$

এক্ষণে দেখা যাইতেছে যে, যদি $a^2+b^2-1=0$ হয় অর্থাৎ যদি $a^2+b^2=1$ হয়, তবে $i(a^2+b^2-1)=0$ হইবে এবং তখন x-এর মান $\frac{2b}{b^2+a^2+2a+1}$

বা, $\frac{2b}{2a+2}$ বা $\frac{b}{a+1}$ হইবে এবং এই মানটি বাস্তব।

অতএব প্রমাণিত হইল যে, $a^2+b^2=1$ হইলে x-এর একটি বাস্তব মান দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

উদা. 14. $12+5i$-এর মডিউলাস নির্ণয় কর।

এখানে $\text{mod }\{(12+5i)\}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$

উদা. 15. $(3+4i)(5+12i)$-এর মডিউলাস ও অ্যাম্প্লিচিউড্ বাহির কর।

এখানে $\text{mod }\{(3+4i)(5+12i)\}=\text{mod }(3+4i)\times\text{mod }(5+12i)$

$=\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25}\times\sqrt{169}=5\times13=65.$

$\text{amp}\{(3+4i)(5+12i)\}=\text{amp}(3+4i)+\text{amp}(5+12i)$

$=\tan^{-1}\frac{4}{3}\tan^{-1}\frac{12}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{5}}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{56}{15}}{-\frac{11}{5}}=-\tan^{-1}\frac{55}{33}.$

উদা. 16. $\frac{m+in}{p+iq}=x+iy$ হইলে দেখাও যে $\frac{m-in}{p-iq}=x-iy$.

$\because\ \frac{m+in}{p+iq}=x+iy,\ \therefore\ \frac{(m+in)(p-iq)}{(p+iq)(p-iq)}=x+iy,$

বা, $\frac{(mp+nq)+i(np-mq)}{p^2+q^2}=x+iy.$

বা, $\frac{mp+nq}{p^2+q^2}+i.\frac{np-mq}{p^2+q^2}=x+iy,$

$\therefore\ x=\frac{mp+nq}{p^2+q^2},\ y=\frac{np-mq}{p^2+q^2}.$

এক্ষণে, $\frac{m-in}{p-iq}=\frac{(m-in)(p+iq)}{(p-iq)(p+iq)}=\frac{(mp+nq)-i(np-mq)}{p^2+q^2}$

$=\frac{mp+nq}{p^2+q^2}-i\frac{np-mq}{p^2+q^2}=x-iy.$

প্রশ্নমালা 5

গুণ কর :—

1. $2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2}$কে $5\sqrt{-3}-2\sqrt{-2}$ দ্বারা।
2. $4\sqrt{-5}-2\sqrt{-7}$কে $5\sqrt{-5}-3\sqrt{-7}$ দ্বারা।
3. $2\sqrt{-3}+5\sqrt{-7}$কে $4\sqrt{-6}-3\sqrt{-2}$ দ্বারা।

নিম্নলিখিতগুলিকে বাস্তব হরবিশিষ্ট কর :—

4. $\frac{1}{3-\sqrt{-5}}$. 5. $\frac{3+\sqrt{-5}}{2-\sqrt{-3}}$.

6. $\frac{2-7i}{3+5i}-\frac{2+7i}{3-5i}$ 7. $\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}$ (x, y বাস্তব)

8. সরল কর : $\frac{2a+ib}{a+2ib}-\frac{2a-ib}{a-2ib}$.

নিম্নলিখিতগুলিকে A+iB আকারে প্রকাশ কর :

9. $\frac{2+3i}{3-2i}$ 10. $\frac{(2+i)^2}{3+i}$ 11. $\frac{(2-i)^2}{2-3i}$ [U. U. '48]

12. $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ 13. $(2+i)(3+i)$

14. $(2+i)(3+2i)(4-7i)$.

বর্গমূল নির্ণয় কর :

15. $4+6\sqrt{-5}$ 16. $7-30\sqrt{-2}$ [P. U. '48]

17. $-11-60\sqrt{-1}$ [P. U. '44] 18. $7-24i$

19. $-7-24i$ [P. U. '39] 20. $-i$

21. $2(15i-8)$ 22. $\dfrac{1+3\sqrt{-11}}{2}$

23. $\dfrac{23+102i}{3+2i}$ 24. $4x^2-y^2+4xyi$

25. $3a+i\sqrt{a^4-7a^2+1}$ 26. $a^2+\dfrac{1}{a^2}-4i\left(a-\dfrac{1}{a}\right)-6$.

27. সরল কর : $(2+3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}+(2-3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}$ [P. U. '59]

দেখাও যে,

28. $\sqrt{i}\sqrt{-i}=\sqrt{-2}$. 29. $\dfrac{1+i}{1-i}=i$.

30. $(2+i)^{-2}+(2-i)^{-2}=\frac{6}{25}$. 31. $[\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}\}^6]^n=1$.

32. $(19+5\sqrt{-24})^{\frac{1}{2}}+(19-5i\sqrt{24})^{\frac{1}{2}}=10$.

33. $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}\})^{15}+\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^{15}$ এর মান নির্ণয় কর।

34. মান নির্ণয় কর : $(5+12i)^{-\frac{1}{2}}+(5-12i)^{-\frac{1}{2}}$.

নিম্নলিখিতগুলির মডিউলাস ও অ্যামপ্লিচিউড্ নির্ণয় কর :

35. $4+3i$ 36. $12-5i$ 37. $(3-4i)(12+5i)$

38. $\dfrac{20+15i}{12+5i}$ 39. $\dfrac{(2+i)(1-3i)}{(3+i)(2+3i)}$

40. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^2+1

41. 1-এর চতুর্থমূল নির্ণয় কর।

42. যদি $a=2+3i$ এবং $b=2-3i$ হয়, তবে a^2+ab+b^2-এর মান নির্ণয় কর।

43. $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$কে দুইটি বর্গের সমষ্টি রূপে প্রকাশ কর।

44. যদি $x=-2+\sqrt{-3}$ হয়, তবে $x^4+8x^3+24x^2+32x+17$ এর মান নির্ণয় কর।

45. যদি $\sqrt{x-iy}=a-ib$ হয়, তবে দেখাও যে $\sqrt{x+iy}=a+ib$.

46. যদি $\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\sqrt[3]{x-iy}=a-ib$ এবং (ii) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=4(a^2-b^2)$. [C. U.]

ষষ্ঠ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণ তত্ত্ব

[Quadratic Equations and Theory of Quadratic Equation]

§ 6·1. সমীকরণ ও অভেদ (Equations and Identities) :

$$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0 \cdots\cdots(1)$$

এবং $x^2-5x+6=0 \cdots\cdots(2)$.

উপরের সম্পর্ক দুইটি ভাল করিয়া পরীক্ষা করা যাক।

লক্ষ্য কর যে, সম্পর্ক-(1) x, y বা z-এর যে কোন মানের জন্যই সত্য বা সিদ্ধ হয়। কিন্তু দ্বিতীয় সম্পর্কটি 2 বা 3 ভিন্ন x-এর অন্য কোন মানের জন্য সিদ্ধ হয় না।

(1) সম্পর্কটি একটি অভেদের উদাহরণ, আর সম্পর্ক-(2) একটি সমীকরণ। দুইটি রাশিমালার অন্ততঃ একটিতে যদি অন্ততঃ একটি অজ্ঞাত বা চলরাশি থাকে, তবে উহাদের যে সমতার সম্পর্ক ঐ অজ্ঞাত বা চলরাশি বা চল রাশিসমূহের সকল মানের জন্য সিদ্ধ হয়, তাহাকে একটি **অভেদ** বলা হয়। সম্পর্কটি যদি ঐ অজ্ঞাত বা চলরাশি বা চলরাশিসমূহের সকল মানের জন্য সিদ্ধ না হয়, তবে সম্পর্কটিকে একটি **সমীকরণ** বলে। অজ্ঞাত রাশিটির অন্ততঃ একটি মানের জন্য অথবা অজ্ঞাত রাশিসমূহের অন্ততঃ এক প্রস্থ মানের জন্য কোন সমীকরণ সিদ্ধ হইলে সমীকরণটিকে সমাধানযোগ্য (solvable) বলা হয়। ঐ মান বা ঐ এক প্রস্থ মানকে সমীকরণটির বীজ (root) বলা হয়।

প্রশ্নমালা 6A

প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিতগুলি এক একটি অভেদ, সমীকরণ নহে :—

1. $(x-2)(x-4)-2(x-2)(x-5)+(x-4)^2=4.$

2. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$

3. $p\dfrac{(x-q)(x-r)}{(p-q)(p-r)}+q\dfrac{(x-r)(x-p)}{(q-r)(q-p)}=x.$

4. $a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$

5. $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$

[C. U. 1884]

§ 6·2. দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালা (Quadratic equation and quadratic expression) :

যে সমীকরণে চলরাশি বা চলরাশিসমূহের সর্বোচ্চ ঘাত 2, তাহাকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

$x^2-7x+12=0$ সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণের উদাহরণ ; এখানে অজ্ঞাত রাশি x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 2.

$$x^2-3x=4x+7\cdots\cdots(1)$$
$$x^2-y=2\cdots\cdots(2)$$
$$x^2+y^2=25\cdots\cdots(3)$$
$$x^2+2gx+2fy+c=0\cdots\cdots(4)$$
$$xy=2fx+2gy\cdots\cdots(5)$$
$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)\cdots\cdots(6)$$
$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$
$$(a,b,h)\neq(0,0,0)\cdots\cdots(7)$$

প্রভৃতি দ্বিঘাত সমীকরণের উদাহরণ।

সমীকরণ-(1) x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণ-(2) x এবং y-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ;

সমীকরণটিতে x-এর দ্বিঘাত এবং y-এর একঘাত আছে। সমীকরণ-(3)-এ x ও y উভয়েরই দ্বিঘাত রহিয়াছে। সমীকরণ-(4) x-এর দ্বিঘাত এবং y-এর একঘাত সমীকরণ এবং উহার ডানপক্ষ শূন্য। সমীকরণ-(5) x ও y-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সমীকরণ (6) x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার। লক্ষ্য কর এখানে $a\neq0$, $a=0$ হইলে সমীকরণটিতে দ্বিঘাতযুক্ত কোন পদ থাকে না এবং সমীকরণটি একঘাত সমীকরণ হয়। $b=0$ হইলে সমীকরণটির আকার হয় $ax^2=-c$ এবং ইহাকে যে একটি বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ (Pure quadratic equation) বলে তাহা তোমরা মাধ্যমিক স্তরে শিখিয়াছ। $b\neq0$ হইলে, সমীকরণটিকে একটি মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ (adfected quadratic equation) বলে। $ax^2+bx+c(a\neq0)$ রাশিমালাটি দ্বিঘাত রাশিমালার সাধারণ আকার।

সমীকরণ-(7) x ও y-এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার। a, b ও h প্রত্যেকটি শূন্য হইলে সমীকরণটিতে কোন দ্বিঘাতযুক্ত পদ থাকে না এবং সমীকরণটি একটি একঘাত সমীকরণে পরিণত হয়। সমীকরণ-(7)-এর বামপক্ষ x ও y-এর দ্বিঘাত রাশিমালার সাধারণ আকার।

§ 6·3. **ভাগশেষ উপপাদ্য, উৎপাদক উপপাদ্য এবং বীজগণিতের মৌল উপপাদ্য** (Remainder Theorem, Factor Theorem and Fundamental Theorem of General Algebra) :

1. **ভাগশেষ উপপাদ্য :** বাস্তব সহগযুক্ত কোন রাশিমালাকে $x-h$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগশেষটি ঐ রাশিমালায় x-স্থানে h বসাইয়া পাওয়া যায়।

উপপাদ্যটি একটি দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c-র $(a\neq0)$ জন্য নিয়ে প্রমাণ করা হইতেছে।

$$\begin{array}{l|l|l}
x-h & ax^2+bx+c & ax+ah+b \\
 & ax^2-axh & \\
\hline
 & axh+bx+c & \\
 & axh-ah^2 & \\
\hline
 & ah^2+bx+c & \\
 & bx-bh & \\
\hline
 & ah^2+bh+c &
\end{array}$$

উপরের ভাগ হইতে দেখা গেল, ax^2+bx+c $(a\neq0)$ রাশিমালাকে $x-h$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হয় ah^2+bh+c, অর্থাৎ x-এর স্থানে রাশিমালাটিতে h বসাইয়া ভাগশেষটি পাওয়া যায়। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল। এই উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে নিম্নের উৎপাদক উপপাদ্যটি পাওয়া যায়।

2. **উৎপাদক উপপাদ্য :** x-চলরাশিযুক্ত কোন রাশিমালায় x-এর স্থলে h বসাইলে যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তবে $x-h$ ঐ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক হয়।

প্রমাণ : মনে কর রাশিমালাটি ax^2+bx+c $(a\neq0)$. $x-h$ দ্বারা রাশিমালাটিকে ভাগ করিলে ভাগশেষ হয়, ah^2+bh+c (ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী)।

সুতরাং $ah^2+bh+c=0$ হইলে ভাগ মিলিয়া যাইবে এবং $x-h$, ax^2+bx+c-র একটি উৎপাদক হইবে। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

3. **বীজগণিতের মৌল উপপাদ্য** (Fundamental Theorem of General algebra) : বাস্তব সহগযুক্ত প্রত্যেক সমীকরণের অন্ততঃ একটি বাস্তব বা জটিল বীজ থাকে। (Every equation with real coefficients possesses at least one root real or complex).

তোমরা উপপাদ্যটির বিবৃতি (statement) জানিয়া রাখ। ইহার প্রমাণ দেওয়া বর্তমানক্ষেত্রে সম্ভব নহে।

§ 6·4. একটি চলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান ও বীজদ্বয়ের সম্পর্ক :

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ হইল একটিমাত্র চলরাশিযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার। এক্ষণে, বীজগণিতে মৌল উপপাদ্য অনুযায়ী, এই সমীকরণের অন্ততঃ একটি বীজ থাকিবে। মনে কর এই বীজ α, সুতরাং ax^2+bx+c রাশিমালায় x-স্থলে α বসাইলে রাশিমালাটির মান শূন্য হইবে। সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $x-\alpha$, ax^2+bx+c-র একটি উৎপাদক। মনে কর, $x-\alpha$ দ্বারা ax^2+bx+cকে ভাগ করিলে ভাগফল হয় $ax+h$ [যেহেতু ভাজ্য ও ভাজক যথাক্রমে দ্বিঘাত ও একঘাত রাশিমালা, সুতরাং ভাগফলও একঘাত রাশিমালা হইবে।]

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=(x-\alpha)(ax+h)=a\left(x-\alpha\right)\left(x+\frac{h}{a}\right)$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta)\left[\beta=-\frac{h}{a}\text{ ধরিয়া}\right]\cdots\cdots(1)$$

এক্ষণে, $x=\beta$ বসাইলে,

$$ax^2+bx+c=a(\beta-\alpha)(\beta-\beta)=0$$

সুতরাং β সমীকরণটির আর একটি বীজ।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ পাওয়া গেল।

এক্ষণে, মনে কর α ও β হইতে ভিন্ন সমীকরণটির আর একটি বীজ γ পাওয়া সম্ভব।

$\therefore$ $a\gamma^2+b\gamma+c=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=0$ হইবে [(1) হইতে], কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ, $a\neq 0$ (প্রদত্ত) এবং α ও β হইতে γ ভিন্ন হওয়ায়, $\gamma-\alpha\neq 0$, $\gamma-\beta\neq 0$. সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি বীজ থাকে এবং দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

এক্ষণে, উপরের (1)-একটি অভেদ হওয়ায় উহার উভয়পক্ষের x^2 ও x-এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমান হইবে।

$\therefore$ $b=-a(\alpha+\beta)$ এবং $c=a\alpha\beta$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের

বীজদ্বয়ের যোগফল $=-\frac{b}{a}$.

এবং **বীজদ্বয়ের গুণফল** $=\frac{c}{a}$.

এক্ষণে, $\because \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots(2)$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots(3)$,

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ca}{a^2}$$

$$\therefore \quad \alpha-\beta=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে, (2) ও (4) যোগ করিয়া পাই,

$$2\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a} \quad \text{বা,} \quad \alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

আবার (2) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$2\beta=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{a}, \quad \text{বা,} \quad \beta=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

সুতরাং সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$-এর বীজদ্বয় হইল,

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ এই অনুচ্ছেদে বীজগণিতে সাধারণ উপপাদ্য হইতে নিম্নলিখিত তথ্যগুলি প্রমাণ করা হইল।

(1) প্রত্যেক দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং দুইটি মাত্র বীজ থাকে।

(2) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$; $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

অর্থাৎ বীজদ্বয়ের যোগফল $=-\dfrac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

(3) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইল,

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

তোমরা মাধ্যমিক স্তরে উৎপাদক নির্ণয় করিয়া দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান প্রণালী শিখিয়াছিলে। যেহেতু সকল রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব নয়, সুতরাং তখন সকল দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় তোমাদের পক্ষে সম্ভব ছিল না। এক্ষণে সাধারণ সূত্র অনুযায়ী তোমরা সকল বাস্তব সহগযুক্ত সমীকরণ সমাধানে সমর্থ হইবে।

§ 6·5. (i) $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণগুলিকে x^2-এর সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ এই আকারে প্রকাশ করিলে, পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত x-এর সহগ বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও x বর্জিত পদটি বীজদ্বয়ের গুণফল হইবে।

যেমন, $4x^2-3x-1=0$ সমীকরণকে x^2-এর সহগ 4 দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়, $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=0$. এখানে x-এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া পাওয়া যায় $\frac{3}{4}$ এবং x-বর্জিত পদ হইল $-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{3}{4}$ এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=-\frac{1}{4}$.

অতএব (i) **বীজ দুইটির সমষ্টি = পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত x-এর সহগ**

এবং (ii) **বীজ দুইটির গুণফল = x-বর্জিত তৃতীয় পদ।**

সুতরাং কোন সমীকরণের দুইটি বীজ জানা থাকিলে সমীকরণটি নির্ণয় করা সম্ভব। এখানে বীজদ্বয়ের সমষ্টি লইয়া উহার চিহ্ন বিপরীত করিলে x-এর সহগ এবং বীজদ্বয়ের গুণফল x-বর্জিত পদ হইবে।

যেমন, কোন সমীকরণের দুইটি বীজ $-\frac{2}{3}$ ও $\frac{1}{2}$, সমীকরণটি নির্ণয় করিতে হইবে। বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$, উহাদের গুণফল $=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$. অতএব, সমীকরণে x-এর সহগ হইবে $\frac{1}{6}$ ও x-বর্জিত পদ হইবে $-\frac{1}{3}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$, বা, $6x^2+x-2=0$.

§ 6·6. পূরক বীজ (Conjugate roots)

তোমরা শিখিয়াছ $p+\sqrt{q}$ ও $p-\sqrt{q}$ এই দুইটি করণীর যে কোন একটিকে অপরটির পূরক করণী (Conjugate Surd) বলে এবং জটিল রাশির ক্ষেত্রে $p+iq$ ও $p-iq$ এই দুইটি জটিল রাশির যে কোন একটিকে অপরটির পূরক জটিল রাশি (Conjugate Complex quantity) বলে।

(a) **উপপাদ্য। মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হইলে অপর বীজটি পূরক অমূলদ হইবে।**

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের a, b, c সহগগুলি মূলদ এবং এই সমীকরণের একটি বীজ $\alpha+\sqrt{\beta}$.

প্রমাণ করিতে হইবে, ইহার অপর বীজটি $\alpha-\sqrt{\beta}$ হইবে।

প্রমাণ। $\because$ $\alpha+\sqrt{\beta}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ,

$\therefore$ এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\ a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0$$

বা, $(a\alpha^2+b\alpha+a\beta+c)+\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)=0.$

এখানে দেখা যাইতেছে, একটি মূলদ ও অপরটি অমূলদ, এই রাশি দুইটির সমষ্টি শূন্য। ইহা সম্ভব হইতে হইলে উহারা পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে।

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+a\beta+c=0\cdots$(i) এবং $2a\alpha+b=0\cdots$(ii)

এক্ষণে, ax^2+bx+c রাশিতে x-এর মান $\alpha-\sqrt{\beta}$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c$$
$$=(a\alpha^2+b\alpha+a\beta+c)-\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)$$
$$=0-\sqrt{\beta}\times 0 \quad \text{[(i) ও (ii) হইতে মান বসাইয়া]}$$
$$=0.$$

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের $\alpha+\sqrt{\beta}$ একটি বীজ হইলে, আর একটি বীজ $\alpha-\sqrt{\beta}$ হইবে।

(*b*) **উপপাদ্য। বাস্তব সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ জটিল হইলে অপর বীজটি পুরক জটিল হইবে।**

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের a, b, c সহগগুলি বাস্তব এবং ইহার একটি বীজ $\alpha+i\beta$ (α, β বাস্তব).

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার অপর বীজ $\alpha-i\beta$ হইবে।

প্রমাণ। $\because\ \alpha+i\beta$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ,

$\therefore$ এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ a(\alpha+i\beta)^2+b(\alpha+i\beta)+c=0,$

বা, $(a\alpha^2+b\alpha-a\beta^2+c)+i(2a\alpha\beta+b\beta)=0$ [$\because i^2=-1.$]

এখানে দেখা যাইতেছে একটি বাস্তব ও একটি কাল্পনিক এই দুই রাশির সমষ্টি শূন্য। ইহা সম্ভব হইতে হইলে উহারা পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে।

$\therefore\ a\alpha^2+b-a\beta^2+c=0\cdots$(i) এবং $2a\alpha\beta+b\beta=$(ii)

এক্ষণে, ax^2+bx+c রাশিতে x-এর মান $\alpha-i\beta$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$a(\alpha-i\beta)^2+b(\alpha-i\beta)+c$$
$$=(a\alpha^2+b\alpha-a\beta^2+c)-i(2a\alpha\beta+b\beta)$$
$$=0-i\times 0 \quad \text{[(i) ও (ii) হইতে মান বসাইয়া]}$$
$$=0.$$

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ $\alpha+i\beta$ হইলে, দ্বিতীয় বীজটি $\alpha-i\beta$ হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** (*i*). অনুচ্ছেদ 6·6(*a*) হইতে ইহা বেশ বুঝা যায় যে, মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ ও অপর বীজ মূলদ এরূপ হওয়া সম্ভব নহে।

(ii) আবার, অনুচ্ছেদ 6·6(b) হইতে ইহা ভালভাবেই দেখা যায় যে, বাস্তব সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ বাস্তব ও অপর বীজটি কাল্পনিক এরূপ হওয়া সম্ভব নহে।]

§ 6·7. প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric expression)

দুই রাশিযুক্ত যে রাশিমালায় রাশি দুইটিকে পরস্পরের পরিবর্তে লিখিলে রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে তাহাকে ঐ রাশিদ্বয়ের প্রতিসম রাশিমালা বলে। $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$; $(\alpha+\beta)^3$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ ইত্যাদি রাশিমালাগুলি প্রতিসম রাশিমালা, কারণ α-এর পরিবর্তে β এবং β-এর পরিবর্তে α লিখিলে প্রত্যেকটি রাশিমালাই অপরিবর্তিত থাকে। $\alpha-\beta$ প্রতিসম রাশিমালা নহে, কারণ α এবং βকে পরস্পরের পরিবর্তে লিখিলে রাশিমালাটি $\beta-\alpha$ হয় যাহা $\alpha-\beta$-র সঙ্গে সমান নহে। এইরূপে $3\alpha+4\beta$, $\alpha^3+\beta^2$, $\frac{\alpha}{\beta}$ ইত্যাদি প্রতিসম নহে।

প্রমাণ করা যায় α এবং β-র যে কোন প্রতিসম রাশিমালাকে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এই দুইটি প্রতিসম রাশিমালার দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যেমন $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$,

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}, \text{ ইত্যাদি}$$

উদাহরণমালা 6A

উদা. 1. α, β যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ হয়, তবে p ও q দ্বারা $\alpha^3+\beta^3$ ও $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$-র মান নির্ণয় কর।

$x^2+px+q=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α ও β.

$\therefore\ \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

এখন, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=(-p)^3-3q(-p)=-p^3+3pq\,;$$

এবং $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}$.

উদা. 2. যদি α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ হয় তবে $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$-এর মান বাহির কর। [C. U. 1943]

যেহেতু $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α ও β.

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, বা, $a\alpha+a\beta=-b$ [a দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore\ a\alpha+b=-a\beta$ এবং $a\beta+b=-a\alpha.$

এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}.$

এখন, $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}=\frac{1}{(-a\beta)^3}+\frac{1}{(-a\alpha)^3}=\frac{1}{-a^3\beta^3}+\frac{1}{-a^3\alpha^3}$

$$=\frac{\alpha^3+\beta^3}{-a^3\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{-a^3(\alpha\beta)^3}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{-a^3\left(\frac{c}{a}\right)^3}$$

$$=\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}}{-c^3}=\frac{-b^3+3abc}{-a^3c^3}=\frac{b^3-3abc}{c^3a^3}.$$

উদা. 3. যদি α, β ও α', β' যথাক্রমে $x^2-px+q=0$ ও $x^2-p'x+q'=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '13]

$\because$ প্রদত্ত $x^2-px+q=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α ও β,

$\therefore\ \alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=q.$

আবার, $\because$ α', β' প্রদত্ত $x^2-p'x+q'=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ,

$\therefore\ \alpha'+\beta'=p'$ এবং $\alpha'\beta'=q'.$

এখন, $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$

$=2(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha'^2+\beta'^2)-2\alpha'(\alpha+\beta)-2\beta'(\alpha+\beta)$

$=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'-(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')\}$

$=2\{p^2-2q+p'^2-2q'-p'p\}.$

উদা. 4. α, β যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে এরূপ একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ হইবে।

[C. U. 1877 ; P. U.]

$\because$ α ও β প্রদত্ত $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ,

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

উদ্দিষ্ট সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

$$=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ca}{ca}$$

আবার, ঐ বীজদ্বয়ের গুণফল $=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{b^2-2ca}{ca}x+1=0$

অর্থাৎ $cax^2-(b^2-2ca)x+ca=0$.

উদা. 5. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যেন তাহার বীজদ্বয় $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজ দুইটির বর্গ হয়। [A. U. '20]

মনে কর, $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি α ও β

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় α^2 ও β^2.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\alpha+\beta=-1$ এবং $\alpha\beta=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=-1$;

এবং উহাদের গুণফল $=\alpha^2\beta^2=(1)^2=1$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2+x+1=0$.

উদা. 6. $x^2-7x+12=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক বীজ-বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, $x^2-7x+12=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β.

$\therefore$ উদ্দিষ্ট সমীকরণের বীজ দুইটি হইবে $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\alpha+\beta=7$ এবং $\alpha\beta=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{12}$,

এবং উহাদের গুণফল $=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{12}$.

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{7}{12}x+\frac{1}{12}=0$

বা, $12x^2-7x+1=0$.

উদা. 7. এরূপ একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার α, β বীজ দুইটি $\alpha^2+\beta^2=113$ ও $\alpha\beta=28$ এই শর্তদ্বয় সিদ্ধ করে।

এখানে $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=113+56=169$,

$\therefore\ \alpha+\beta=\pm13$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2\pm13x+28=0$.

উদা. 8. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটির সমষ্টির বর্গ ও অন্তরফলের বর্গ বীজ হইবে এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। [Raj. '45]

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

শর্তানুসারে নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

$$=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$=2\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)\right\}=2\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}=\frac{2(b^2-2ca)}{a^2};$$

আবার, উহাদের গুণফল

$$=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=\frac{b^2}{a^2}\times\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{b^2-4ca}{a^2}$$

$$=\frac{b^2(b^2-4ca)}{a^4}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{2(b^2-2ca)}{a^2}x+\frac{b^2(b^2-4ca)}{a^4}=0,$

বা, $a^4x^2-2a^2(b^2-2ca)x+b^2(b^2-4ca)=0.$

উদা. 9. a যদি b-এর সমান না হয়, কিন্তু $a^2=5a-3$ ও $b^2=5b-3$ হয়, তবে এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজ হইবে $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$. [C.U. '50]

এখানে $a\neq b$, অথচ $a^2=5a-3$ ও $b^2=5b-3$. ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, $x^2=5x-3$ বা $x^2-5x+3=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি a ও b

$\therefore \quad a+b=5$ এবং $ab=3.$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজ দুইটি $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$.

এক্ষণে, উহাদের সমষ্টি $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$$=\frac{25-6}{3}=\frac{19}{3};$$

এবং উহাদের গুণফল $=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{19}{3}x+1=0.$

বা, $3x^2-19x+3=0.$

উদা. **10.** মূলদ সহগবিশিষ্ট এরূপ একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার একটি বীজ $3-\sqrt{2}$.

শর্তানুসারে নির্ণেয় সমীকরণটির সহগগুলি মূলদ হইতে হইবে। উহার একটি বীজ $3-\sqrt{2}$ অমূলদ। $\therefore$ অপর বীজটি প্রতিযোগী অমূলদ হইবে অর্থাৎ $3+\sqrt{2}$ হইবে। [অনুচ্ছেদ 6·4 দেখ।]

এখন বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}=6$

এবং উহাদের গুণফল $=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=9-2=7$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-6x+7=0$.

উদা. **11.** যদি α ও β এবং γ ও δ যথাক্রমে $ax^2+bx+c=0$ ও $lx^2+mx+n=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে $\alpha\gamma+\beta\delta$ ও $\alpha\delta+\beta\gamma$ বীজবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [U. P. '39, '49]

$\because$ α ও β প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়, $\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

আবার, $\because$ γ ও δ দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়,

$\therefore$ $\gamma+\delta=-\frac{m}{l}$ এবং $\gamma\delta=\frac{n}{l}$.

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

$$=\alpha\gamma+\beta\delta+\alpha\delta+\beta\gamma=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)$$

$$=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=-\frac{b}{a}\times-\frac{m}{l}=\frac{bm}{al};$$

ঐ বীজদ্বয়ের গুণফল

$$=(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)=\alpha^2\gamma\delta+\beta^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2+\alpha\beta\delta^2$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)\gamma\delta+(\gamma^2+\delta^2)\alpha\beta$$

$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\gamma\delta+\{(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\}\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\frac{n}{l}+\left(\frac{m^2}{l^2}-\frac{2n}{l}\right)\frac{c}{a}=\frac{n(b^2-2ac)}{a^2l}+\frac{c(m^2-2ln)}{al^2}$$

$$=\frac{ln(b^2-2ac)+ac(m^2-2ln)}{a^2l^2}=\frac{b^2ln+m^2ac-4acln}{a^2l^2}.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2-\frac{bm}{al}x+\frac{b^2ln+m^2ac-4acln}{a^2l^2}=0,$$

বা, $a^2l^2x^2-ablmx+b^2ln+m^2ac-4acln=0$.

উদা. 12. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $3:4$ হইলে প্রমাণ কর যে, $12b^2=49ac$.

মনে কর সমীকরণটির বীজদ্বয় 3α ও 4α.

$$\therefore\ 3\alpha+4\alpha=-\frac{b}{a}\cdots\cdots(1)$$

এবং $3\alpha.4\alpha=\frac{c}{a}\cdots\cdots(2)$

(1) হইতে পাই, $7\alpha=-\frac{b}{a}$, বা, $49\alpha^2=\frac{b^2}{a^2}$, বা, $\alpha^2=\frac{b^2}{49a^2}$.

(2) হইতে পাই, $12\alpha^2=\frac{c}{a}$, বা, $\alpha^2=\frac{c}{12a}$

সুতরাং $\frac{b^2}{49a^2}=\frac{c}{12a}$, বা, $12b^2=49ac$.

উদা. 13. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $1:r$ হইলে, প্রমাণ কর যে $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$. [C. U. '34]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ α, সুতরাং অপর বীজ $r\alpha$ ($\because$ বীজদ্বয়ের অনুপাত$=1:r$).

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\alpha+r\alpha=-\frac{b}{a}$, বা, $\alpha(1+r)=-\frac{b}{a}\cdots\cdots$(i)

এবং $\alpha^2r=\frac{c}{a}\cdots\cdots$(ii)

এখন (i)-এর উভয় পক্ষের বর্গকে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{\alpha^2(1+r)^2}{\alpha^2r}=\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}},\quad \text{বা,}\quad \frac{(1+r)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$$

উদা. 14. যদি $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $p:q$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$.

[U. P. '41, 46. '56 ; Raj. '54 ; H. S. '63]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি α ও β.

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{n}{l},\ \alpha\beta=\frac{n}{l}\text{ এবং শর্তানুযায়ী }\frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}.$$

$$\text{এখন, } \sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}} \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$$

$$=\frac{\frac{n}{l}}{\sqrt{\frac{n}{l}}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=-\sqrt{\frac{n}{l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0.$$

উদা. 15. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের ধ্রুবক রাশিগুলির পরস্পর সম্বন্ধ কি হইলে উহার বীজদ্বয়ের সমষ্টি বীজদ্বয়ের অন্তরের তিনগুণ হইবে ? [C. U. '47]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $\alpha>\beta$.

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, $\alpha+\beta=3(\alpha-\beta)$, বা, $\alpha=2\beta\cdots$(i)

আবার, $\because$ α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ,

$\therefore$ $\alpha+\beta=-p$, বা, $3\beta=-p\cdots$(ii) [(i) হইতে]

এবং $\alpha\beta=q$, বা $2\beta^2=q\cdots$(iii) [(ii) হইতে]

এখন (ii)-এর উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া ও তাহাকে (iii) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\frac{9\beta^2}{2\beta^2}=\frac{p^2}{q}$, $2p^2=9q$. $\therefore$ নির্ণেয় সম্বন্ধ হইল, $2p^2=9q$.

উদা. 16. যদি $x^2+2px+q=0$ ও $x^2+2qx+p=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্তরফল ধ্রুবক হয়, তবে দেখাও যে $p+q+1=0$ হইবে, যদি $p=q$ না হয়। [C. U. '44]

মনে কর, প্রথম সমীকরণের বীজ দুইটি α ও β এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজ দুইটি γ ও δ.

$\therefore$ $\alpha+\beta=-2p$ ও $\alpha\beta=q$.

এবং $\gamma+\delta=-2q$ ও $\gamma\delta=p$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই উভয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তরফল একটি ধ্রুবক, অর্থাৎ $\alpha-\gamma=k$ (ধ্রুবক) এবং $\beta-\delta=k$ (ধ্রুবক) ;

$\therefore$ $\alpha-\gamma=\beta-\delta$, বা, $\alpha-\beta=\gamma-\delta$,
বা, $(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$, বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$,
বা, $4p^2-4q=4q^2-4p$, বা, $(p^2-q^2)+(p-q)=0$,
বা, $(p-q)(p+q+1)=0$.

এখানে দুইটি রাশির গুণফল শূন্য বলিয়া উহাদের কোন একটি শূন্য হইবে। যদি p ও q সমান না হয়, অর্থাৎ $p-q=0$ না হয়, তবে $p+q+1=0$ হইবে।

কিন্তু $p=q$ হইলে উভয় সমীকরণ একই হয় বলিয়া উহা সম্ভব নহে।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে $p=q$ না হইলে $p+q+1=0$ হইবে।

উদা. 17. যদি $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজ α, β এবং $Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের বীজ $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2$ [C. U. '12; H. S. '64]

প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয় α, β;

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{2b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots$(i)

দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$;

$\therefore\ \alpha+\beta+2\delta=-\frac{2B}{A}$ এবং $(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\frac{C}{A}\cdots$(ii)

এখন যেহেতু $\alpha-\beta=(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)$,

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\}^2$,

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\{(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)\}^2-4(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$,

বা, $\left(-\frac{2b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)=\left(-\frac{2B}{A}\right)^2-4\left(\frac{C}{A}\right)$

[(i) ও (ii) হইতে মান বসাইয়া]

বা, $\frac{4b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=\frac{4B^2}{A^2}-\frac{4C}{A}$, বা, $\frac{b^2-ca}{a^2}=\frac{B^2-CA}{A^2}$,

$\therefore\ \frac{b^2-ca}{B^2-CA}=\frac{a^2}{A^2}=\left(\frac{a}{A}\right)^2$.

উদা. 18. যদি $ax^2+bx+c=0$-র বীজ দুইটি $a'x^2+b'x+c'=0$-র বীজ দুইটির অন্যোন্যক হয়, তবে দেখাও যে $a:b:c::c':b':a'$.

মনে কর, $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β.

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b'}{a'}$, এবং $\alpha\beta=\frac{c'}{a'}$.

α ও β বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$.

এখন, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b'}{a'}}{\frac{c'}{a'}}=-\frac{b'}{c'}$ এবং $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c'}{a'}}=\frac{a'}{c'}$

অতএব, যে সমীকরণের বীজ দুইটি $a'x^2+b'x+c'=0$-র বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক সেই সমীকরণ হইবে $x^2+\frac{b'}{c'}x+\frac{a'}{c'}=0$, বা, $c'x^2+b'x+a'=0$;

কিন্তু প্রশ্নানুযায়ী সেই সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$.

$\because$ সমীকরণ দুইটি মূলতঃ একই ; সুতরাং $\frac{a}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{a'}$, হইবে

অর্থাৎ, $a : b : c :: c' : b' : a'$.

উদা. 19. কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে ?

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও $-\beta$, যেখানে α এবং β ধনাত্মক।

প্রথমতঃ, যখন α-র সাংখ্যমান β-র সাংখ্যমান অপেক্ষা বেশী, তখন উভয় বীজের সমষ্টি অর্থাৎ $\alpha-\beta$ ধনাত্মক এবং উভয়ের গুণফল অর্থাৎ $\alpha\times-\beta$ ঋণাত্মক।

অতএব, $-\frac{b}{a}$ ধনাত্মক ও $\frac{c}{a}$ ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু $-\frac{b}{a}$ ধনাত্মক হইবে যখন b ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে, এবং $\frac{c}{a}$ ঋণাত্মক হইবে যখন c ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, বীজদ্বয়ের মধ্যে যেটির সাংখ্যমান বড় সেইটি ধনাত্মক হইলে প্রদত্ত সমীকরণের b ও c একই চিহ্নযুক্ত ও a উহাদের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

দ্বিতীয়তঃ, যখন α-র সাংখ্যমান β-র সাংখ্যমান অপেক্ষা ছোট, তখন উভয়ের বীজের সমষ্টি অর্থাৎ $\alpha-\beta$ ঋণাত্মক এবং উহাদের গুণফলও ঋণাত্মক।

$\therefore$ $-\frac{b}{a}$ ও $\frac{c}{a}$ উভয়েই ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু $-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইবে যখন b ও a একই চিহ্নযুক্ত হইবে এবং $\frac{c}{a}$ ঋণাত্মক হইবে যখন c ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে বীজদ্বয়ের মধ্যে যেটির সাংখ্যমান বড় সেইটি ঋণাত্মক হইলে প্রদত্ত সমীকরণের a ও b একই চিহ্নযুক্ত ও c উহাদের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

প্রশ্নমালা 6B

1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের α ও β বীজ হইলে নিম্নের রাশিগুলির মান a, b, c দ্বারা প্রকাশ কর :

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (iii) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ (iv) $\alpha^3+\beta^3$

(v) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ (vi) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ (vii) $\alpha^4\beta^{-2}+\beta^4\alpha^{-2}$

(viii) $\frac{1}{a\alpha-b}+\frac{1}{a\beta-b}$ (ix) $\frac{1}{a\alpha+b}+\frac{1}{a\beta+b}$.

2. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের α ও β দুইটি বীজ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির p ও q দ্বারা মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ [C. U. '46] (ii) $\alpha\beta^{-2}+\beta\alpha^{-2}$.

(iii) $\alpha^3\beta^{-1}+\beta^3\alpha^{-1}$ (iv) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$

(v) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$ [C.U. '41]

(vi) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$ (vii) $(\alpha+p)^{-4}+(\beta+p)^{-4}$.

3. সমীকরণগুলি নির্ণয় কর, উহাদের বীজগুলি নিম্নে প্রদত্ত হইল :

(i) 3, 4 ; (ii) 5, −7 ; (iii) $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$;

(iv) $a+b, a-b$; (v) a^2+a+1, a^2-a+1.

4. (a) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজগুলি $x^2+3x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের বর্গ।

(b) যে সমীকরণগুলির বীজগুলি (i) $x^2+3x+4=0$ সমীকরণের (ii) $x^2-x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক সেগুলি নির্ণয় কর।

(c) এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের যথাক্রমে সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যক।

5. যদি α ও β সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-র বীজ হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজ হইবে 2α ও 2β.

6. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের α ও β দুইটি বীজ হইলে, এমন সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজ হইবে :

(i) α^2 এবং β^2 [C. U. '33] (ii) $\alpha\beta^{-1}$ এবং $\alpha\beta^{-1}$ [C.U. '36]

(iii) $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ [C. U. 1924]

(iv) $\alpha+\beta^{-1}$ এবং $\beta+\alpha^{-1}$ [C.U. 1939]

(v) $\frac{1}{a\alpha+b}$ এবং $\frac{1}{a\beta+b}$.

7. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার α ও β বীজ দুইটি দ্বারা $\alpha\beta=768$ ও $\alpha^2+\beta^2=1600$ সম্বন্ধ দুইটি সিদ্ধ হইবে। [A. U. 1918]

8. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে $2p^2=9q$. [C. U. '37]

9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির চারিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে $4b^2=25ac$. [C. U. '40]

10. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে $6b^2=25ac$.

11. মূলদ সহগবিশিষ্ট এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার একটি বীজ $4 \quad \sqrt{5}$.

12. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের একটি অন্যটির অন্যোন্যক হইলে দেখাও যে $a=c$ হইবে।

13. α ও β যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে দেখাও যে $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$ হইবে। [C. U. '31]

14. যদি $3x^2+6x+2=0$এর বীজদ্বয় p ও p হয়, তবে দেখাও যে, যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{-p^2}{q}$ ও $\frac{-q^2}{p}$ তাহা হইবে $3x^2-18x+2=0$. [C. U. '54]

15. $ax^2+bx+c=0$-র বীজদ্বয় α ও β হইলে. প্রমাণ কর যে $\frac{1}{\alpha+\beta}$ ও $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ বীজবিশিষ্ট সমীকরণটি হইবে $bcx^2+(b^2+ac)x+ab=0$, [P. U. '37 ; H. S. '65]

16. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজ হইবে :

(i) $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$. [P. U. '44] (ii) $\frac{1}{\alpha}+\beta^{-1}$ এবং $\alpha\beta$. [C. U. '28]

(iii) $2\alpha-\beta$ এবং $2\beta-\alpha$.

17. যদি $3x^2-6x+4=0$ সমীকরণের α ও β দুইটি বীজ হয়, তবে $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$ রাশির মান নির্ণয় কর। [C. U. '43]

18. $21x^2-x-2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, এরূপ একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজ হইবে $\alpha\beta$ ও $\alpha^2+\beta^2$.

19. $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় p ও q দ্বারা সূচিত হইলে $p+q$ ও $\frac{1}{2}pq$ বীজদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [C. U. '19]

20. $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় α^2 ও β^2. উভয় সমীকরণ একই কেন তাহা ব্যাখ্যা কর। [A. U. '24]

21. $x^2+x+1=0$ সমীকণের α ও β বীজ হইলে যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ তাহা নির্ণয় কর। প্রদত্ত সমীকরণ ও ইহা একই হওয়ার কারণ নির্দেশ কর। [C. U. '22]

22. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজগুলি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক। [C.U. '44]

23. প্রমাণ কর যে, $2x^2+3x+4=0$-এর বীজগুলি $4x^2+3x+2=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক। [P. U. '33]

24. যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2+2bx+4c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যকের দ্বিগুণ সেটি নির্ণয় কর। [U. P. '42]

25. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি তাহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে প্রমাণ কর যে $2ac=ab+b^2$. [Ajmer '50]

26. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির তিনগুণ অপেক্ষা এক অধিক হইলে, a, b ও c-এর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

27. $ax^2+lx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হইলে প্রমাণ কর যে $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=\sqrt{\frac{b^2}{ac}}$. [U. P. '58]

28. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $x^2+lx+m=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হইলে প্রমাণ কর যে $p^2m=l^2q$. [Raj. '55]

29. α ও β যদি $x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\alpha^2+\beta^2=k^2$. [C. U. '1909]

30. a, b ও c-এর মধ্যে কি সম্বন্ধ থাকিলে $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির 5 গুণ হইবে ?

31. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির বর্গ হইলে, প্রমাণ কর যে $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. [C. U. '43]

32. $x^2+Px+q=0$-র বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2+px+Q=0$-র বীজদ্বয় γ ও δ হইলে, $x^2+px+q=0$-র বীজদ্বয়কে α, β, γ ও δ দ্বারা প্রকাশ কর। [C. U. '14]

33. $q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়কে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা নির্ণয় কর। [C. U. '52]

34. প্রমাণ কর যে $x^2-2ax+b^2=0$-র বীজদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যকটি $x^2-2bx+a^2=0$-এর বীজদ্বয়ের গুণোত্তরীয় মধ্যক এবং বিপরীতক্রমেও ইহা সত্য। [C. U. '52]

35. $x^2+px+q=0$ আকারের কোন্ দ্বিঘাত সমীকরণের x-বর্জিত পদটি 24-এর স্থানে 40 ভুল ছাপা হওয়ায় উহার বীজদ্বয় 4 ও 10 হইয়াছে। শুদ্ধ সমীকরণটির বীজগুলি নির্ণয় কর।

36. কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নরূপ হইবে ?

(i) সাংখ্যমানে সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত;

(ii) উভয়ই ঋণাত্মক; (iii) উভয়ই ধনাত্মক।

37. কি শর্তে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের (i) একটি বীজ শূন্য, (ii) উভয় বীজই শূন্য হইবে ?

38. এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার

(i) প্রত্যেক বীজ $x^2-14x+48=0$-এর বীজগুলি অপেক্ষা 3 কম;

(ii) প্রত্যেক বীজ $x^2-10x+21=0$-এর বীজগুলি অপেক্ষা 1 অধিক।

39. α, β ও γ, δ যথাক্রমে $x^2-2px+q^2=0$ ও $x^2-2rx+s^2=0$ সমীকরণের বীজ হইলে এবং $\alpha\delta=\beta\gamma$ হইলে, প্রমাণ কর যে $p^2s^2=q^2r^2$.

[সংকেত : $\because$ $\alpha\delta=\beta\gamma$ $\therefore$ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ বা, $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$]

40. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর 1 হইলে প্রমাণ কর যে $p^2+4q^2=(1+2q)^2$. [A. U. '17]

41. $x^2-px+q=0$-এর বীজদ্বয়ের অন্তর ও $x^2-qx+p=0$-র বীজদ্বয়ের অন্তর একই হইলে এবং $p=q$ না হইলে প্রমাণ কর যে $p+q+4=0$. [C. U. '41]

42. $ax^2+bx+c=0$-এর বীজদ্বয় $px^2+qx+r=0$-এর বীজদ্বয়ের বর্গমূল হইলে, প্রমাণ কর যে $pb^2+qa^2=2apc$ এবং $pc^2=a^2r$.

43. যদি α, β ও α_1, β_1 যথাক্রমে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের ও $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ সমীকরণের দুইটি করিয়া বীজ হয়, তবে $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ ও $\alpha\beta_1+\alpha_1\beta$ বীজ হইবে এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর।

44. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির বর্গ হইলে প্রমাণ কর যে, $b^3+ac^2+a^2c=3abc.$ [C. U. '53]

45. $ax^2+bx+c=0$ ও $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের একই অনুপাত হইলে, প্রমাণ কর যে, $b^2 : b_1{}^2 :: ac : a_1c_1$.

46. যদি $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ ও $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণের বীজগুলির পার্থক্য কোন ধ্রুবক হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b_1{}^2-4a_1c_1}{a_1{}^2}=\frac{b_2{}^2-4a_2c_2}{a_2{}^2}.$$

47. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 2 এবং তাহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি 27. সমীকরণটি নির্ণয় কর। [C. U. '56]

§ 6·8. বীজগণিতের মৌল উপপাদ্যের সাহায্য ব্যতিরেকে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান :

মনে কর, সমীকরণটি হইতেছে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

$\because a\neq 0$, $\therefore$ উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

[উভয়পক্ষে $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

[বিশেষ দ্রষ্টব্য : সকল দ্বিঘাত সমীকরণকে, $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করা যায়। তারপর $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এই সূত্রের সাহায্যে তাহার সমাধান করা যায়। এই সূত্রটি ভালভাবে বুঝিয়া মুখস্থ করিবে। **ইহার ব্যাখ্যা :** সমীকরণে আছে x^2-এর সহগ a এবং, x-এর সহগ b এবং x-বিহীন পদ c. সূত্রের লব হইবে বিপরীত চিহ্ন-যুক্ত x-এর সহগ, তারপর $\pm\sqrt{}$ চিহ্নের মধ্যে হইবে x-এর সহগের বর্গ (অর্থাৎ b^2) বিযুক্ত x^2-এর সহগ ও x-বিহীন পদের গুণফলের 4গুণ অর্থাৎ

$-4ac$. আর হরে হইবে x^2-এর সহগের দ্বিগুণ। এখানে x-এর মান দুইটি কি কি হইল দেখ। একটি হইল $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, অন্যটি হইল $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.]

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে $x^2-2\sqrt{17}x-8=0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '46]

এখানে $a=1,\ b=-2\sqrt{17},\ c=-8$.

$$\therefore\ x=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4\times1\times-8}}{2\times1}$$

$$=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{68+32}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\pm10}{2}=\sqrt{17}\pm5.$$

উদা. 2. $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাহির কর। [C. U. '45, G. U. '49]

[সূত্র সাহায্যে] $x=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

শ্রীধর আচার্যের প্রণালী বা হিন্দুপ্রণালী

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রথমে $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করিবে। যথা, $(x-2)^2=3x+5$ সমীকরণকে $x^2-4x+4=3x+5$. বা $x^2-7x-1=0$ এইভাবে লিখিবে। x-বিহীন পদ c-কে ডানদিকে লইয়া যাও। উভয় পক্ষকে x^2-এর সহগের 4 গুণ (এখানে $4a$) দ্বারা গুণ কর। তারপর উভয়পক্ষে xএর সহগের বর্গ (এখানে b^2) যোগ কর। ইহাতে বামদিকে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

উদা. 3. সমাধান কর : $3x^2-11x+9=0$. [C. U. '35]

সমীকরণটি হইতে $3x^2-11x=-9$,

বা, $36x^2-132x=-108$ [উভয় পক্ষকে 4×3 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $36x^2-132x+(11)^2=121-108$ [উভয় পক্ষে xএর সহগ (-11)-এর বর্গ বা $(11)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $(6x-11)^2=13$, বা, $6x-11=\pm\sqrt{13}$,

বা, $6x=11\pm\sqrt{13}$, $\therefore\ x=\frac{11\pm\sqrt{13}}{6}$.

দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশিতব্য সমীকরণঃ অনেক সমীকরণ দ্বিঘাত সমীকরণ না হইলেও দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ করিয়া সমাধান করা যায়।

উদাহরণমালা 6B

(i) সূচকীয় সমীকরণঃ

উদা. 1. সমাধান কর : $4\times 2^{x-1}=8^x$. [D. B. '31]

$4\times 2^{x-1}=8^x$, বা, $2^2\times 2^{x-1}=(2^3)^x$,

বা, $2^{x-1+2}=2^{3x}$, বা, $2^{x+1}=2^{3x}$,

$\therefore$ $3x=x+1$, বা, $2x=1$, $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$.

উদা. 2. সমাধান কর : $2^{x+1}=\sqrt[x]{64}$.

$$2^{x+1}=\sqrt[x]{64}, \text{ বা, } 2^{x+1}=64^{\frac{1}{x}}$$

বা, $2^{x+1}=(2^6)^{\frac{1}{x}}$ [এখানে 64কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করা হইল]

বা, $2^{x+1}=2^{\frac{6}{x}}$, $\therefore$ $x+1=\frac{6}{x}$ বা, $x^2+x=6$,

বা, $x^2+x-6=0$, বা, $(x+3)(x-2)=0$.

$\therefore$ হয় $x+3=0$ অথবা $x-2=0$, $\therefore$ $x=2$, বা, -3.

উদা. 3. সমাধান কর : $9^x=\frac{9}{3^x}$. [P. U. '30]

$9^x=\frac{9}{3^x}$, বা, $(3^2)^x=\frac{9}{3^x}$, বা, $3^{2x}=\frac{9}{3^x}$ বা, $3^x.3^{2x}=9$,

বা, $3^{3x}=3^2$, $3x=2$, $\therefore$ $x=\frac{2}{3}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000$.

$$4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000,$$

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}\times 5=800000$,

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}=160000$

[উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(20)^{x^2+x+2}=(20)^4$, $\therefore$ $x^2+x+2=4$,

বা, $x^2+x-2=0$, বা, $(x-1)(x+2)=0$,

$\therefore$ হয় $x-1=0$ অথবা $x+2=0$, $\therefore$ $x=1$ বা -2.

উদা. 5. সামাধান কর : $4.3^{x+1}=27+9^x$. [C. U. '51]

$$4.3^{x+1}=27+9^x, \text{ বা, } 4.3^x.3=27+3^{2x},$$

বা, $12.3^x=27+(3^x)^2$, বা, $12p=27+p^2$ [$3^x=p$ ধরিয়া]

বা, $p^2-12p+27=0$, বা, $(p-9)(p-3)=0$, $\therefore p=9$ বা 3,

$\therefore$ $3^x=p=9=3^2$; অথবা $3^x=p=3^1$; $\therefore$ $x=2$ বা 1.

উদা. 6. সমাধান কর : $a^{2x-3}=b^{2x-3}$.

$a^{2x-3}=b^{2x-3}$, $\therefore \dfrac{a^{2x-3}}{b^{2x-3}}=1$, বা, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x-3}=1=\left(\dfrac{a}{b}\right)^0$

$\therefore$ $2x-3=0$, $\therefore$ $x=\frac{3}{2}$. $\left[\because \left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1\right]$

উদা. 7. সমাধান কর : $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0$. [C. U. '30]

$$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0, \text{ বা, } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+x^{\frac{1}{3}}-2=0,$$

বা, $a^2+a-2-0$ [$x^{\frac{1}{3}}=a$ ধরিয়া], বা, $(a-1)(a+2)=0$,

$\therefore$ $a-1=0$, অথবা $a+2=0$, $\therefore$ $a=1$ বা -2, $\therefore$ $x^{\frac{1}{3}}=1$ বা -2.

$\therefore$ $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(1)^3$ বা $(-2)^3$, $\therefore$ $x=1$ বা -8.

উদা. 8. সমাধান কর : $a^{2x}.a^{y+1}=a^8$ এবং $a^{3y}.a^{3x+5}=a^{20}$.

$\because$ $a^{2x}a^{y+1}=a^8$, $\therefore$ $a^{2x+y+1}=a^8$,

$\therefore$ $2x+y+1=8$, বা, $2x+y=7\cdots(1)$

আবার, $\because$ $a^{3y}.a^{3x+5}=a^{20}$, $\therefore$ $a^{3x+3y+5}=a^{20}$.

$\therefore$ $3x+3y+5=20$, বা, $3x+3y=15\cdots(2)$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=2$, $y=3$.

(ii) করণী সংক্রান্ত সমীকরণ [Irrational Equation]

উদা. 9. সমাধান কর : $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$. [C. U. '47]

$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$,

বা, $\sqrt{x+6}=4-\sqrt{x-2}$

বা, $x+6=16+x-2-8\sqrt{x-2}$ [উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $8\sqrt{x-2}=16-2-6=8$, বা, $\sqrt{x-2}=1$, বা, $x-2=1$,

$\therefore$ $x=3$.

উদা. 10. সমাধান কর : $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}=5.$

সমীকরণটি হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ায় পাই,

$$\frac{2\sqrt{a^2+x^2}}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{5+1}{5-1},\quad \text{বা,}\quad \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

বা, $\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\dfrac{9}{4}$ [বর্গ করিয়া], বা, $\dfrac{2a^2}{2x^2}=\dfrac{13}{5}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ায়]

বা, $\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{13}{5}$, বা $13x^2=5a^2$, বা, $x^2=\dfrac{5}{13}a^2$, $\therefore\ x=\pm a\sqrt{\tfrac{5}{13}}.$

উদা. 11. সমাধান কর : $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$. [C.U.]

সমীকরণটি হইতে পাই, $2x+4=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$,

বা, $2x+3=\sqrt{4x^2+9x+14}$,

বা, $4x^2+12x+9=4x^2+9x+14$ [বর্গ করিয়া]

বা, $3x=5$, $\therefore\ x=\frac{5}{3}.$

উদা. 12. সমাধান কর : $2-\sqrt{11x^2+5x+3}=x$.

বা, $-\sqrt{11x^2+5x+3}=x-2$,

বা, $11x^2+5x+3=x^2-4x+4$ [বর্গ করিয়া]

বা, $10x^2+9x-1=0$,

বা, $10x^2+10x-x-1=0$, বা, $(10x-1)(x+1)=0$.

$\therefore$ হয় $10x-1=0$, অথবা, $x+1=0$, $\therefore\ x=\frac{1}{10}$ বা -1.

[উদা. 17-এর নীচের 'দ্রষ্টব্য'টি দেখ]

উদা. 13. সমাধান কর : $\dfrac{x-ax}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}.$

বজ্রগুণন করিয়া পাই $x^2-ax^2=x$, বা. $x^2(1-a)-x=0$,

বা, $x\{x(1-a)-1\}=0$, $\therefore$ হয় $x=0$, অথবা $x(1-a)-1=0$;

$\therefore\ x=0$, বা, $\dfrac{1}{1-a}.$

উদা. 14. সমাধান কর : $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$

$\because\ ax-1=(\sqrt{ax})^2-(1)^2=(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{ax}-1)$,

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $\dfrac{(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{ax}-1)}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}.$

বা, $(\sqrt{ax}-1)=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$, বা, $(\sqrt{ax}-1)-\frac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$,

বা, $\frac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$, বা, $\sqrt{ax}-1=8$, বা, $\sqrt{ax}=9$,

$\therefore\ ax=81,\ \therefore\ x=\frac{81}{a}$.

উদা. 15. সমাধান কর : $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=\frac{2}{\sqrt{x}}$. [C. U.]

বজ্রগুণন করিয়া পাই $x+\sqrt{x^2+4x}=2$,

বা, $\sqrt{x^2+4x}=2-x$, বা, $x^2+4x=4-4x+x^2$.

বা, $8x=4$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$.

উদা. 16. সমাধান কর : $\sqrt{3x^2+16}-\sqrt{3x^2-16}=8-4\sqrt{2}\cdots(1)$

$(3x^2+16)-(3x^2-16)=32$ [অভেদে]

অর্থাৎ $(\sqrt{3x^2+16})^2-(\sqrt{3x^2-16})^2=32\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$ করিয়া পাই $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\frac{32}{8-4\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\frac{32(8+4\sqrt{2})}{(8)^2-(4\sqrt{2})^2}=\frac{32(8+4\sqrt{2})}{32}$

$$=8+4\sqrt{2}\cdots(3)$$

এখন $(1)+(3)$ করিয়া পাই $2\sqrt{3x^2+16}=16$, বা, $\sqrt{3x^2+16}=8$,

$\therefore\ 3x^2+16=64$, বা, $x^2=16$, $\therefore\ x=\pm 4$.

উদা. 17. সমাধান কর : $4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13$. [W. B. S. F. '53]

বা, $4x^2+6x+8+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$ [উভয়পক্ষে 8 যোগ করিয়া]

বা, $2(2x^2+3x+4)+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$,

বা, $2a^2+a=21$ [মনে কর, $a=\sqrt{2x^2+3x+4}$]

বা, $2a^2+a-21=0$,

বা, $(2a+7)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3$ অথবা $-\frac{7}{2}$.

এক্ষণে, যদি $a=3$ হয়, তবে $2x^2+3x+4=9$,

বা, $2x^2+3x-5=0$, বা, $(x-1)(2x+5)=0$, $\therefore\ x=1$ বা $-\frac{5}{2}$,

আবার, $a=-\frac{7}{2}$ হইলে $2x^2+3x+4=\frac{49}{4}$ হয়,

বা, $8x^2+12x+16=49$, বা, $8x^2+12x-33=0$,

$$\therefore \quad x=\frac{-12\pm\sqrt{144+1056}}{16}=\frac{-12\pm20\sqrt{3}}{16}=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}.$$

অতএব, $x=1, -\frac{5}{2}$, বা, $\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$.

এখানে দেখা যায় যে, x-এর মান 1 ও $-\frac{5}{2}$ ধরিলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু $x=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$ ধরিলে উহা সিদ্ধ হয় না। অতএব x-এর ঐ মান দুইটি গ্রহণ করা যাইবে না। উহারা অবান্তর বীজ।

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় বীজ হইল $x=1$, বা, $-\frac{5}{2}$.

[দ্রষ্টব্য : এস্থলে $x=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$কে প্রদত্ত সমীকরণের **অবান্তর বীজ** (extraneous root) বলে। ঐ বীজ $4x^2+6x-\sqrt{2x^2+3x+4}=13$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, প্রদত্ত সমীকরণকে নহে।

যে ক্ষেত্রে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া সমীকরণ সমাধান করিতে হয়, সে ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সকল বীজ দ্বারা সমীকরণটি হয়ত সিদ্ধ না হইতে পারে। ঐরূপ স্থলে প্রাপ্ত কোন্ বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা দেখিয়া লইয়া উত্তর লিখিবে। এরূপ দেখিবার সময় বর্গমূল ধনাত্মক ধরিবে। যে প্রাপ্ত বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না তাহাকে অবান্তর বীজ বলে। উহাকে উত্তরে ধরিবে না—উহা অবান্তর বীজ বলিয়া লিখিয়া দিবে।]

বিবিধ সমীকরণের সমাধান

উদা. 18. সমাধান কর : $x^2+\frac{36}{x^2}=13$. [C. U. '31]

সমীকরণটি হইতে পাই, $x^4+36=13x^2$, বা, $x^4-13x^2+36=0$,

বা, $(x^2-9)(x^2-4)=0$, বা, $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)=0$,

$\therefore \; x=\pm3$ ও ±2.

উদা. 19. সমাধান কর: $x^6-28x^3+27=0$. [D. B. '31]

সমীকরণটি হইতে পাই, $x^6-27x^3-x^3+27=0$,

বা, $x^3(x^3-27)-1(x^3-27)=0$, বা, $(x^3-1)(x^3-27)=0$,

বা, $(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9)=0$,

$\therefore \; x-1=0\cdots(1), \quad x^2+x+1=0\cdots(2), \quad x-3=0\cdots(3)$,

অথবা, $x^2+3x+9=0\cdots(4)$. এখন (1) হইতে পাই $x=1$;

(2) হইতে $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$;

(3) হইতে $x=3$; (4) হইতে $x=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3}).$$

অতএব, $x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\ 3,\ \frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$.

উদা. 20. সমাধান কর : $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$.

[C. U. ; D. B. '46, '51]

উভয় পক্ষের ঘন বা cube করিয়া পাই

$$1+x+1-x+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\}=2,$$

বা, $2+3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.\,2^{\frac{1}{3}}=2$ [$\because\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(-x)^{\frac{1}{3}}\}=2^{\frac{1}{3}}$ (স্বীকার)]

বা, $3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.\,2^{\frac{1}{3}}=0$, $\therefore\ (1-x^2)^{\frac{1}{3}}=0$, $\therefore\ 1-x^2=0$,

বা, $x^2=1$, $\therefore\ x=\pm1$.

প্রশ্নমালা 6C

সমাধান কর :—

1. $5x^2+3=128$.
2. $(2x-1)^2=5-4x$.
3. $3x-\frac{2}{x}=\frac{x}{3}$.
4. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$. [C. U. '31]
5. $42x^2-41x-20=0$. [C. U. '13]
6. $3x^2-10x+3=0$. [C. U. '33]
7. $4x^2-65x+126=0$. [C. U. '16]
8. $6x^2-11x-10=0$. [C. U. '22]
9. $(17x-8)(x-2)=555$. [C. U. '32]
10. $17x^2+19x=1848$. [C. U. '11]
11. $6x^3-91x+323=0$. [C. U. '14]
12. $(x-7)(x-19)=64$. [C. U. '18]
13. $(x+4)(2x-3)=6$. [B. U. '29]

14. $x^2-6x+2=0$. [G. U. '48]

15. $x^2-10x+8=0$. [C. U. '47]

16. $x^2+2(b-c)x+c^2=2bc$

17. $ax^2-bx-c=0$. [C. U. '44]

18. $x+\frac{1}{x}=6\frac{1}{6}$.

19. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$. [C. U. '31]

20. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$. [E. B. S. B. '50]

21. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{25}{12}$ [C. U. '10]

22. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5$. [W. B. S. F. '52]

23. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$. [C. U. '11]

24. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$. [C. U. '20]

25. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13$. [D. B. '26]

26. $\frac{x-6}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0$. [C. U. '28]

27. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$.

28. $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$. [C. U. '36]

29. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}$.

30. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-5\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+6=0$. [P. U.]

31. $1+x=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}$. [C. U. '44]

32. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$. [D. B. '40, '43]

33. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. [P. U. 1891]

34. $x^2-2\sqrt{13}x+4=0$. [C. U. '49]

35. $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$. [C. U. '46]

36. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$. [C. U. '29, '41]

37. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$. [C. U. '46]

38. $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{5x-2}$. [C. U.]

39. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{6x+1}$. [C. U. '20 ; D. B. '30]

40. $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$.

41. $\sqrt{a+x}+\sqrt{x}=\dfrac{ma}{\sqrt{a+x}}$.

42. $\sqrt{2x^2+9}+\sqrt{2x^2-9}=9+3\sqrt{7}$.

43. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$. [C. U. '50 ; Part. U. '21]

44. $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3$. [C. U.]

45. (a) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=3+\dfrac{3-\sqrt{x}}{2}$. 45. (b) $\dfrac{6x-2}{\sqrt{3x}-1}-4=\dfrac{\sqrt{3x}+1}{2}$.

46. $\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}+\dfrac{a}{x}=\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}+\dfrac{b}{x}$. [M. U.]

47. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=12$. 48. $x^{-3}+x^{-\frac{3}{2}}=2$.

49. $4\times 2^{x-1}=8^x$. [D. B. '31]

50. $4^x+2^{x+2}=96$. [D. B. '47]

51. $(\sqrt{2})^{3x+1}=256$. 52. $3.2^{x+1}=8+4^x$.

53. $a^{2x-1}=b^{2x-1}$ 54. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{x-2}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2x-1}$.

55. $(\sqrt[3]{36})^{2x+1}=(\sqrt[5]{216})^{x+6}$. 56. $2^{x-2}+2^{3-x}=3$. [C. U. '40]

57. $2(4^x-3,2^{x-1})+1=0$. 58. $5^{x-2}+5^{1-x}=1\frac{1}{5}$.

59. $2^{2x-2}=2^{x-3}-\frac{1}{64}$. 60. $12^x+12^{-x}=144\frac{1}{144}$

61. $4^x-3.2^{x+2}+32=0$. [W. B. S. F. '53]

62. $3^{x+y}=3^{2x-y}=\sqrt{27}$.

63. $4^{x+\frac{1}{2}}+4=36(2^{x-2})$. [W. B. S F. '52]

64. $9(9^{x-1}+3)=28\times 3^x$.

65. $4^{\frac{x+3}{2}}.8^{\frac{x-2}{3}}=2^{\frac{5x+7}{3}}.16^{\frac{3x-1}{7}}$

66 (a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5^x}{5^y}=25\\ \dfrac{4^y}{2^x}=2\end{array}\right\}$ [G. U. '54] 66. (b) $\left.\begin{array}{l}a^x=(x+y+z)^y\\ a^y=(x+y+z)^z\\ a^z=(x+y+z)^x\end{array}\right\}$

67. $5^{x^2+x+1}.6^{x^2+x+2}=162000$.

68. $a^x . a^{y+1} = a^7$, $a^{2y} . a^{3x+5} = a^{20}$. [C. U. 1878]

69. $6(x^4+1) = 13x^2$. [D. B. '32]

70. $3x^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{10}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$. [D. B. '35]

71. $(p+x)^{\frac{2}{3}} + (p-x)^{\frac{2}{3}} = 3(p^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$,

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমাধান কর :

72. $3x^2 + 4x = 8$.

73. $x^2 - x = 1806$. [C. U. '17]

74. $63x^2 - 62x = 221$.

75. x-এর মান কত হইলে $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$ হয় ?

76. $15x^2 - 11x - 31 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর এবং বীজগুলির দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় কর।

---

§ 6·9. **উপপাদ্য। কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না। (বিকল্প প্রমাণ)**

যদি সম্ভব হয়, মনে কর $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের α, β ও γ তিনটি বিভিন্ন বীজ আছে। সুতরাং ঐ তিনটি বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots \text{(i)}$$
$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \cdots \text{(ii)}$$
$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \cdots \text{(iii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়,

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0, \quad \text{বা,} \quad (\alpha - \beta)\{a(\alpha + \beta) + b\} = 0$$

$\because$ α ও β বিভিন্ন অর্থাৎ অসমান (স্বীকার), $\therefore$ $\alpha - \beta \neq 0$ (শূন্য নহে)।

অতএব, $a(\alpha + \beta) + b = 0 \cdots$(iv). অনুরূপভাবে (i) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়, $a(\alpha + \gamma) + b = 0 \cdots$(v).

আবার, (iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায় $a(\beta - \gamma) = 0$

সুতরাং হয় $a = 0$, নতুবা $\beta - \gamma = 0$, কিন্তু দুইটিই অসম্ভব। কারণ, কল্পনা অনুসারে $\beta \neq \gamma$, $\therefore$ $\beta - \gamma \neq 0$. আবার, $a = 0$ হইতে পারে না; কারণ, সমীকরণটি দ্বিঘাতের।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, গোড়ায় যাহা কল্পনা করা হইয়াছে তাহা সত্য হইলে কল্পনাবিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে হয়। অতএব, গোড়ার কল্পনাই সত্য নহে, অর্থাৎ কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

§ 6·10. **দ্বিঘাত সমীকরণের বীজসমূহের প্রকৃতি** (Nature of the roots of a quadratic equation).

(A) $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের a, b, c বাস্তব সংখ্যা। ইহা সমাধান করিয়া পাই $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$\therefore$ ইহার দুইটি বীজ, $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

এই বীজ দুইটি আলোচনা করিলে নিম্নের তত্ত্বগুলি পাওয়া যায় :—

(i) যখন $b^2-4ac=0$ অর্থাৎ $b^2=4ac$ হইবে, তখন উভয় বীজই $-\dfrac{b}{2a}$ হইবে।

সুতরাং উভয় বীজ **বাস্তব** ও পরস্পর **সমান** হইবে। a বা b-এর যে কোনটি অমূলদ হইলে বীজ দুইটি অমূলদ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ কে সাজাইয়া পাওয়া যায়, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$. যখন, $b^2-4ac=0$ হয়, তখন $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ হয়, অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$, এই সমীকরণে

(i) যখন $b^2-4ac=0$ হইবে, তখন ax^2+bx+c এই রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

(ii) যখন $b^2-4ac=$ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $b^2>4ac$ হইবে, তখন $\sqrt{b^2-4ac}$ পূর্ণবর্গ না হইলে অমূলদ হইবে; সুতরাং উভয় বীজ **বাস্তব, অমূলদ** ও **অসমান** হইবে।

(iii) যখন b^2-4ac ধনাত্মক ও পূর্ণবর্গ হইবে, তখন বীজ দুইটি **বাস্তব, মূলদ** ও **অসমান** হইবে। কিন্তু a বা b-এর যে কোনটি অমূলদ হইলে, b^2-4ac পূর্ণবর্গ হওয়া সত্ত্বেও বীজ দুইটি অমূলদ হইবে।

(iv) যখন b^2-4ac ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $b^2<4ac$ হইবে, তখন $\sqrt{b^2-4ac}$ কাল্পনিক হইবে, সুতরাং বীজদ্বয় **কাল্পনিক** ও **অসমান** হইবে।

(v) যখন $b=0$ হইবে, তখন বীজদ্বয়ের আকার হয় $\dfrac{0\pm\sqrt{0-4ac}}{2a}$

$$\text{বা, } \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

তরাং বীজ দুইটি সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। a ও c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে বীজদ্বয় বাস্তব হইবে, কিন্তু a ও c একই চিহ্নযুক্ত হইলে বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের আলোচনা হইতে দেখা যায় যে, দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটির প্রকৃতি সাধারণভাবে b^2-4ac-র উপর নির্ভর করে এবং b^2-4ac-র সাহায্যেই বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করা হয়। এইজন্যই b^2-4ac রাশিটিকে উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক** (Discriminant) বলে।

উপরের তত্ত্বগুলিকে নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা হয়। যেমন,

(I) নিরূপক শূন্য হইলে বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান (অভিন্ন) হইবে।

(II) নিরূপক ধনাত্মক হইলে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান (ভিন্ন) হইবে।

(III) নিরূপক পূর্ণবর্গ হইলে বীজদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হইবে।

(IV) নিরূপক ঋণাত্মক হইলে বীজদ্বয় কাল্পনিক ও অসমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। বীজ দুইটি বাস্তব হইবে যখন নিরূপক ধনাত্মক বা শূন্য হইবে।

ইহাকে নিম্নলিখিত যে কোনভাবে প্রকাশ করা হয়।

(i) বীজদ্বয় বাস্তব হইবে যখন নিরূপক $\geqslant 0$ হইবে।

(ii) বীজদ্বয় বাস্তব হইবে যখন নিরূপক $\nless 0$ হইবে।

§ 6·11. দুইটি সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ থাকার শর্ত (Condition for common root).

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ ও $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এই দুইটি সমীকরণের α একটি সাধারণ বীজ। $\therefore$ α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots(i)$$

এবং $a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0 \cdots\cdots(ii)$

(i) ও (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc_1-b_1c}=\frac{\alpha}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b} \cdots\cdots(iii)$$

$$\therefore\ \left(\frac{\alpha}{ca_1-c_1a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{bc_1-b_1c}\times\frac{1}{ab_1-a_1b},$$

বা, $(ca_1-c_1a)^2=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)$. এবং ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(iii) হইতে আরও পাই,

$$\frac{\alpha}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b} \text{ এবং } \frac{\alpha}{bc_1-b_1c}=\frac{1}{ca_1-c_1a}$$

∴ সাধারণ বীজ α-র মান

$$\frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}, \text{ অথবা } \frac{bc_1 - b_1c}{ca_1 - c_1a} \cdots (iv)$$

§ 6·12. **একের ঘনমূল** (Cube roots of unity). [N. B. '64]

[Unity বলিতে 1 বুঝায়]। মনে কর, $\sqrt[3]{1} = x$.

অতএব, $x^3 = 1$, বা, $x^3 - 1 = 0$, বা, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$,

∴ হয়, $x - 1 = 0 \cdots (1)$ অথবা, $x^2 + x + 1 = 0 \cdots (2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x = 1$.

আবার, (2) হইতে পাই $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1}}{2.1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

∴ 1-এর ঘনমূল $= 1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

[এখানে দেখা যাইতেছে যে, 1-এর তিনটি ঘনমূলের মধ্যে একটি (প্রথমটি) বাস্তব এবং অন্য দুইটি জটিল।]

একের ঘনমূল সম্বন্ধে কতিপয় সিদ্ধান্ত

I 1-এর ঘনমূল তিনটির সমষ্টি শূন্য।

প্রমাণ: সমষ্টি $= 1 + \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) + \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

$= 1 + \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3})$

$= 1 + \frac{1}{2} \times (-2) = 1 - 1 = 0$.

II. 1-এর জটিল ঘনমূল দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির বর্গ।

প্রমাণ: 1-এর জটিল ঘনমূল দুইটি হইল $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

এবং $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

এক্ষণে, $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2 = \frac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}(-2-2\sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

আবার, $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2 = \frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}(-2+2\sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

অতএব, 1-এর প্রত্যেক জটিল ঘনমূল অপর জটিল ঘনমূলের বর্গ।

III. 1-এর জটিল ঘনমূল দুইটির গুণফল 1 হইবে।

প্রমাণ: $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\} = \frac{1}{4}(1+3) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$.

[দ্রষ্টব্য : ∵ 1-এর জটিল ঘনমূল দুইটির গুণফল 1,

∴ প্রত্যেক জটিল ঘনমূল অপরটির অন্যোন্যক।]

একের ঘনমূল তিনটিকে সাধারণতঃ 1, ω, ω^2 দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহাদের মধ্যে প্রথমটি বাস্তব এবং ω, ω^2 জটিল। প্রত্যেক জটিল ঘনমূল অপর জটিল ঘনমূলের বর্গ বলিয়া একটিকে ω ধরিলে, অন্যটি ω^2 হইবে।

সুতরাং উপরের সিদ্ধান্তগুলি হইতে পাই (i) $1+\omega+\omega^2=0$,

এবং (ii) $\omega.\omega^2=1$, বা, $\omega^3=1$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য : যে কোন সংখ্যার তিনটি ঘনমূল হইয়া থাকে। উহাদের একটি বাস্তব (উহাই পাটীগণিতিক ঘনমূল) এবং অপর দুইটি জটিল। 1-এর ঘনমূলগুলির সাহায্যে ঐ ঘনমূলগুলি নির্ণয় করা যায়। প্রথমে প্রদত্ত সংখ্যাটির পাটীগণিতিক ঘনমূলটি নির্ণয় করিয়া তাহাকে যথাক্রমে 1, ω ও ω^2 দ্বারা গুণ করিলেই সংখ্যাটির ঘনমূল তিনটি পাইবে।

§ 6·13. **ω-র বিভিন্ন ঘাত** (Powers of ω) :

ω-র যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত 1, অথবা ω, অথবা ω^2 হইবে।

আমরা জানি $\omega^3=1$.

∴ $\omega^4=\omega^3.\omega=\omega$; $\omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2$; $\omega^6=(\omega^3)^2=(1)^2=1$;
$\omega^7=\omega^6.\omega=\omega$; $\omega^8=\omega^6.\omega^2=\omega^2$; ইত্যাদি।

এক্ষণে, সাধারণভাবে মনে কর, n যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (positive integer).

যদি $n=3m$ (m কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) হয়,
তবে $\omega^n=\omega^{3m}=(\omega^3)^m=(1)^m=1$;
যদি $n=3m+1$ হয়, তবে $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\omega=1.\omega=\omega$;
যদি $n=3m+2$ হয়, তবে $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}.\omega^2=1.\omega^2=\omega^2$.

অতএব, যদি nকে 3 দিয়া ভাগ করিলে যথাক্রমে 0, 1 বা 2 ভাগশেষ থাকে, তাহা হইলে ω^n যথাক্রমে 1, ω বা ω^2-এর সমান হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ω-র যে-কোন ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাত 1, অথবা ω অথবা ω^2 হয়।

উদাহরণমালা 6C

উদা. 1. সমীকরণের বীজ দুইটির প্রকৃতি আলোচনা কর :
(i) $2x^2-6x+3=0$ এবং (ii) $4x^2-12x+9=0$.

(i) এখানে নিরূপক $(b^2-4ac)=(-6)^2-4\times2\times3=12$.

∴ নিরূপক ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে।

অতএব, বীজ দুইটি বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

(ii) এক্ষেত্রে নিরূপক $=(-12)^2-4\times4\times9=144-144=0.$

$\therefore$ নিরূপকটি শূন্য এবং a ও b উভয়েই মূলদ $(a=4,\ b=-12)$।

অতএব, বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও সমান।

উদা. 2. বীজগুলির প্রকৃতি আলোচনা কর :

(i) $x^2-6x+2=0$ এবং (ii) $x^2-2\sqrt{7}x-2=0.$ [G. U. '48]

(i) এখানে নিরূপক $=(-6)^2-4\times1\times2=36-8=28.$

$\therefore$ নিরূপক ধনাত্মক, কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে।

অতএব, বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

এখানে বীজদ্বয়ের গুণফল $\frac{c}{a}$ (অর্থাৎ 2) ধনাত্মক বলিয়া উভয় বীজই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবার কথা, কিন্তু উহাদের যোগফল 6 অর্থাৎ $\left(-\frac{b}{a}\right)$ ধনাত্মক বলিয়া উহারা ধনাত্মক।

(ii) এক্ষেত্রে, নিরূপক $=(-2\sqrt{7})^2-4\times1\times-2=28+8=36$
$=(6)^2.$

$\therefore$ নিরূপক একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা, কিন্তু b অমূলদ $(b=-2\sqrt{7})$

অতএব, বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

উহাদের একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক (কারণ, উহাদের গুণফল $=-2$).

উদা. 3. দেখাও যে $3x^2+4x-7=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

এখানে, নিরূপক $=(4)^2-4\times3\times-7=16+84=100,$ ইহা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

যেহেতু, নিরূপকটি একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা, এবং x^2 ও x-এর সহগের প্রত্যেকটি মূলদ, সুতরাং বীজদ্বয় মূলদ।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $2x^2+3x+5=0$ সমীকরণের x-এর কোন বাস্তব মান থাকিতে পারে না।

এখানে, নিরূপক $=(3)^2-4\times2\times5=9-40=-31$ ঋণাত্মক।

যেহেতু নিরূপকটি ঋণাত্মক, সুতরাং বীজদ্বয় জটিল।

$\therefore$ এখানে x-এর কোন বাস্তব মান থাকিতে পারে না।

উদা. 5. m-এর মান কত হইলে $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় (i) সমান ও (ii) পরস্পর অন্যোন্যক হইবে? [C. U. '36]

(i) এখানে, নিরূপক $=\{-2(5+2m)\}^2-4\times1\times3(7+10m)$

$$=4(25+20m+4m^2)-4(21+30m)$$
$$=4(4m^2+20m-30m+25-21)$$
$$=4(4m^2-10m+4)=8(2m^2-5m+2)$$
$$=8(m-2)(2m-1).$$

প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি সমান হইবে, যখন নিরূপক $=0$ হইবে।

$\therefore\ 8(m-2)(2m-1)=0$, বা, $(m-2)(2m-1)=0$,

$\therefore\ m=2$, বা, $\frac{1}{2}$.

অতএব, বীজ দুইটি সমান হইলে $m=2$ বা $\frac{1}{2}$ হইবে।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি পরস্পর অন্যোন্যক হইবে যখন x^2-এর সহগ ও x বর্জিত পদ সমান হইবে। এখানে x^2-এর সহগ $=1$ এবং x-বর্জিত পদ $=3(7+10m)$

$\because$ বীজ দুইটি পরস্পর অন্যোন্যক, $\therefore\ 3(7+10m)=1$,

বা, $30m=-20$, $\therefore\ m=-\frac{2}{3}$.

অতএব, বীজ দুইটি পরস্পরের অন্যোন্যক হইলে $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

উদা. 6. $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$ সমীকরণের নিরূপক করণী না হইলেও বীজগুলিও কি করণীমুক্ত? যদি তাহা না হয়, তবে কেন নহে?

এখানে, নিরূপক $=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times-13=12+52=64=(8)^2$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। কিন্তু $b=-2\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

অতএব, বীজদ্বয় করণীমুক্ত নহে, উহারা অমূলদ হইবে।

উদা. 7. a এবং b বাস্তব সংখ্যা হইলে দেখাও যে

$(x+a)(x+b)=abx^2$ সমীকরণের বীজদ্বয় সর্বদা বাস্তব।

$(x+a)(x+b)=abx^2$,

বা, $x^2+(a+b)x+ab-abx^2=0$,

বা, $(1-ab)x^2+(a+b)x+ab=0$,

$\therefore$ নিরূপক $=(a+b)^2-4ab(1-ab)$

$=(a+b)^2-4ab+4a^2b^2$

$=(a-b)^2+(2ab)^2$, ইহার উভয় পদের প্রত্যেকটি পূর্ণ বর্গ-সংখ্যা এবং a ও b বাস্তব, সুতরাং নিরূপকটি কখনই ঋণাত্মক নহে।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় সতত বাস্তব হইবে।

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, a, b, c বাস্তব ও মূলদ হইলে

$(b+c)x^2-(a+b+c)x+a=0$ সমীকরণের বীজগুলি মূলদ হইবে।

[U. U. '47]

এখানে, নিরূপক $=\{-(a+b+c)\}^2-4a(b+c)\}$

$=\{a+(b+c\}^2-4a(b+c)$

$=\{a-(b+c)\}^2$

$=(a-b-c)^2$; ইহা একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

ইহা ছাড়াও x^2 ও x-এর সহগের প্রত্যেকটি মূলদ রাশি।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি মূলদ হইবে।

উদা. 9. প্রমাণ কর যে $a+b+c=0$ এবং a, b, c বাস্তব ও মূলদ হইলে, $ax^2+bx+c=0$-র বীজগুলি মূলদ হইবে।

এখানে, নিরূপক $= b^2-4ac$

$$=\{-(a+c)\}^2-4ac$$

$$[\because \ a+b+c=0, \ \therefore \ b=-(a+c)]$$

$$=(a+c)^2-4ac$$

$=(a-c)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ রাশি এবং a ও c বাস্তব।

ইহা ছাড়াও x^2 ও x-এর সহগের প্রত্যেকটি মূলদ রাশি।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি মূলদ হইবে।

উদা. 10. যদি l, m, n বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(x-l)(x-m)+(x-m)(x-n)+(x-n)(x-l)=0$ সমীকরণের বীজগুলি সতত বাস্তব হইবে এবং $l=m=n$ না হইলে উহারা সমান হইতে পারে না।

এখানে সমীকরণটিকে সরল করিয়া সাজাইয়া লিখিলে পাওয়া যায়,

$$3x^2-2(l+m+n)x+(lm+mn+nl)=0.$$

$\therefore$ নিরূপক $=\{-2(l+m+n)\}^2-4\times3\times(lm+mn+nl)$

$$=4(l+m+n)^2-12(lm+mn+nl)$$

$$=4\{(l+m+n)^2-3(lm+mn+nl)\}$$

$$=4\{(l^2+m^2+n^2-lm-mn-nl)\}$$

$$=2\{(2l^2+2m^2+2n^2-2lm-2mn-2nl)\}$$

$$=2\{(l^2-2lm+m^2)+(m^2-2mn+n^2)+(n^2-2nl+l^2)\}$$

$$=2\{(l-m)^2+(m-n)^2+(n-l)^2\}$$

l, m, n বাস্তব হওয়ায় $(l-m)^2$, $(m-n)^2$ ও $(n-l)^2$ ইহাদের কোনটি ঋণাত্মক নহে।

$\therefore$ l, m, n-এর বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের নিরূপকটি কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব, উহার বীজ দুইটি সতত বাস্তব হইবে।

আবার যখন বীজ দুইটি সমান হইবে তখন নিরূপক $=0$ হইবে;

অর্থাৎ $2\{(l-m)^2+(m-n)^2+(n-l)^2\}=0$ হইবে।

কিন্তু যেহেতু ইহাদের কোন পদই ঋণাত্মক নহে, সুতরাং উহাদের সমষ্টি $=0$ হইবে যখন উহাদের প্রত্যেকটি পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে।

$$\therefore \left.\begin{array}{r}(l-m)^2=0\\(m-n)^2=0\\(n-l)^2=0\end{array}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{array}{r}l-m=0\\m-n=0\\n-l=0\end{array}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{array}{r}l=m\\m=n\\n=l\end{array}\right\}, \ \therefore \ l=m=n.$$

উদা. 11. যদি $ax^2-2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব ও অসমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x^2+2(a+c)x+(a^2+2b^2+c^2)=0$ সমীকরণের বীজগুলি জটিল হইবে, যেখানে a, b, c বাস্তব।

$\because$ $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান,

$\therefore$ উহার নিরূপকটি ধনাত্মক।

অর্থাৎ $4b^2-4ac>0$, বা, $4(b^2-ac)>0$.

এখন, দ্বিতীয় সমীকরণের নিরূপক $=4(a+c)^2-4(a^2+2b^2+c^2)$

$=4\{2ac-2b^2\}=-8(b^2-ac)$

$=-2\times4(b^2-ac)=$ ঋণাত্মক $[\because\ 4(b^2-ac)>0]$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয় জটিল।

উদা. 12. m-এর মান কত হইলে $3x^2+4mx+2=0$ ও $2x^2+3x-2=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে?

[C. U. 1934]

মনে কর, উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ α, সুতরাং α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $3\alpha^2+4m\alpha+2=0$
এবং $2\alpha^2+3\alpha-2=0$

উহা হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{-8m=6}=\frac{\alpha}{4+6}=\frac{1}{9-8m},\quad\therefore\quad\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2=\frac{\alpha^2}{-(8m+6)}\times\frac{1}{9-8m}$$

$\therefore$ $-(8m+6)(9-8m)=10^2$,

বা, $(8m+6)(8m-9)=100$,

বা, $64m^2-24m-154=0$, বা, $32m^2-12m-77=0$,

বা, $(4m-7)(8m+11)=0$,

$\therefore$ $m=\frac{7}{4}$, বা, $-\frac{11}{8}$.

অতএব, সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকিবে যখন

$m=\frac{7}{4}$ বা $-\frac{11}{8}$ হইবে।

উদা. 13. দেখাও যে $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ এবং $(c-a)x^2+(a-b)x+b-c)=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ আছে।

প্রথম সমীকরণ :

$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

বা, $(b-c)x^2-\{(b-c)+(a-b)\}x+(a-b)=0$

বা, $(b-c)x^2-(b-c)x-(a-b)x+(a-b)=0$

বা, $(b-c)x(x-1)-(a-b)(x-1)=0$

বা, $(x-1)\{(b-c)x-(a-b)\}=0.$

দ্বিতীয় সমীকরণ :

$$(c-a)x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$

বা, $(c-a)x^2-\{(c-a)+(b-c)\}x+(b-c)=0$

বা, $(c-a)x(x-1)-(b-c)(x-1)=0$

বা, $(x-1)\{(c-a)x-(b-c)\}=0.$

অতএব, দেখা যাইতেছে উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ আছে। ঐ বীজ 1 ($\because$ উভয়ক্ষেত্রে $x-1=0$)।

উদা. 14. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে হয় $a+b+c=0$, অথবা, $a=b=c$.

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ α.

$\therefore$ α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots$ (i)

এবং $b^2\alpha+c\alpha+a=0 \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{\alpha^2}{ab-c^2}=\frac{\alpha}{bc-a^2}=\frac{1}{ca-b^2}.$$

$\therefore$ $(bc-a^2)^2=(ab-c^2)(ca-b^2)$

বা, $b^2c^2-2a^2bc+a^4=a^2bc-c^3a-ab^3+b^2c^2$

বা, $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0.$

$\because$ এখানে $a\neq 0$, $\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=0$,

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$,

$\therefore$ হয় $a+b+c=0$ অথবা $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,

কিন্তু দ্বিতীয় অংশ সম্ভব হয় যখন $a=b=c$ হয় [উদা. 10 দেখ।]

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে

হয় $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$ হইবে।

উদা. 15. -1-এর ঘনমূল বাহির কর।

মনে কর, $x=\sqrt[3]{-1}$, অতএব $x^3=-1$.

$\therefore\ x^3+1=0$, বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$,

অতএব, হয় $x+1=0 \cdots\cdots(1)$
অথবা $x^2-x+1=0 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে পা $x+1=0$, $\therefore\ x=-1$.

আবার (2) ,, ,, $x^2-x+1=0$,

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4.1}}{2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূলগুলি $=-1,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

উদা. 16. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। [C. U. '30]

প্রদত্ত রাশি

$=a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$

[$\because\ \omega^3=1,\ \omega+\omega^2=-1,\ \omega=\omega^3.\omega=\omega^4$
এবং $\omega^4+\omega^2=\omega+\omega^2=-1$].

$=(a^2+ab\omega^2+ac\omega)+(b^2\omega^3+ab\omega+bc\omega^2)$
$+(c^2\omega^3+bc\omega^4+ca\omega^2)$

$=a(a+b\omega^2+c\omega)+b\omega(b\omega^2+a+c\omega)+c\omega^2(c\omega+b\omega^2+a)$

$=(a+b\omega^2+c\omega)(a+b\omega+c\omega^2)$.

উদা. 17. প্রমাণ কর: $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$. [P. U. '36, '46]

প্রদত্ত রাশি $=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega.\omega^3)(1-\omega^2.\omega^6)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

[$\because\ \omega^3=1$ এবং $\omega^6=(1)^2=1$]

$=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2$

$=(1-\omega+1+\omega+1)^2$

[$\because\ 1+\omega+\omega^3=0,\ \therefore\ 1+\omega=-\omega^2$]

$=(3)^2=9$ [$\because\ \omega^3=1$].

উদা. 18. দেখাও যে $(\omega a+\omega^2 b)(\omega^2 a+\omega b)=a^2-ab+b^2$. [C. U. '29]

$(\omega a+\omega^2 b)(\omega^2 a+\omega b)=\omega^3 a^2+\omega^2 ab+\omega^4 ab+\omega^3 b^2$

$=a^2+(\omega^2+\omega^4)ab+b^2$ [$\because\ \omega^3=1$]

$=a^2+(\omega^2+\omega^3.\omega)ab+b^2$

$=a^2+(\omega^2+\omega)ab+b^2$

$=a^2-ab+b^2$ [$\because\ \omega^2+\omega+1=0,\ \therefore\ \omega^2+\omega=-1$]

বা, $(b-c)x^2-\{(b-c)+(a-b)\}x+(a-b)=0$

বা, $(b-c)x^2-(b-c)x-(a-b)x+(a-b)=0$

বা, $(b-c)x(x-1)-(a-b)(x-1)=0$

বা, $(x-1)\{(b-c)x-(a-b)\}=0.$

দ্বিতীয় সমীকরণ :

$$(c-a)x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$

বা, $(c-a)x^2-\{(c-a)+(b-c)\}x+(b-c)=0$

বা, $(c-a)x(x-1)-(b-c)(x-1)=0$

বা, $(x-1)\{(c-a)x-(b-c)\}=0.$

অতএব, দেখা যাইতেছে উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ আছে। ঐ বীজ 1 ($\because$ উভয়ক্ষেত্রে $x-1=0$)।

উদা. 14. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে হয় $a+b+c=0$, অথবা, $a=b=c$.

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ α.

$\therefore$ α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots$ (i)

এবং $b^2\alpha+c\alpha+a=0\cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{\alpha^2}{ab-c^2}=\frac{\alpha}{bc-a^2}=\frac{1}{ca-b^2}.$$

$\therefore$ $(bc-a^2)^2=(ab-c^2)(ca-b^2)$

বা, $b^2c^2-2a^2bc+a^4=a^2bc-c^3a-ab^3+b^2c^2$

বা, $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0.$

$\because$ এখানে $a\neq 0$, $\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=0,$

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0,$

$\therefore$ হয় $a+b+c=0$ অথবা $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$

কিন্তু দ্বিতীয় অংশ সম্ভব হয় যখন $a=b=c$ হয় [উদা. 10 দেখ।]

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে

হয় $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$ হইবে।

উদা. 15. -1-এর ঘনমূল বাহির কর।

মনে কর, $x=\sqrt[3]{-1}$, অতএব $x^3=-1$,

$\therefore\ x^3+1=0$, বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{অতএব, হয় } x+1=0\cdots\cdots(1)\\ \text{অথবা } x^2-x+1=0\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$$

এক্ষণে (1) হইতে পা $x+1=0$, $\therefore\ x=-1$.

আবার (2) „ „ $x^2-x+1=0$,

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4.1}}{2}=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}).$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূলগুলি $=-1,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

উদা. 16. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

[C. U. '30]

প্রদত্ত রাশি

$=a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$

[$\because\ \omega^3=1,\ \omega+\omega^2=-1,\ \omega=\omega^3.\omega=\omega^4$

এবং $\omega^4+\omega^2=\omega+\omega^2=-1$].

$=(a^2+ab\omega^2+ac\omega)+(b^2\omega^3+ab\omega+bc\omega^2)$

$+(c^2\omega^3+bc\omega^4+ca\omega^2)$

$=a(a+b\omega^2+c\omega)+b\omega(b\omega^2+a+c\omega)+c\omega^2(c\omega+b\omega^2+a)$

$=(a+b\omega^2+c\omega)(a+b\omega+c\omega^2)$.

উদা. 17. প্রমাণ কর : $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$.

[P. U. '36, '46]

প্রদত্ত রাশি $=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega.\omega^3)(1-\omega^2.\omega^6)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

[$\because\ \omega^3=1$ এবং $\omega^6=(1)^2=1$]

$=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2$

$=(1-\omega+1+\omega+1)^2$

[$\because\ 1+\omega+\omega^2=0,\ \therefore\ 1+\omega=-\omega^2$]

$=(3)^2=9$ [$\because\ \omega^3=1$].

উদা. 18. দেখাও যে $(\omega a+\omega^2b)(\omega^2a+\omega b)=a^2-ab+b^2$.

[C. U. '29]

$(\omega a+\omega^2b)(\omega^2a+\omega b)=\omega^3a^2+\omega^2ab+\omega^4ab+\omega^3b^2$

$=a^2+(\omega^2+\omega^4)ab+b^2$ [$\because\ \omega^3=1$]

$=a^2+(\omega^2+\omega^3.\omega)ab+b^2$

$=a^2+(\omega^2+\omega)ab+b^2$

$=a^2-ab+b^2$ [$\because\ \omega^2+\omega+1=0,\ \therefore\ \omega^2+\omega=-1$]

উদা. 19. প্রমাণ কর : $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0.$

$\because\ 1+\omega+\omega^2=0,\ \therefore\ 1+\omega=-\omega^2$ এবং $1+\omega^2=-\omega.$

এক্ষণে প্রদত্ত বামপক্ষ$=(-\omega^2-\omega^2)^3-(-\omega-\omega)^3$

$=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3=-8\omega^6+8\omega^3=-8(\omega^{32})+8\times 1$

$=-8+8\ [\because\ \omega^3=1]=0.$

উদা. 20. যদি $\omega=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$ এর মান বাহির কর। [P. U. '40]

প্রদত্ত শর্ত হইতে $\omega^2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}).$

$\because\ 1+\omega+\omega^2=0,\ \therefore\ 1+\omega=-\omega^2,\ 1+\omega^2=-\omega.$

আবার, $\because\ \omega^3=1,\ \therefore\ \omega^4=\omega^3.\omega=\omega,\ \omega^8=(\omega^3)^2.\omega^2=\omega^2$

এবং $\omega^{16}=\omega^{15}.\omega=(\omega^3)^5.\omega=(1)^5.\omega=\omega.$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি$=(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)\times$

$(1-\omega^2+\omega)=(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2)$

$=16\omega^6=16(\omega^3)^2=16\times 1=16.$

উদা. 21. যদি $x=a+b,\ y=a+b\omega,\ z=a+b\omega^2$ হয়, তবে দেখাও যে $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3).$

$x^3+y^3+z^3=(a+b)^3+(a+b\omega)^3+(a+b\omega^2)^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+a^3+b^3\omega^3+3ab\omega(a+b\omega)$

$+a^3+b^3\omega^6+3ab\omega^2(a+b\omega^2)$

$=a^3+b^3+a^3+b^3+a^3+b^3+3ab(a+b+a\omega+b\omega^2+a\omega^2+b\omega^4)$

$[\because\ \omega^3=1,$ এবং $\omega^6=1]$

$=3(a^3+b^3)+3ab\{a(1+\omega+\omega^2)+b(1+\omega+\omega^2)\}$

$=3(a^3+b^3)\ [\because\ 1+\omega+\omega^2=0].$

প্রশ্নমালা 6D

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজগুলির প্রকৃতি নিরূপণ কর :

(a) $x^2-7x+12=0$; (b) $4x^2=25$; (c) $4x^2-4x+1=0$;

(d) $2x^2-x+2=0$; (e) $x^2-6x+2=0.$

2. দেখাও যে, $4x^2+25x=81$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব।

3. দেখাও যে, $63x^2-62x=221$ সমীকরণের বীজগুলি মূলদ।

4 দেখাও যে, $2x^2-3x+4=0$ সমীকরণের বীজগুলি জটিল।

5. $x^2+7x+p=0$-এর বীজদ্বয় সমান হইলে p-এর মান নির্ণয় কর।

6. $x^2+ax+8=0$-এর একটি বীজ 4 এবং $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান। b-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '58]

7. (a) p-এর মান কত হইলে $x^2-2(1+3p)x+7(3+2p)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে ?

(b) m-এর মান কত হইলে $(m+1)x^2+2(m+3)x+(m+8)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে ? [P. U. '44]

8. প্রমাণ কর যে যদি $a=\frac{5}{3}$ না হয়, তবে সমীকরণ

$x^2+2(3a+5)x+2(9a^2+25)=0$-এর কাল্পনিক বীজ হইবে।

9. যদি a ও b বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে $(x-a)(x-b)=b^2$-এর বীজগুলি সতত বাস্তব হইবে।

10. প্রমাণ কর যে, a, b, c বাস্তব ও মূলদ হইলে $(a-b+c)x^2+2cx+(b+c-a)=0$ সমীকরণের বীজগুলি মূলদ হয়।

11. $x^2-2cx+ab=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব ও অসমান হইলে, প্রমাণ কর যে $x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2+2c^2)=0$ সমীকরণের বীজগুলি কাল্পনিক হইবে এবং বিপরীতক্রমেও সত্য হইবে।

12. প্রমাণ কর যে $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ হইলে $(h^2-ab)x^2+2(gh-af)x+(g^2-ca)=0$ সমীকরণের বীজগুলি সমান হইবে। [Raj. '45]

13. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান হইলে প্রমাণ কর যে a, b, c একটি সমান্তর প্রগতি। [Ajmer '50]

14. যদি l, m, n মূলদ এবং $l+m+n=0$ হয়, তবে দেখাও যে $(m+n-l)x^2+(n+l-m)x+(l+m-n)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ হইবে।

15. যদি $a\neq 0$, তবে c-এর মান কত হইলে $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে ?

16. $(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$ সমীকরণের বীজগুলি সমান হইলে, প্রমাণ কর যে $b=0$ অথবা $a^3+b^3+c^3=3abc$ হইবে।

17. প্রমাণ কর যে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ যদি $x^2-lx+m=0$ সমীকরণের কোন বীজ হয়, তবে উহার অপর বীজটি $x^2+(2p+l)x+(p^2+pl+m)=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইবে।

18. প্রমাণ কর যে, যদি $(a^2+b^2)x^2+2(bc+ad)x+(c^2+d^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হয়, তবে তাহারা সমান হইবে। [P. U. '37]

19. $x^2-\sqrt{13}x-3=0$ সমীকরণের বীজগুলি কি মূলদ ? যদি তাহা না হয়, তবে কেন নহে ?

20. (i) $x^2-2\sqrt{3}x-22=0$ ও (ii) $x^2-10x+22=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান কর। উহাদের বীজগুলির প্রকৃতিগত প্রভেদ নির্ণয় কর এবং ঐ প্রভেদের কারণ দেখাও।

21. যদি $x^2+px+q=0$ ও $x^2+p'x+q'=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে সেই বীজ $(pq'-p'q)/(q-q')$ অথবা $(q-q')/(p'-p)$ হইবে। [C. U. '14]

22. যদি $x^2+px+q=0$ ও $x^2+qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $p=q$ অথবা $p+q+1=0$ হইবে। [H. S. '68 ; C. U. '39]

23. যদি $x^2+lx+m=0$ ও $x^2+mx+l=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $x^2+x+lm=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় উহাদের অপর দুই বীজ হইবে।

24. $x^2+bx+ca=0$ ও $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ আছে। প্রমাণ কর যে উহাদের অপর বীজগুলি দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। [C. U. '56, '58]

25. যদি $ax^2+2bx+c=0$ ও $a_1x^2+2b_1x+c_1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $(b^2-ac)x^2+(2bb_1-ac_1-a_1c)x+(b_1{}^2-a_1c_1)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান হইবে।

26. প্রমাণ কর যে $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ সমীকরণের বীজগুলি সতত বাস্তব এবং $a=b=c$ না হইলে তাহারা সমান হইতে পারে না।

27. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও বিভিন্ন হয়, তবে প্রমাণ কর যে $2x^2-4(1+q)x+(p^2+2q^2+2)=0$ সমীকরণের বীজগুলি কাল্পনিক হইবে।

28. প্রমাণ কর যে, $(a^4+b^4)x^2+4abcdx+(c^4+d^4)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হইলে বিভিন্ন হইতে পারে না। [Pat. '46]

29. প্রমাণ কর যে k-এর সকল বাস্তব মানেই $\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব হইবে।

30. $y=mx+c$ এবং $y^2=4ax$-এ x-এর সমমান থাকিবার শর্ত নির্ণয় কর।

31. a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইলে দেখাও যে $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি সমান হইবে।

32. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে দেখাও যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

33. প্রমাণ কর যে, যদি $p=k+\frac{q}{k}$ এবং p, q, k মূলদ হয়, তবে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজগুলি মূলদ হইবে।

34. $x^2-2px+q=0$ সমীকরণের বীজগুলি ও সহগগুলির মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর। উহার বীজদ্বয় যদি সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(1+y)x^2-2(p+y)x+(q+y)=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব ও বিভিন্ন হইবে কেবল যখন y ঋণাত্মক এবং $p\neq 1$.

35. মনে কর $f(x)=ax^2+bx+c$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা।

(a) নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে $f(x)=0$ সমীকরণের বীজগুলি সম্বন্ধে কি বলিতে পার?

(i) $b=0, ac\leqslant 0$, (ii) $c=0, ab\neq 0$; (iii) $b=c=0, a\neq 0$; (iv) $a=0, bc\neq 0$.

(b) যদি $a\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে $f(x)=0$-এর উভয় বীজই বাস্তব অথবা উভয়ই কাল্পনিক হইবে।

(c) যদি x বাস্তব হয়, তবে যখন $a=2, b=-4$ ও $c=10$, তখন $f(x)$-এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [C. U, '52]

উৎপাদক নির্ণয় কর:

36. x^3+y^3. 37. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 38. x^2-xy+y^2.

39. দেখাও যে $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ দুইটি জটিল উৎপাদকের গুণফল। [G. U. '30]

দেখাও যে:—

40. $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4$.

41. $(1+\omega-\omega^2)^3+(1-\omega+\omega^2)^3=-16$.

42. $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5=32$.

43. $\frac{a\omega+b+1}{b\omega^2+a+\omega^2}=\omega$.

44. দেখাও যে $\left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n=2$ হইবে, যদি n, 3-এর গুণিতক হয় এবং $=-1$ হইবে, যদি n অন্য কোন পূর্ণসংখ্যা হয়। [P. U.]

6·14. দ্বিঘাত রাশির চিহ্ন (Sign)।

ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ। ইহার চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি হইতে নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা দেখিয়াছি যে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের α ও β দুইটি বীজ হইলে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ হয়।

এক্ষণে α ও β বীজদ্বয় (i) বাস্তব ও সমান হইতে পারে, অথবা (ii) বাস্তব ও অসমান হইতে পারে, অথবা (iii) কাল্পনিক হইতে পারে।

(i) **মনে কর, α ও β বাস্তব ও সমান অর্থাৎ $\alpha=\beta$.**

সুতরাং $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a(x-\alpha)(x-\alpha)=a(x-\alpha)^2$

$=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি [$\because$ $(x-\alpha)^2$ ধনাত্মক

অতএব a-এর যে চিহ্ন ax^2+bx+c-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(ii) **মনে কর α ও β বাস্তব ও অসমান**

(a) এক্ষণে x যদি α ও β অপেক্ষা বড় হয়, তবে $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ দুইটিই ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ তখন $a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি,

অতএব a-এর চিহ্ন এবং ax^2+bx+c-এর চিহ্ন একই হইবে।

(b) x যদি α ও β দুইটিরই অপেক্ষা ছোট হয়, তবে $x-\alpha$ ও $x-\beta$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ তখন ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ তখন $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

অতএব a-এর যে চিহ্ন ax^2+bx+c-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(c) x যদি α অপেক্ষা বড়, কিন্তু β অপেক্ষা ছোট হয়, অর্থাৎ যদি $\alpha<x<\beta$ হয়, তবে $(x-\alpha)$ ধনাত্মক এবং $(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে।

(d) x যদি α অপেক্ষা ছোট, কিন্তু β অপেক্ষা বড় হয় অর্থাৎ যদি $\beta<x<\alpha$ হয়, তবে $(x-\alpha)$ ঋণাত্মক এবং $(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, (c) ও (d) উভয় ক্ষেত্রেই $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a\times$ একটি ঋণাত্মক রাশি

$\therefore$ এই উভয় ক্ষেত্রে ax^2+bx+c-এর চিহ্ন a-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

(ii) **মনে কর, α ও β বীজদ্বয় কাল্পনিক** এবং $\alpha = p+iq$ ও $\beta = p - iq$.

এক্ষণে, $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = a\{x-(p+iq)\}\{x-(p-iq)\}$

$= a\{(x-p)-iq\}\{(x-p)+iq\} = a\{(x-p)^2-(iq)^2\}$

$= a\{(x-p)^2+q^2\}$ $[\because \ (i)^2=-1]$

$= a \times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

দ্রষ্টব্য : (1) উপরের আলোচনা হইতে স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে x-এর সমস্ত বাস্তব মানেই a-এর যে চিহ্ন হইবে ax^2+bx+c রাশিটিরও সেই চিহ্ন হইবে, কেবল যখন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইবে এবং x-এর মান বীজদ্বয়ের মানের মধ্যবর্তী কোন মান হইবে তখনই মাত্র রাশিটির চিহ্ন a-এর যে চিহ্ন তাহার বিপরীত চিহ্ন হইবে।

(2) ax^2+bx+c রাশিটির মান, x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সর্বদাই সমচিহ্নযুক্ত হইবে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান বা কাল্পনিক হয়। এখন বীজদ্বয় সমান বা কাল্পনিক হইবার শর্ত $b^2-4ca \leqslant 0$। সুতরাং ax^2+bx+c এই রাশিটির মান সর্বদা সমচিহ্নযুক্ত থাকিবে যদি $b^2 \leqslant 4ca$ হয়।

§ 6·15. দ্বিঘাত রাশির গরিষ্ঠ (বা চরম) ও লঘিষ্ঠ (বা অবম) মান।

ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ হইল দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ।

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{h}{2a}\right)^2\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a} \quad \cdots\cdots(1)$$

(i) **মনে কর a ধনাত্মক।**

এক্ষণে, $\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া x-এর যে কোন বাস্তব মানে উহা ঋণাত্মক হইবে না।

$\therefore \ a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \nless 0$ (0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে)।

অতএব, (1) হইতে পাই যে, ax^2+bx+c-এর মান কখন $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা কম হইতে পারে না $\left[\because \ a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right.$ ঋণাত্মক নহে।]

আর যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, তবে ax^2+bx+c-এর মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$-এর সমান হইবে, কিন্তু উহা অপেক্ষা কম হইবে না।

$\therefore$ ax^2+bx+c-এর লঘিষ্ঠ মান হইল $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

[দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে ax^2+bx+c এর মান যথেচ্ছ বড় হইতে পারে বলিয়া উহার একটি চরম মান নির্ণয় করা যায় না।]

(*ii*) মনে কর, a ঋণাত্মক।

এক্ষণে, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ঋণাত্মক নহে বলিয়া $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ঋণাত্মক হইবে ($\because$ a ঋণাত্মক)।

অতএব (1) হইতে পাই যে, ax^2+bx+c-এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

আর যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, তবে ax^2+bx+c-এর মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$-এর সমান হইবে, কিন্তু উহা অপেক্ষা বড় হইবে না।

$\therefore$ ax^2+bx+c-এর চরম (গরিষ্ঠ) মান হইল $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

[দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে ax^2+bx+c-এর মান যথেচ্ছ ছোট হইতে পারে বলিয়া ইহার কোন অবম (লঘিষ্ঠ) মান নির্ণয় করা সম্ভব নহে।]

উদাহরণমালা 6D

উদা. 1. x বাস্তব হইলে $2x^2-5x+6$ রাশিটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক নির্ণয় কর।

$$2x^2-5x+6=2(x^2-\tfrac{5}{2}x+3)$$
$$=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2+3-\tfrac{25}{16}\}=2\{(x-\tfrac{5}{6})^2+\tfrac{23}{16}\}$$

$\because$ x বাস্তব, $\therefore$ $(x-\frac{5}{4})^2$ ঋণাত্মক নহে ;

সুতরাং $(x-\frac{5}{4})^2+\frac{23}{16}$ ধনাত্মক।

অতএব, প্রদত্ত রাশিটি x-এর যে কোন বাস্তব মানে ধনাত্মক হইবে।

উদা. 2. x বাস্তব হইলে দেখাও যে $4x^2-4x+1$এর লঘিষ্ঠ মান 0 হইবে এবং তখন x-এর, অনুরূপ মান $\frac{1}{2}$ হইবে। [C. U. '37]

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ।

অতএব, x-এর বাস্তব মানে $(2x-1)^2$-এর মান হয় শূন্য অথবা কোন ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore$ উহার লঘিষ্ঠ মান $=0$.

আবার, $(2x-1)^2$এর মান যখন শূন্য, তখন $2x-1=0$, $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে x-এর কোন বাস্তব মানে $3x^2-6x+8$ কখনও 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। [C. U.]

$3x^2-6x+8=3(x^2-2x+1)+5=3(x-1)^2+5.$

এক্ষণে, x-এর যে কোন বাস্তব মানে $(x-1)^2$ ঋণাত্মক নহে।

$\therefore$ $3(x-1)^2+5$-এর মান কখনই 5 অপেক্ষা কম হইতে পারে না।

অতএব, $3x^2-6x+8$-এর মান কখন 5 অপেক্ষা কম হইতে পারে না এবং লঘিষ্ঠ মান যখন 5 তখন $x=1$ হইবে।

উদা. 4. x-এর কোন্ মানের জন্য $2x^2+5x-3$ রাশিটি ঋণাত্মক হইবে? রাশিটির ক্ষুদ্রতম মান কি হইবে? [C. U. '50]

$$2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3=(x+3)(2x-1)$$
$$=2(x+3)(x-\tfrac{1}{2}).$$

x-এর মান যখন -3 অপেক্ষা ছোট তখন উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক; সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ রাশিটি ধনাত্মক। আবার যখন x-এর মান $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বড় হয়, তখন উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ রাশিটি ধনাত্মক হয়।

যখন x-এর মান -3 অথবা $\frac{1}{2}$ হয় তখন রাশিটির মান শূন্য হয়। পুনরায়, যখন x-এর মান -3 অপেক্ষা বড় কিন্তু $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(x+3)$ ধনাত্মক ও $(x-\frac{1}{2})$ ঋণাত্মক হয়। অতএব উহাদের গুণফল অর্থাৎ রাশিটির মান ঋণাত্মক হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে x-এর -3 ও $\frac{1}{2}$-এর মধ্যবর্তী যে কোন মানেই প্রদত্ত রাশিটি ঋণাত্মক হইবে।

আবার, $2x^2+5x-3=2\{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\}$

$$=2\{x^2+\tfrac{5}{2}x+(\tfrac{5}{4})^2-(\tfrac{5}{4})^2-\tfrac{3}{2}\}$$
$$=2(x+\tfrac{5}{4})^2-2.\tfrac{25}{16}-3=2(x+\tfrac{5}{4})^2-\tfrac{49}{8}.$$

এখন x-এর কোন বাস্তব মানেই $(x+\frac{5}{4})^2$ ঋণাত্মক হইবে না, সুতরাং $2(x+\frac{5}{4})^2-\frac{49}{8}$, অর্থাৎ রাশিটির মান কখনই $-\frac{49}{8}$ অপেক্ষা ছোট হইবে না।

অতএব, রাশিটির নির্ণেয় লঘিষ্ঠ মান হইল $-\frac{49}{8}$.

উদা. 5. x বাস্তব হইলে দেখাও যে $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$-এর মান 7 এবং $\frac{1}{7}$-এর মধ্যবর্তী। [C. U. '40]

মনে কর, $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$.

$\therefore \quad y(x^2+3x+4)=x^2-3x+4,$

বা, $x^2(y-1)+3x(y+1)+4(y-1)=0$; ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

x বাস্তব বলিয়া সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

এখানে নিরূপক $=\{3(y+1)\}^2-16(y-1)^2\}=-(7y^2-50y+7)$

$=-7(y-\frac{1}{7})(y-7)$

$\therefore$ x বাস্তব বলিয়া $-7(y-\frac{1}{7})(y-7)\nless 0$ (ঋণাত্মক নহে)

বা, $7(y-\frac{1}{7})(y-7)\ngtr 0$ (ধনাত্মক নহে)

এখন, y-এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয় : সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল ধনাত্মক হয়, অতএব y, $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না। আবার, y-এর মান 7 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়, সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল ধনাত্মক হয়, অতএব y-এর মান 7 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

যখন y-এর মান $\frac{1}{7}$ অথবা 7-এর সমান হয়, তখন নিরূপকটি শূন্য হয়। পুনরায় যখন y-এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা বড় কিন্তু 7 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y-\frac{1}{7})$ ধনাত্মক ও $(y-7)$ ঋণাত্মক। অতএব, উহাদের গুণফল ঋণাত্মক হয়।

অতএব, দেখা যাইতেছে যে, x বাস্তব হইলে y-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান $\frac{1}{7}$ ও 7-এর মধ্যবর্তী হইবে।

উদা. 6. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$-এর 1 ও -7-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইতে পারে না। [C. U. '44]

মনে কর, $y=\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$.

অতএব, $y(x^2-4x+3)=2x^2-2x+4,$

বা, $x^2(y-2)-2x(2y-1)+(3y-4)=0$; ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

x বাস্তব বলিয়া সমীকরণটির নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

এখানে নিরূপক $=4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4)$.

x বাস্তব বলিয়া $4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4) \not< 0$

বা, $4(y^2+6y-7) \not< 0$,

বা, $4(y+7)(y-1) \not< 0$.

এখন, y-এর মান -7 অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়, সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়। আবার, y-এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়।

যখন y-এর মান -7 বা 1-এর সমান হয় তখন নিরূপকটি শূন্য হয়।

আবার, যখন y-এর মান -7 অপেক্ষা বড় কিন্তু 1 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y+7)$ ধনাত্মক ও $(y-1)$ ঋণাত্মক হয়, সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ঋণাত্মক হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, x বাস্তব হইলে y-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান 1 ও -7-এর মধ্যবর্তী কোন মানই হইবে না।

উদা. 7. দেখাও যে x বাস্তব হইলে $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$-এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে। [C. U. '47]

মনে কর, $y=\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$. অতএব, $y(x^2+4x+2)=2x^2+4x+1$,

বা, $x^2(y-2)+4x(y-1)+(2y-1)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\because$ x বাস্তব, $\therefore$ সমীকরণটির নিরূপক অর্থাৎ

$16(y-1)^2-4(y-2)(2y-1) \not< 0$,

বা, $8y^2-12y+8 \not< 0$, বা, $8(y^2-\frac{3}{2}y)+8 \not< 0$,

বা, $8\{y^2-\frac{3}{2}y+(\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\}+8 \not< 0$, বা, $8(y-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{2} \not< 0$.

এখানে দেখা যাইতেছে, $(y-\frac{3}{4})^2$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি, সুতরাং y-এর কোন বাস্তব মানেই রাশিটি ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব, y-এর যে কোন বাস্তব মানেই $8(y-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{2}$ রাশিটি সতত ধনাত্মক হইবে।

অতএব, x বাস্তব হইলে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

উদা. 8. x বাস্তব এবং a-এর 1 ও 3-এর মধ্যবর্তী যে কোন মান হইলে, দেখাও যে $\dfrac{ax^2+x-2}{a+x-2x^2}$-এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

মনে কর, $y=\dfrac{ax^2+x-2}{a+x-2x^2}$; সুতরাং $y(a+x-2x^2)=ax^2+x-2$,

বা, $x^2(2y+a)-x(y-1)-(ay+2)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং x-এর মান বাস্তব বলিয়া সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ, $(y-1)^2+4(2y+a)(ay+2)\nless 0$,

বা, $(8a+1)y^2+2(2a^2+7)y+(8a+1)\nless 0$,

এখন y-এর যে কোন মানের জন্য $(8a+1)y^2+2(2a^2+7)y+(8a+1)$ রাশিটি সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হইবে যদি $8a+1>0$ এবং রাশিটির নিরূপক $\ngtr 0$ হয়। অর্থাৎ যদি $4(2a^2+7)^2\ngtr 4(8a+1)^2$

বা, যখন $(2a^2+7)^2\ngtr(8a+1)^2$,

বা, যখন $(2a^2+7)^2-(8a+1)^2\ngtr 0$,

বা, যখন $(2a^2+8a+8)(2a^2-8a+6)\ngtr 0$

বা, যখন $4(a^2+4a+4)(a^2-4a+3)\ngtr 0$

বা, যখন $4(a+2)^2(a-1)(a-3)\ngtr 0$.

এখানে $(a+2)^2$ পূর্ণবর্গ রাশি বলিয়া ঋণাত্মক নহে। সুতরাং উপরের শর্ত সিদ্ধ হইবে যখন $(a-1)(a-3)\ngtr 0$,

এক্ষণে উপরের শর্ত সিদ্ধ হইতে হইলে 'a'-এর মান 1 ও 3-এর মধ্যবর্তী থাকিতে হইবে। আরও দেখা যায় যে a-এর 1 ও 3-এর মধ্যবর্তী মানের জন্য প্রথম শর্তটিও অর্থাৎ $(8a+1)>0$ সিদ্ধ হয়।

অতএব যদি x বাস্তব হয় এবং a-এর মান 1 ও 3-এর মধ্যবর্তী থাকে, তবে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে না।

উদা. 9. $x^2+12xy+4y^2-26x-44y+89=0$ সমীকরণের সহিত সংযুক্ত x ও y দুইটি বাস্তব রাশি হইলে, দেখাও যে কখনও x-এর মান 4 ও 1-এর মধ্যবর্তী এবং y-এর মান $\frac{5}{2}$ ও 1-এর মধ্যবর্তী হইতে পারে না।

প্রদত্ত সমীকরণকে x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করিয়া পাওয়া যায় $x^2+2x(6y-13)+(4y^2-44y+89)=0$.

যেহেতু x বাস্তব, $\therefore$ ঐ সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ $4(6y-13)^2-4(4y^2-44y+89) \nless 0$,

বা, $4(32y^2-112y+80) \nless 0$, বা, $64(2y^2-7y+5) \nless 0$,

বা, $64(2y-5)(y-1) \nless 0$, বা, $128(y-\frac{5}{2})(y-1) \nless 0$.

[এখন পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণ দর্শাইয়া লিখিবে।]

সুতরাং দেখা যাইতেছে x বাস্তব হইলে y-এর মান $\frac{5}{2}$ ও 1-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইবে না।

পুনরায়, প্রদত্ত সমীকরণকে y-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করিয়া পাওয়া যায়, $4y^2+4y(3x-11)+(x^2-26x+89)=0$.

যেহেতু y বাস্তব, সুতরাং এই সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ, $16(3x-11)^2-16(x^2-26x+89) \nless 0$,

বা, $16(8x^2-40x+32) \nless 0$, বা, $128(x^2-5x+4) \nless 0$,

বা, $128(x-4)(x-1) \nless 0$.

[এখানেও পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণ দর্শাইয়া লিখিবে।]

সুতরাং দেখা যাইতেছে, y বাস্তব হইলে x-এর মান 4 ও 1-এর মধ্যবর্তী কোন মানই হইবে না।

উদা. 10. যদি $p>1$ হয়, তবে x-এর বাস্তব মানে $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$-এর মান $\frac{p-1}{p+1}$ ও $\frac{p+1}{p-1}$-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, $y=\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$;

সুতরাং, $y(x^2+2x+p^2)=x^2-2x+p^2$,

বা, $x^2(y-1)+2x(y+1)+p^2(y-1)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ; সুতরাং x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $4(y+1)^2-4p^2(y-1)^2 \nless 0$,

বা, $-4\{y^2(p^2-1)-2y(p^2+1)+(p^2-1)\} \nless 0$,

বা, $-4(p^2-1)\{y^2-2\frac{p^2+1}{p^2-1}y+1\} \nless 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+1-\left(\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2\right\} \ngtr 0$.

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+\frac{(p^2-1)^2-(p^2+1)^2}{(p^2-1)^2}\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+\dfrac{-4p^2}{(p^2-1)^2}\right\}\not<0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2-\left(\dfrac{2p}{p^2-1}\right)^2\right\}\not<0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}+\dfrac{2p}{p^2-1}\right)\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}-\dfrac{2p}{p^2-1}\right)\right\}\not<0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{y-\dfrac{(p-1)^2}{p^2-1}\right\}\left\{y-\dfrac{(p+1)^2}{p^2-1}\right\}\not<0,$

বা, $4(p^2-1)\left(y-\dfrac{p-1}{p+1}\right)\left(y-\dfrac{p+1}{p-1}\right)\not<0.$

এখন যেহেতু $p>1$, $\therefore$ p^2-1 ধনাত্মক এবং $\dfrac{p+1}{p-1}>\dfrac{p-1}{p+1}$

[এখানে পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণগুলি দর্শাইবে।]

সুতরাং x-বাস্তব হইলে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির $\dfrac{p-1}{p+1}$ ও $\dfrac{p+1}{p-1}$ -এর মধ্যবর্তী যে কোন মান হইবে।

উদা. 11. $5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$-এর একঘাত উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

এখানে $5x^2+13xy-6y^2=5x^2+15xy-2xy-6y^2$

$=(x+3y)(5x-2y).$

অতএব, মনে কর, $5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$

$=(x+3y+a)(5x-2y+b).$

$\therefore$ উভয় পক্ষেই দ্বিঘাত পদগুলি $(5x^2+13xy-6y^2)$ এক,

$\therefore$ $-7x+13y-6\equiv a(5x-2y)+b(x+3y)+ab$

$\equiv(5a+b)x+(3b-2a)y+ab$

$\therefore$ $5a+b=-7\cdots(1)$, $3b-2a=13\cdots(2)$, এবং $ab=-6\cdots(3)$

এখন, (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটিই a ও b-এর একই মানে সিদ্ধ না হইলে প্রদত্ত রাশির কোন উৎপাদক হইবে না।

এখন, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=-2$, $b=3$ এবং ঐ দুই মান দ্বারা সমীকরণ (3)টিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় হইল $x+3y-2$ ও $5x-2y+3$.

উদা. 12. x বাস্তব হইলে, দেখাও $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$-এর মান a^2+b^2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

মনে কর, $y=2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$

বা, $x+\sqrt{x^2+b^2}=\dfrac{y}{2(a-x)}$

বা, $\sqrt{x^2+b^2}=\dfrac{y}{2(a-x)}-x=\dfrac{y-2x(a-x)}{2(a-x)}$

বা, $2(a-x)\sqrt{x^2+b^2}=y-2x(a-x)$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই,

$$4(a-x)^2(x^2+b^2)=y^2-4xy(a-x)+4x^2(a-x)^2$$

বা, $x^2(4b^2-4y)+x(4ay-8ab^2)+(4a^2b^2-y^2)=0$

এখানে, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং যেহেতু x বাস্তব, সেজন্য ইহার নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ $(4ay-8ab^2)^2 \geqslant 4(4b^2-4y)(4a^2b^2-y^2)$

বা, $a^2y^2-4a^2b^2y+4a^2b^4-4a^2b^4+4a^2b^2y+b^2y^2-y^3 \geqslant 0$

বা, $y^2(a^2+b^2-y) \geqslant 0$

$\therefore$ $a^2+b^2-y \geqslant 0$, কারণ y^2 সর্বদা ধনাত্মক,

$\therefore$ $y \leqslant a^2+b^2$, অর্থাৎ y-এর বৃহত্তম মান a^2+b^2.

প্রশ্নমালা 6E

x বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় কর :

1. $3x^2+5x+4$. 2. $15x-5x^2-15$. 3. $4x^2-3x+1$.

4. x বাস্তব হইলে উহার কোন্ কোন্ মানের জন্য $2x^2-11x+14$ রাশিটি ঋণাত্মক হইবে ?

5. x-এর বাস্তব মানে $(1-x)(3+2x)$-এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। [C. U. '48]

6. প্রমাণ কর যে x-এর সকল বাস্তব মানে $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$-এর মান 7 ও $\frac{1}{7}$-এর মধ্যবর্তী হইবে। [C. U. '30]

7. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$-এর 5 ও 9-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইতে পারে না। [C. U. '34 ; G. U. '48]

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+\frac{-4p^2}{(p^2-1)^2}\right\}\ngtr 0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2-\left(\frac{2p}{p^2-1}\right)^2\right\}\ngtr 0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}+\frac{2p}{p^2-1}\right)\left(y-\frac{p^2+1}{p^2-1}-\frac{2p}{p^2-1}\right)\right\}\ngtr 0,$

বা, $4(p^2-1)\left\{y-\frac{(p-1)^2}{p^2-1}\right\}\left\{y-\frac{(p+1)^2}{p^2-1}\right\}\ngtr 0,$

বা, $4(p^2-1)\left(y-\frac{p-1}{p+1}\right)\left(y-\frac{p+1}{p-1}\right)\ngtr 0.$

এখন যেহেতু $p>1$, $\therefore$ p^2-1 ধনাত্মক এবং $\frac{p+1}{p-1}>\frac{p-1}{p+1}$

[এখানে পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণগুলি দর্শাইবে।]

সুতরাং x-বাস্তব হইলে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির $\frac{p-1}{p+1}$ ও $\frac{p+1}{p-1}$ -এর মধ্যবর্তী যে কোন মান হইবে।

উদা. **11.** $5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$-এর একঘাত উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

এখানে $5x^2+13xy-6y^2=5x^2+15xy-2xy-6y^2$
$$=(x+3y)(5x-2y).$$

অতএব, মনে কর, $5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$
$$=(x-3y+a)(5x-2y+b).$$

$\therefore$ উভয় পক্ষেই দ্বিঘাত পদগুলি $(5x^2+13xy-6y^2)$ একই,

$\therefore$ $-7x+13y-6\equiv a(5x-2y)+b(x+3y)+ab$
$$\equiv(5a+b)x+(3b-2a)y+ab$$

$\therefore$ $5a+b=-7\cdots(1)$, $3b-2a=13\cdots(2)$, এবং $ab=-6\cdots(3)$

এক্ষণে, (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটিই a ও b-এর একই মানে সিদ্ধ না হইলে প্রদত্ত রাশির কোন উৎপাদক হইবে না।

এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=-2$, $b=3$ এবং ঐ দুই মান দ্বারা সমীকরণ (3)টিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় হইল $x+3y-2$ ও $5x-2y+3$.

উদা. 12. x-বাস্তব হইলে, দেখাও $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$-এর মান a^2+b^2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

মনে কর, $y=2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$

বা, $x+\sqrt{x^2+b^2}=\dfrac{y}{2(a-x)}$

বা, $\sqrt{x^2+b^2}=\dfrac{y}{2(a-x)}-x=\dfrac{y-2x(a-x)}{2(a-x)}$

বা, $2(a-x)\sqrt{x^2+b^2}=y-2x(a-x)$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই,

$$4(a-x)^2(x^2+b^2)=y^2-4xy(a-x)+4x^2(a-x)^2$$

বা, $x^2(4b^2-4y)+x(4ay-8ab^2)+4(a^2b^2-y^2)=0$

এক্ষণে, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং যেহেতু x বাস্তব, সেজন্য ইহার নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ $(4ay-8ab^2)^2 \geqslant 4(4b^2-4y)(4a^2b^2-y^2)$

বা, $a^2y^2-4a^2b^2y+4a^2b^4-4a^2b^4+4a^2b^2y+b^2y^2-y^3 \geqslant 0$

বা, $y^2(a^2+b^2-y) \geqslant 0$

$\therefore\ a^2+b^2-y \geqslant 0$, কারণ y^2 সর্বদা ধনাত্মক,

$\therefore\ y \leqslant a^2+b^2$, অর্থাৎ y-এর বৃহত্তম মান a^2+b^2.

প্রশ্নমালা 6E

x বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিমালার চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় কর:

1. $2x^2+5x+4$. 2. $12x-3x^2-15$. 3. $4x^2-3x+1$.

4. x বাস্তব হইলে উহার কোন্ কোন্ মানের মধ্যে $2x^2-11x+14$ অপেক্ষকটি ধনাত্মক হইবে ?

5. x-এর বাস্তব মানে $(1-x)(2+3x)$-এর চরম মান নির্ণয় কর। [C. U. '46]

6. প্রমাণ কর যে x-এর সকল বাস্তব মানে $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ এর মান 3 ও $\frac{1}{3}$ এর মধ্যবর্তী হইবে। [C. U. '55]

7. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x+7}$-এর 5 ও 9-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইতে পারে না। [C. U. '54 ; G. U. '48]

8. x বাস্তব হইলে $\frac{5(x^2-\frac{x}{5}+1)}{x^2+x+1}$-এর চরম ও অবম (ক্ষুদ্রতম) মান কত হইবে ?

9. x-এর বাস্তব মানের পক্ষে $\frac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$ রাশিটির মানের সীমা নির্ণয় কর। [C. U. '48]

10. যদি x বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{3x^2+38x-85}{x^2+2x-7}$-এর 7 ও 11-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইতে পারে না। [G. U. '49]

11. x যদি বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে $\frac{x}{x^2-5x+9}$-এর মান 1 এবং $-\frac{1}{11}$ এর মধ্যবর্তী হইবে। [C. U. '53 ; P. U. '41]

12. x যদি বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+4)}$-এর মান $\frac{25}{49}$ ও 1-এর মধ্যবর্তী হইতে পারে না।

13. প্রমাণ কর যে x-এর বাস্তব মানে $\frac{p^2}{1-x}-\frac{q^2}{1+x}$ রাশিমালার সকল বাস্তব মান হইতে পারে।

14. প্রমাণ কর যে, x-এর কোন বাস্তব মানে

$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)}$-এর মান 1 ও 9-এর মধ্যবর্তী হইতে পারে না।

15. x-এর বাস্তব মানে $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় কর। [H. S. '65 ; P. U. '40]

16. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে x-এর মান যথাক্রমে 1 ও -2 হইলে $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$-এর চরম ও অবম মান যথাক্রমে 4 ও -5 হইবে। [Pat. U. '40]

17. x বাস্তব হইলে $\frac{x^2+2x+11}{x-1}$, a এবং b-এর মধ্যবর্তী নয় এরূপ সকল মান গ্রহণ করিতে পারে। a এবং b-এর মান নির্ণয় কর। [I. I. T. Joint Admission, Test 1972]

18. নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির দুইটি একঘাত উৎপাদক বাহির কর।
$3x^2+7xy-5x-6y^2+7y-2.$

19. প্রমাণ কর যে x-এর সকল বাস্তব মানে $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে $\frac{5}{4}$ এবং 1 হইবে এবং তখন x-এর অনুরূপ মান যথাক্রমে 1 ও 2 হইবে।

20. m-এর মান কত হইলে x^2-7x+m এবং $x^2-13x+3m$-এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকিবে?

21. যদি px^2-qx+r ও qx^2-rx+p-এর একটি সাধারণ একঘাত উৎপাদক থাকে, তবে প্রমাণ কর যে $p=0$ অথবা $p^3+q^3+r^3=3pqr$.

22. প্রমাণ কর যে যদি $y^2+x^2-10x+21=0$ সমীকরণটি x ও y-এর বাস্তব মানে সিদ্ধ হইতে হয়, তবে x-এর মান 3 ও 7-এর মধ্যবর্তী এবং y-এর মান -2 ও 2-এর মধ্যবর্তী হইতে হইবে।

§ 6·16. দ্বিঘাত সহসমীকরণ (Simultaneous Quadratic Equations).

উদাহরণমালা 6E
(দুইটি অজ্ঞাত রাশি)

উদা. 1. সমাধান কর: $\left.\begin{aligned} x-y&=2 \\ xy&=3 \end{aligned}\right\}$

[প্রথম প্রণালী] $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(2)^2+4\times 3=16$.

$\therefore\ x+y=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$

এখন, $\left.\begin{aligned} x+y&=4 \\ x-y&=2 \end{aligned}\right\}$

(যোগ) $2x=6.\quad \therefore\ x=3$, সুতরাং $y=4-3=1.$

আবার, $\left.\begin{aligned} x+y&=-4 \\ x-y&=2 \end{aligned}\right\}$

(যোগ) $2x=-2,\quad \therefore\ x=-1$, সুতরাং $y=-4+1=-3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $\left.\begin{aligned} x&=3 \\ y&=1 \end{aligned}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{aligned} x&=-1 \\ y&=-3 \end{aligned}\right\}$.

[দ্বিতীয় প্রণালী] প্রথম সমীকরণ হইতে $x=y+2$.

এখন x-এর মান $y+2$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $(y+2)y=3$,

বা, $y^2+2y=3$, বা, $y^2+2y-3=0$,

বা, $(y+3)(y-1)=0\quad \therefore\ y=1$ বা -3.

এক্ষণে, যদি $y=1$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=1+2=3$.

আবার যদি $y=-3$ হয়, তবে প্রথম সমীকরণ হইতে $x=-3+2=-1$.

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-3\end{array}\right\}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই প্রণালীতে যে কোন সমীকরণের সমাধান করা যায়। সুবিধামত কোন সময়ে x-এর মান বা কোন সময়ে y-এর মান একটি সমীকরণ হইতে লইয়া অন্যটিতে বসাইতে হয়। উত্তর লিখিবার সময় সমাধান xএর একটি মানের সহিত y-এর ঠিক অনুরূপ মানটি একত্র লইয়া উত্তর লিখিবে।]

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}x+y=7\\x^2+y^2=25\end{array}\right\}\begin{array}{l}\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots(2)\end{array}$

$\because\ x+y=7.\quad \therefore\ x=7-y\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে, সমীকরণ-(2)-এ x-এর ঐ মান বসাইয়া পাই $(7-y)^2+y^2=25$

বা, $49-14y+2y^2=25$, বা, $2y^2-14y^2+24=0$,

বা, $y^2-7y+12=0$, বা, $(y-3)(y-4)=0$, $\therefore\ y=3$ বা 4

$y=3$ হইলে (3) হইতে পাই $x=7-3=4$.

$y=4$ " " " " $x=7-4=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}\right\}$.

উদা. 3. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdots(1)\\x+y=9\cdots(2)\end{array}\right\}$ [C. U. '36]

(1) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$ সুতরাং $\frac{9}{xy}=\frac{1}{2}$ [$\because\ x+y=9$]

$\therefore\ xy=18$,

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9$, $\therefore\ x-y=\pm 3$.

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}x+y=9\\x-y=3\end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=12$, $\therefore\ x=6$, সুতরাং (2) হইতে $y=9-6=3$.

আবার, $\left.\begin{array}{l}x+y=9\\x-y=-3\end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=6$, $\therefore\ x=3$, সুতরাং $y=9-3=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=3\end{array}\right\}$ অথবা $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=6\end{array}\right\}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}x+\frac{3}{y}=2\cdots(1)\\y+\frac{3}{x}=-2\cdots(2)\end{array}\right\}$ [A. U. 1879]

(1) হইতে পাই $xy+3=2y\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $xy+3=-2x\cdots(4)$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে পাই $2y=-2x$, বা, $y=-x\cdots(5)$

এক্ষণে, (1)-এ y-এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $x+\dfrac{3}{-x}=2$

বা, $x^2-3=2x$, বা, $x^2-2x-3=0$,

বা, $(x-3)(x+1)=0$, $\therefore$ $x=3$ বা, -1.

$x=3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3$.

এবং $x=-1$ হইলে (5) হইতে পাই $y=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array}\right\}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll} (x+a)(y+b)=c^2 & \cdots(1) \\ x+y=a+b & \cdots(2) \end{array}\right\}$ [C. U. '30]

উভয় পক্ষে $a+b$ যোগ করিয়া (2) হইতে পাই

$(x+a)+(y+b)=2(a+b)\cdots(3)$.

মনে কর, $x+a=p$ এবং $y+b=q$, সুতরাং (3) ও (1) হইতে পাই

$p+q=2(a+b)\cdots(4)$ এবং $pq=c^2$.

এক্ষণে, $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4(a+b)^2-4c^2$

$=4\{(a+b)^2-c^2\}$

$\therefore$ $p-q=\pm 2\sqrt{(a+b)^2-c^2}$ $\cdots$ (5)

(4) ও (5) যোগ করিয়া পাই, $2p=2\{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$

$\therefore$ $p=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ $x+a=a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ $x=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

আবার, (4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাই

$2q=2\{a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}\}$

$\therefore$ $q=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ $y+b=a+b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ $y=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ সমাধান : $x=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$y=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

উদা. 6. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} x^y=y^2 \;\cdots\cdots(1) \\ y^{2y}=x^4\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$

[B. U. E. '63 ; C. U. '41, '45]

(2) হইতে পাই $(y^2)^y=x^4$. এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x^y=y^2$,

বা, $(x^y)^y=(y^2)^y$, বা $(x)^{y^2}=x^4$, $\therefore\ y^2=4$, $\therefore y=\pm 2$.

যদি $y=2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $x^2=2^2$, $\therefore\ x=\pm 2$.

যদি $y=-2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $(x)^{-2}=(-2)^2=4$.

বা, $\frac{1}{x^2}=4$, বা, $x^2=\frac{1}{4}$, $\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\pm 2, y=2$; অথবা, $x=\pm\frac{1}{2}, y=-2$.

উদা. 7. সমাধান কর : $8.2^{xy}=4^y$...... (1), $9^x.3^{xy}=\frac{1}{27}$...(2)

[C. U. '42]

(1) হইতে পাই $2^3\times 2^{xy}=2^{2y}$, বা, $2^{3+xy}=2^{2y}$.

$\therefore\ 3+xy=2y$·· (3).

(2) হইতে পাই $3^{2x}.3^{xy}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$, বা, $3^{2x+xy}=3^{-3}$,

$\therefore\ 2x+xy=-3$·· (4)

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $3-2x=2y+3$, বা, $-x=y$···(5),

এক্ষণে (3)এ yএর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই $3-x^2=-2x$.

বা, $x^2-2x-3=0$, বা, $(x-3)(x+1)=0$, $\therefore\ x=3, -1$,

$x=3$ হইলে (5) হইতে পাই $y=-3$,

$x=-1$,, ,, ,, ,, $y=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=\ \ 3\\ y=-3\end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix}x=-1\\ y=\ \ 1\end{matrix}\right\}$.

উদা. 8. সমাধান কর : $x^3+y^3=9$···(1), $x+y=3$··· (2)

[C. U. '16]

$\because\ x^3+y^3=9$, $\therefore\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9$.

বা, $(3)^3-3xy.3=9$, বা, $27-9xy=9$, $\therefore\ xy=2$.

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(3)^2-4\times 2=1$

$\therefore\ x-y=\pm 1$··· (3).

এখন, (2) ও (3) হইতে পাই,

(a) $\left.\begin{matrix}x+y=3\\ x-y=1\end{matrix}\right\}$ এবং (b) $\left.\begin{matrix}x+y=\ \ 3\\ x-y=-1\end{matrix}\right\}$

$\therefore$ (a) হইতে $x=2, y=1$ এবং (b) হইতে $x=1, y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=2\\ y=1\end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix}x=1\\ y=2\end{matrix}\right\}$.

প্রশ্নমালা 6F

সমাধান কর :—

1. $x+y=12, xy=35.$ 2. $x+y=7, x^2+y^2=29.$

3. $x+y=5, x^2+2y=13.$

4. $x+y=\frac{5}{6}, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [C. U. '37]

5. $x^2+y^2=1, 3x+4y=5.$ [C. U. '22]

6. (i) $x^2+xy=28, x-y=1.$ (ii) $x^2+xy=15, x-y=1.$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, x+y=3.$ [M. U. 1860]

8. (i) $x^2+y^2=a, x+2y=1.$

(ii) $ax^2+by^2=a+b, x+y=1.$ [B. U. E. '63 ; C. U. '29]

(iii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1.$ [C. U. '25]

9. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}, x+y=10.$ [C. U. '47]

10. $x+\frac{4}{y}=1, y+\frac{4}{x}=25.$ [H. S. '63 ; C. U. '40]

11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{9}, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}.$

12. $3x-y=8, y^2-8x=9.$ 13. $x^2+y^2=41, xy=20.$

14. $2x^2+3xy+4y^2=24, x+3y=7.$ [C. U. '16]

15. (i) $y^x=4, y^2=2^x.$ [C. U. '43]

(ii) $x^y=y^x, x=2y.$ [C. U. '35]

16. $x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, y+\frac{1}{x}=3.$ [C. U. '48]

17. (i) $3^x=9^y, 5^{x+y+1}=25^{xy}.$ [C. U. '46]

(ii) $2^{3x}.4^y=128, 9^{x+y}=27^{xy}.$

18. $4^x=2^y, (27)^{xy}=9^{y+1}.$

19. $x^2+y^2=b, x+2y=1.$

20. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18, x+y=12.$ [C. U. '19]

21. $x^3-y^3=218, x-y=2.$ [C. U. '17]

22. $x^2+y^2=74, xy=35.$

23. $5x=2y,\ \frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20}.$ [C. U. '50]

24. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2},\ \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}.$ [C. U. '52]

25. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5,\quad \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}.$ [C. U. '53]

26. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [U. P. B. '47]

27. $x+y=a+b,\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1.$ [U. P. B. '51]

28. $ax^2+by^2=a+b, x+y=1.$ [C. U. '29]

29. $x+y+xy=27,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$ [P. U. '49]

30. $x+y-\sqrt{xy}=7,\quad x^2+y^2+xy=133.$ [C. U. '51]

31. $(x-a)(y-b)=ab,\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$ [C. U. '34]

32. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}},\ 2x-3y=4.$

[C. U. '49]

§ 6·17. তিনটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সহসমীকরণ :

তিনটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সহসমীকরণের সমাধানের কোন সাধারণ নিয়ম নাই। নিম্নের উদাহরণগুলির সাহায্যে সমাধানের বিভিন্ন উপায়গুলি দেখান হইল।

উদাহরণমালা 6F

উদা. 1. সমাধান কর : $x+y+z=0, 2x-3y+4z=0,$

$$x^2+y^2-z^2=28.$$

এবং $\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{array}\right\}$ বজ্রগুণনের দ্বারা $\frac{x}{4+3}=\frac{y}{2-4}=\frac{z}{-3-2}$

বা, $\frac{x}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-5}=k$ (মনে কর)

$\therefore\ x=7k, y=-2k, z=-5k.$

সমীকরণ (3) হইতে পাই $(7k)^2+(2k)^2-(5k)^2=28.$

অথবা, $28k^2=28$, বা, $k^2=1$, $\therefore$ $k=\pm 1$.

$\therefore$ যখন $k=1$, তখন $x=7$, $y=-2$, $z=-5$.

যখন $k=-1$, তখন $x=-7$, $y=2$, $z=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=2 \\ z=5 \end{array}\right\}$

উদা. 2. সমাধান কর : $x(y+z)=14, y(z+x)18, z(x+y)=20$.

সমীকরণ তিনটি হইতেছে
$$xy+zx=14\cdots(1)$$
$$yz+xy=18\cdots(2)$$
$$zx+yz=20\ldots(3)$$

(1), (2) এবং (3) যোগ করিয়া পাই, $2(xy+yz+zx)=52$

বা, $xy+yz+zx=26\cdots(4)$

(4) – (1) করিয়া পাই, $yz=12\cdots(5)$

(4) – (2) করিয়া পাই, $zx=8\cdots(6)$

(4) – (3) করিয়া পাই, $xy=6\cdots(7)$

(5), (6) এবং (7) গুণ করিয়া পাই $x^2y^2z^2=12\times 8\times 6=24^2$

$\therefore$ $xyz=\pm 24\cdots(8)$

(8)-কে যথাক্রমে (5), (6) এবং (7) দিয়া ভাগ করিয়া পাই,

$x=\pm 2, y=\pm 3, z=\pm 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-3 \\ z=-4 \end{array}\right\}$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$5x-4y+z=2,\ 2x+5y-4z=3,\ x^2+y^2+2z^2=4.$$

প্রথম দুইটি সমীকরণকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়

$$5x-4y+(z-2)=0\cdots(1)$$
$$2x+5y+(-4z-3)=0\cdots(2)$$

বজ্রগুণন দ্বারা
$$\frac{x}{-4(-4z-3)-5(z-2)}=\frac{y}{2(z-2)-5(-4z-3)}$$
$$=\frac{1}{25+8}$$

বা, $\dfrac{x}{11z+22}=\dfrac{y}{22z+11}=\dfrac{1}{33}$

$\therefore \quad x=\frac{11z+22}{33}=\frac{z+2}{3}, y=\frac{22z+11}{33}=\frac{2z+1}{3}$

x এবং y-এর মান, $x^2+y^2+2z^2=4$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\left(\frac{z+2}{3}\right)^2+\left(\frac{2z+1}{3}\right)^2+2z^2=4$$

বা, $(z+2)^2+(2z+1)^2+18z^2=36$

বা, $23z^2+8z-31=0$, বা, $(23z+31)(z-1)=0$

$\therefore \quad z=1$ বা, $-\frac{31}{23}$.

যখন $z=1$, $x=\frac{z+2}{3}=1$, $y=\frac{2z+1}{3}=1$.

যখন $z=-\frac{31}{23}$, $x=\frac{-\frac{31}{23}+2}{3}=+\frac{5}{23}$, $y=\frac{-\frac{62}{23}+1}{3}=-\frac{13}{23}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=1, y=1, z=1$

এবং $x=\frac{5}{23}$, $y=-\frac{13}{23}$, $z=-\frac{31}{23}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $xy+x+y=23$

$yz+y+z=27$

$zx+z+x=41$ [C. U. '45]

সমীকরণগুলির উভয় পক্ষে 1 যোগ করিয়া পাই,

$(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=24\cdots(1)$

$(y+1)(z+1)=yz+y+z+1=28\cdots(2)$

$(z+1)(x+1)=zx+z+x+1=42\cdots(3)$

(1), (2), (3) গুণ করিয়া পাই,

$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=24\times 28\times 42=6^2\times 7^2\times 4^2$

বা, $(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 6.7.4\cdots(4)$

(4)কে যথাক্রমে (1), (2) এবং (3) দিয়া ভাগ করিয়া পাই,

$z+1=\pm 7, x+1=\pm 6, y+1=\pm 4.$

$\therefore \quad z=6$ বা -8, $x=5$ বা -7, $y=3$ বা -5

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{matrix}x=5\\y=3\\z=6\end{matrix}\right\}$ এবং $\left.\begin{matrix}x=-7\\y=-5\\z=-8\end{matrix}\right\}$

উদা. 5. সমাধান কর :

$xy=2(x+y)$, $yz=3(y+z)$, $zx=4(z+x)$.

স্পষ্টতঃ $x=0, y=0, z=0$ একটি সমাধান।

এখন যদি $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ হয়, তবে সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে z, x এবং y দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}xyz=zx+yz\\ \frac{1}{3}xyz=xy+zx\\ \frac{1}{4}xyz=yz+xy\end{array}\right\}\begin{array}{l}\cdots(1)\\ \cdots(2)\\ \cdots(3)\end{array}$$

(1), (2) এবং (3) যোগ করিয়া পাই, $\frac{13}{12}xyz=2(xy+yz+zx)$

বা, $xy+yz+zx=\frac{13}{24}xyz\cdots(4)$

(4) − (1) করিয়া পাই, $xy=\frac{1}{24}xyz \quad \therefore \quad z=24$

(4) − (2) করিয়া পাই, $yz=\frac{5}{24}xyz \quad \therefore \quad x=\frac{24}{5}$

(4) − (3) করিয়া পাই, $zx=\frac{7}{24}xyz \quad \therefore \quad y=\frac{24}{7}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l}x=\frac{24}{5}\\ y=\frac{24}{7}\\ z=24\end{array}\right\}$

উদা. 6. সমাধান কর : $x^2-yz=\ \ 5\cdots(1)$

$y^2-zx=\ \ 3\cdots(2)$

$z^2-xy=-1\cdots(3)$ [C. U. '46]

$(1)\times y+(2)\times z+(3)\times x$ করিয়া পাই,

$-x+5y+3z=y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)=0\cdots(4)$

$(2)\times x+(1)\times z+(3)\times y$ করিয়া পাই,

$3x-y+5z=x(y^2-zx)+z(x^2-yz)+y(z^2-xy)=0\ldots(5)$*

$$\therefore \left.\begin{array}{l}-x+5y+3z=3\cdots(4)\\ 3x-y+5z=0\cdots(5)\end{array}\right\}$$

(4) এবং (5) হইতে বজ্রগুণনের দ্বারা পাই ;

$$\frac{x}{25+3}=\frac{y}{9+5}=\frac{z}{1-15} \text{ বা, } \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}=k \text{ (মনে কর)}$$

$\therefore \quad x=2k,\ y=k,\ z=-k.$

(1)-এ এই মান বসাইয়া পাই, $4k^2+k^2=5 \quad \therefore \quad k=\pm 1$

$\therefore \quad x=2,\ y=1,\ z=-1$ এবং $x=-2,\ y=-1,\ z=1.$

উদা. 7. সমাধান কর : $x(1+y)=3\cdots(1)$

$y(1+z)=8\cdots(2)$

$z(1+x)=6\cdots(3)$ [C. U. 1942]

---

*(4) ও (5)-এর ডানপক্ষে বন্ধনী তুলিয়া দেখ, যোগফল উভয় ক্ষেত্রেই শূন্য।

(2) হইতে পাই $y=\frac{8}{1+z}=\frac{8}{1+\frac{6}{1+x}}$ [(3) হইতে] $=\frac{8(1+x)}{7+x}$.

y-এর মান(1)-এ বসাইয়া পাই, $x\left(1+\frac{8+8x}{7+x}\right)=3$

বা, $x(15+9x)=3(7+x)$

বা, $9x^2+12x-21=0$, বা, $3x^2+4x-7=0$

বা, $(3x+7)(x-1)=0$, $\therefore$ $x=1$ বা, $-\frac{7}{3}$.

যখন $x=1$, $y=\frac{8.2}{7+1}=2$, $z=\frac{6}{1+1}=3$.

যখন $x=-\frac{7}{3}$, $y=\frac{8.\frac{-4}{3}}{7-\frac{7}{3}}=\frac{-32}{14}=-\frac{16}{7}$, $z=\frac{6}{1-\frac{7}{3}}=\frac{-9}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=3\end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{3}\\y=-\frac{16}{7}\\z=-\frac{9}{2}\end{array}\right\}$

উদা. 8. সমাধান কর $x^2+y^2+z^2=84\cdots(1)$

$x+y+z=14\cdots(2)$

$y^2=zx\cdots(3)$ [C. U. '40]

(2)কে বর্গ করিয়া পাই, $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=14^2\cdots(4)$

বা, $yz+zx+xy=\frac{196-84}{2}=56$ [(4) − (1) হইতে]

(3) হইতে zx এর মান বসাইয়া পাই,

$yz+y^2+xy=56$, বা, $y(x+y+z)=56$

বা, $y.14=56$ $\therefore$ $y=4$.

$\therefore$ $zx=y^2=16$, এবং $z+x=14-y=10$

বা, $x=10-z$, $\therefore$ $z(10-z)=16$

বা, $z^2-10z+16=0$, $\therefore$ $z=2$ বা 8, $x=8$, বা 2

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=8$, $y=4$, $z=2$

এবং $x=2$, $y=4$, $z=8$.

প্রশ্নমালা 6G

সমাধান কর :

1. (i) $5x-y-3z=0$; $9x+3y-7z=0$
$3x^2+2y^2+z^2=23$.

(ii) $x-4y+5z=0$; $4x-5y-2z=0$;
$x^2-2y^2+z^2=16$.

2. (i) $x+2y-3z=-6$; $2x+3y+z=7$; $x^2+y^2+z^2=14$.

(ii) $2x+3y+4z=3$; $4x-9y+4z=0$;
$4x^2+9y^2+32z^2=4$.

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $yz=bc$.

4. $x(y+z)=y(z+x)=z(x+y)=1$. [C. U. 1944]

5. $x(y+z)=5$, $y(z+x)=8$, $z(x+y)=9$. [C. U. 1938]

6. $xy+x+y=20$, $yz+y+z=17$, $zx+z+x=41$.

7. $yz=a^2$, $zx=b^2$, $xy=c^2$.

8. $(x+y)(y+z)=35$, $(y+z)(z+x)=42$, $(z+x)(x+y)=30$.

9. $(x+y)(y+z)=ab$, $(y+z)(z+x)=bc$, $(z+x)(x+y)=ca$.

10. $3x+4y=7xy$, $4y+5z=9yz$, $5z+6x=11zx$.

11. $(y+z)(x+y+z)=18$, $(z+x)(x+y+z)=24$.
$(x+y)(x+y+z)=30$.

12. $x(1+y)=8$; $y(1+z)=9$, $z(1+x)=12$.

13. $x:y:z=a:b:c$; $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2$
$=a^2+b^2+c^2$.

14. $xy=(x+y)$, $yz=3(y+z)$, $zx=5(z+x)$.

15. (i) $y^2-zx=1$, $z^2-xy=7$, $x^2-yz=-5$.

(ii) $y^2-zx=a$, $z^2-xy=b$, $x^2-yz=c$.

16. $x=2y=3z=xyz$.

17. $x+y+z=9$; $x^2+y^2+z^2=29$; $xy+yz+zx=26$.

18. $4x+3y+4=6xy$, $9y+8z+6=12yz$, $4z+6x+5=8zx$.

19. $x+y+z=9$, $xyz=24$; $x^3+y^3+z^3=99$.

20. $x+y+z=12$, $x^2+y^2+z^2=50$, $x^2=yz$.

21. $3^x.9^y=27^z$; $4^x.8^y=32^z$; $2^x.5^y.7^z=70$.

22. ত্রিভুজের পরিসীমা 56 এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের গুণফল 4200. ত্রিভুজটি সমকোণী হইলে বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

[Permutations and Combinations]

§ 7·1. **বিন্যাস** (Permutation) : কতিপয় বস্তুর একযোগে কয়েকটি করিয়া লইয়া কিংবা সব কয়টিকে লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে এক এক রকমের সাজানোকে (arrangement-কে) এক একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলে। যথা—

a ও b দুইটিকে একত্রে লইয়া সাজাইলে ab ও ba অর্থাৎ প্রথমে a ও পরে b রাখিয়া এবং প্রথমে b ও পরে a রাখিয়া এই দুই রকমে সাজান যাইবে। অতএব a ও b-এর সব কয়টি একযোগে লইয়া দুইটি বিন্যাস (Permutations) হইল।

আবার, a, b ও c এই তিনটি অক্ষরের দুইটি করিয়া লইলে কয়টি বিন্যাস হয় দেখ। একত্রে ab, ba, ac, ca, bc, cb এই ছয়টি বিন্যাস হইবে। যদি অক্ষর তিনটিকেই একত্রে লইয়া সাজান যায়, তবে $abc, acb, bca, bac, cab, cba$ এই ছয়টি বিন্যাস হইবে।

§ 7·2. **সমবায়** (Combination) : কতিপয় বস্তুর একযোগে কয়েকটি লইয়া অথবা সব কয়টিকে লইয়া বিভিন্ন দল বা মণ্ডলী (group বা selection) গঠন করিলে (একদলের বস্তুগুলি ক্রম নিরপেক্ষভাবে) এক-একটি দল বা মণ্ডলী বা নির্বাচনকে এক-একটি **সমবায়** (Combination) বলে। যথা—

a ও b এই দুইটিকে একত্রে লইয়া ক্রম নিরপেক্ষভাবে সাজাইলে ab এই একটিমাত্র দল বা সমবায় (Combination) হইবে। সমবায় ক্রমের উপর নির্ভর করে না বলিয়া এখানে a ও b-এর কোন্‌টি আগে কোন্‌টি পরে এ প্রশ্ন উঠে না, সেজন্য দল একটি হইল। সমবায়ে ab ও ba অভিন্ন। a, b ও c অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া ক্রম নিরপেক্ষভাবে দল গঠন করিলে ab, ac, bc এই তিনটি সমবায় (Combinations) হইবে।

ঐ তিনটি অক্ষরকে একত্রে লইয়া মাত্র abc একটি সমবায় হইবে। কারণ, এক্ষেত্রে $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ এগুলি একই সমবায়, বিভিন্ন নহে।

§ 7·3. **বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য** : পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, বিন্যাসে ক্রম বিবেচ্য, কিন্তু সমবায়ে ক্রম বিবেচ্য নহে, কেবলমাত্র দলই বিবেচ্য। বিন্যাসে প্রদত্ত বস্তুগুলি হইতে নির্দেশমত দুইটি বা তিনটি করিয়া লইয়া আগে

দলগুলি নির্বাচন করিয়া পরে এক-একটি নির্বাচিত দলের বস্তুগুলি বিভিন্ন ক্রমে সাজাইতে হয়। কিন্তু সমবায় ক্রম-নিরপেক্ষ বলিয়া কেবল দল বা মণ্ডলী নির্বাচনই সমবায়ের কার্য—ইহাতে এক এক দলের বস্তুগুলিকে আর বিভিন্ন ক্রমে সাজাইতে হয় না।

a, b, c এই তিনটি অক্ষরকে লইয়া বিবেচনা করা যাউক। যদি উহাদের দুইটি করিয়া দল নির্বাচন করি, তবে ab, ac, bc এই তিনটি বিভিন্ন দল বা সমবায় হইবে।

কিন্তু ঐ অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিতে হইলে, প্রথমে ab, ac এবং bc তিনটি দল নির্বাচন করিয়া তারপরে এক একটি নির্বাচিত দলের দুইটি করিয়া লইয়া অক্ষরকে বিভিন্নক্রমে সাজাইতে হইবে। ab দলটিকে ঐরূপে সাজাইলে ab ও ba দুই প্রকারে সাজানো যায়, সুতরাং ab একটি সমবায় বটে, কিন্তু উহাতে বিন্যাস সংখ্যা হইল দুইটি ab ও ba, অনুরূপে ac দল হইতে ac ও ca এবং bc দলটি হইতে bc ও cb এইরূপ বিন্যাস হইবে।

§ 7·4. **প্রতীক** (symbols): প্রত্যেকবার n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক বস্তুকে লইয়া মোট বিন্যাস সংখ্যাকে ${}^nP_r$ বা ${}_nP_r$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং প্রত্যেকবার 3টি বিভিন্ন বস্তুর 2টিকে লইয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা ${}^3P_2$ বা ${}_3P_2$.

প্রত্যেকবার n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক বস্তু লইয়া মোট সমবায় সংখ্যাকে ${}^nC_r$ বা ${}_nC_r$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে যে তিনটি বিভিন্ন অক্ষর a, b, c-র প্রত্যেকবার 2টি করিয়া অক্ষর লইয়া বিভিন্ন সমবায়গুলি হইল bc, ca ও ab অর্থাৎ মোট 3টি। সুতরাং ${}^3C_2=3$.

আবার ঐ তিনটি বিভিন্ন অক্ষরের প্রত্যেকবার 2টি করিয়া অক্ষর লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসগুলি হইল bc, cb, ca, ac, ab ও ba অর্থাৎ মোট ছয়টি। সুতরাং ${}^3P_2=6$. অনুরূপে ${}^3C_3=1$ এবং ${}^3P_3=6$.

দ্রষ্টব্যঃ (1) ${}^nP_r$ এবং ${}^nC_r$ প্রতীক দুইটিতে n এবং r প্রত্যেকটি একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $r \leqslant n$. (2) আবার ${}^nC_1=n$, কারণ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একটিকে n সংখ্যক প্রকারে লওয়া যায়।

অনুরূপে, ${}^nC_n=1$, কারণ, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সব কয়টিকে মাত্র এক প্রকারেই নির্বাচন করা যায়।

§ 7·5. বিন্যাস ও সমবায়ের মূলতত্ত্ব (The fundamental principle):

মনে কর একটি ত্রিতল বাড়ির একতলা হইতে দুইতলায় যাইবার তিনটি সিঁড়ি আছে এবং দুইতলা হইতে তিনতলায় দুইটি সিঁড়ি দিয়া যাওয়া যায়। ঐ বাড়ির একতলা হইতে তিনতলায় কয় প্রকারে যাওয়া যাইতে পারে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র 1-এ মনে কর একতলা হইতে দুইতলায় যাইবার সিঁড়ি তিনটি হইল a, b ও c এবং দুইতলা হইতে তিনতলায় যাইবার সিঁড়ি দুইটি হইল d ও e. কোন ব্যক্তি একতলা হইতে দুইতলায় a সিঁড়ি দিয়া যাইতে পারে এবং তখন দুইতলা হইতে তিনতলায় d ও e সিঁড়ি দুইটির যে কোনটি দিয়া যাইতে পারে। অর্থাৎ ঐ ব্যক্তি ad বা ae সিঁড়ি দুইটি ব্যবহার করিতে পারে। ad সিঁড়ি দুইটি বলিতে মনে করা হইয়াছে যে প্রথমে a সিঁড়ি ও পরে d সিঁড়ি ব্যবহার করা হইল। অনুরূপে ঐ ব্যক্তি b সিঁড়ি দিয়া একতলা হইতে দুইতলায় গেলেও সে দুইতলা হইতে তিনতলায় d ও e সিঁড়ি দুইটির যে কোনটি দ্বারা যাইতে পারে অর্থাৎ ঐ ব্যক্তি bd কিংবা be সিঁড়ি ব্যবহার করিয়াও দুই প্রকারে একতলা হইতে তিনতলায় যাইতে পারে। অনুরূপে ঐ ব্যক্তি একতলা হইতে দুইতলায় যাইতে c সিঁড়িটি ব্যবহার করিলে cd বা ce সিঁড়ি দুইটি ব্যবহার করিয়া মোট দুইপ্রকারে একতলা হইতে তিনতলায় যাইতে পারে।

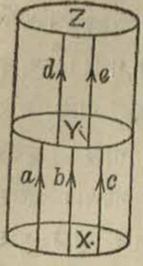
সুতরাং একতলা হইতে তিনতলায় ঐ ব্যক্তি ad, ae, bd, be, cd ও ce এই ছয় প্রকারে যাইবে। ইহাকে নিম্নরূপে লেখা যায়; $6=3\times 2$

একতলা হইতে তিনতলায় যাইবার উপায়=একতলা হইতে দুইতলায় যাইবার মোট উপায় × দুইতলা হইতে তিনতলায় যাইবার মোট উপায়।

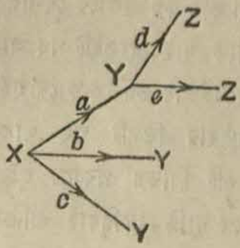
উপরের আলোচনা নিম্নের চিত্র সাহায্যে আরও ভালভাবে বুঝিতে পারা যাইবে।

চিত্র—1, একতলা (X) হইতে দুইতলা (Y)-এ যাইবার পথ তিনটি চিত্রে a, b, c রেখাংশ তিনটি দ্বারা প্রদর্শিত হইয়াছে। a, b, c রেখাংশ তিনটির প্রত্যেকটি X বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া Y বিন্দুতে শেষ হইয়াছে। আবার d ও e রেখাংশ দুইটির আরম্ভবিন্দু Y এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে অন্তিম বিন্দু Z। Z বিন্দুটি দ্বারা তিনতলাকে নির্দেশ করা হইল। এক্ষণে চিত্র 3-এ একতলা হইতে তিনতলায় যাইবার বিভিন্ন পথ বিভিন্ন রেখাংশযুগল দ্বারা দেখান হইল। যেহেতু প্রত্যেক

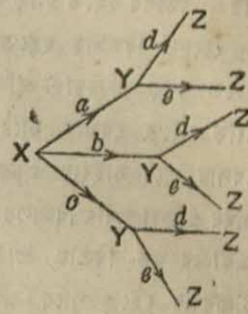
ক্ষেত্রেই যাত্রা তিনতলা (Z)-এ শেষ হয়, তাই প্রত্যেক ক্ষেত্রেই প্রত্যেক রেখাংশযুগলের শেষেরটির অন্তিমবিন্দু Z এবং একতলা হইতে তিনতলায়



চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3

যাইবার পথ সংখ্যার সমান সংখ্যক (অর্থাৎ 6টি অক্ষর) Z অক্ষরটি চিত্র 3-এ দেখা যায়।

উপরের উদাহরণটির নিম্নলিখিত ভাবে সাধারণীকরণ (generalisation) করা যায়।

মনে কর একতলা হইতে দুইতলায় যাইবার m-সংখ্যক সিঁড়ি আছে, আর দুইতলা হইতে তিনতলায় যাইবার সিঁড়ির সংখ্যা n. পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিলে দেখা যাইবে যে তৃতীয় চিত্রে mn-সংখ্যক Z পাওয়া যাইবে। সুতরাং একতলা হইতে তিনতলায় mn বিভিন্ন প্রকারে যাওয়া যাইবে। অতএব যদি একতলা হইতে দুইতলায় যাইবার প্রক্রিয়া m প্রকারে সমাধা করা যায় এবং এই m-প্রকার বিভিন্ন প্রক্রিয়ার প্রত্যেক প্রক্রিয়ার জন্য দুইতলা হইতে তিনতলায় n-সংখ্যক প্রকারে যাওয়া যায়, তবে একতলা হইতে তিনতলায় যাইবার প্রক্রিয়া মোট $m \times n$ প্রকারে করা যাইবে।

উপরের যুক্তি কেবলমাত্র একতলা হইতে তিনতলায় যাইবার জন্য নয়, যেকোন প্রক্রিয়া m-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে সমাধা করা গেলে, যদি এই m-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারের প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় একটি প্রক্রিয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তবে ঐ প্রক্রিয়া দুইটি ক্রমান্বয়ে mn বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

ইহাই বিন্যাস ও সমবায়ের মূলতত্ত্ব। আরও কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা তত্ত্বটি বোঝান হইতেছে।

দৃষ্টান্ত 1. মনে কর তোমার বিদ্যালয় হইতে বাড়ি ফিরিবার দুইটি পথ আছে এবং বাড়ি হইতে খেলার মাঠে তিনটি পথের যে কোনটি দিয়া যাওয়া যায়। বিদ্যালয় হইতে বাড়ি হইয়া তুমি কয় প্রকারে খেলার মাঠে যাইতে পার ?

যেহেতু বিদ্যালয় হইতে বাড়ি যাইবার দুইটি পথ আছে, সুতরাং বিদ্যালয় হইতে বাড়ি ফিরিবার প্রক্রিয়া 2টি বিভিন্ন প্রকারে হইতে পারে। আবার বাড়ি হইতে খেলার মাঠে যাইবার তিনটি পথ থাকায়, বাড়ি হইতে খেলার মাঠে যাইবার প্রক্রিয়া 3টি বিভিন্ন প্রকারে হইতে পারে। সুতরাং প্রথম প্রক্রিয়া অর্থাৎ বিদ্যালয় হইতে বাড়ি ফিরিবার প্রক্রিয়া সমাধার প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় প্রক্রিয়া অর্থাৎ বাড়ি হইতে খেলার মাঠে যাওয়া 3 প্রকারে হইতে পারে। সুতরাং প্রথম প্রক্রিয়া সমাধার মোট 2টি বিভিন্ন প্রকারের জন্য প্রক্রিয়া দুইটি ক্রমান্বয়ে $2 \times 3 = 6$ প্রকারে সমাধা হইতে পারে। অর্থাৎ তুমি তোমার বিদ্যালয় হইতে বাড়ি হইয়া খেলার মাঠে মোট 6 প্রকারে যাইতে পার।

দৃষ্টান্ত 2. একটি ঘরে 5টি খালি চেয়ার আছে। দুই ব্যক্তি এই পাঁচটি চেয়ারে কত প্রকারে বসিতে পারে ?

প্রথম ব্যক্তি পাঁচটি চেয়ারের যে কোনটিতে বসিতে পারেন। সুতরাং প্রথম প্রক্রিয়া অর্থাৎ প্রথম ব্যক্তির একটি চেয়ারে বসা, 5 প্রকারে হইতে পারে। এক্ষণে, প্রথম ব্যক্তি এই 5 প্রকারের যেকোন এক প্রকারে অর্থাৎ যে কোন একটি শূন্য চেয়ারে বসিলে, দ্বিতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট 4টি খালি চেয়ারে 4 প্রকারে বসিতে পারে। সুতরাং প্রথম ব্যক্তির 5 প্রকারে একটি চেয়ারে বসার জন্য ঐ দুই ব্যক্তি মোট $5 \times 4 = 20$ প্রকারে দুইটি চেয়ারে বসিতে পারে।

দৃষ্টান্ত 3. দুইটি শূন্যস্থান দশটি বিভিন্ন বর্ণের মার্বেল দ্বারা কয় প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে ? (প্রত্যেক শূন্যস্থান একটিমাত্র মার্বেল দ্বারা পূর্ণ করা যাইবে)।

প্রথম শূন্যস্থানটি 10 প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। কারণ, যে কোন মার্বেল দ্বারা ঐ স্থানটি পূর্ণ করা যায়। এক্ষণে, প্রথম স্থানটি এই 10 প্রকারের যে কোন প্রকারে পূর্ণ করা গেলে দ্বিতীয় শূন্যস্থানটি অবশিষ্ট 9টি মার্বেলের যে কোনটি দ্বারা 9 প্রকারে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং প্রথম শূন্যস্থানটি পূর্ণ করিবার জন্য শূন্যস্থান দুইটি মোট $10 \times 9 = 90$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

উপরের তত্ত্বটির আরও সাধারণীকরণ নিম্নলিখিতভাবে করা যায়।

মনে কর, কোন প্রক্রিয়া m বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং এই m বিভিন্ন প্রকারের যে-কোন একটি দ্বারা এই প্রথম প্রক্রিয়া সমাধা হইলে দ্বিতীয় একটি

প্রক্রিয়া n প্রকারে করা যায় এবং এই দুইটি প্রক্রিয়া একত্রে যে-কোন প্রকারে করা গেলে তৃতীয় একটি প্রক্রিয়া p বিভিন্ন প্রকারে করা যায়। প্রক্রিয়া তিনটি ক্রমান্বয়ে মোট $m \times n \times p$ প্রকারে করা যাইবে।

§ 7·6. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক বস্তু করিয়া একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়। [এখানে $r<n$ অথবা $r=n$.]

মনে কর, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইল n-সংখ্যক বিভিন্ন রং-এর মার্বেল এবং r-সংখ্যক শূন্যস্থান আছে। n-সংখ্যক মার্বেল হইতে একযোগে r-সংখ্যক মার্বেল লইয়া ঐ r-সংখ্যক শূন্যস্থান পূর্ণ করিতে হইবে। ইহা কত প্রকারে করা যায় দেখিতে হইবে।

প্রথম স্থানে আমরা n মার্বেলের যে-কোন একটি রাখিতে পারি; সুতরাং প্রথম স্থানটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। n মার্বেলের কোন একটি দ্বারা প্রথম স্থান পূর্ণ করিলে আর বাকি থাকে $(n-1)$ সংখ্যক মার্বেল। প্রথম স্থানটি পূর্ণ হওয়ার পর এই $(n-1)$ মার্বেলের যে-কোন একটি দ্বারা দ্বিতীয় স্থানটি পূর্ণ করা যায়, সুতরাং দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। অতএব, এক এক প্রকারে প্রথম স্থান পূর্ণ হওয়ার সঙ্গে দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ হইবে; সুতরাং প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান দুইটি মোট $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে।

প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারের মধ্যে কোন এক রকমে পূর্ণ হইবার পর তৃতীয় স্থানটি অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক মার্বেলের মধ্যে যে-কোন একটি দ্বারা পূর্ণ করা যায় বলিয়া উহা $(n-2)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে। অতএব, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থান মিলিতভাবে মোট $n(n-1)(n-2)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে।

এ পর্যন্ত দেখা গেল যে, যতগুলি স্থান পূর্ণ হইয়াছে, স্থানগুলি মিলিতভাবে পূর্ণ করিবার প্রকার সংখ্যার উৎপাদক সংখ্যাও তত। আরও দেখা যায় যে, প্রথম হইতে এক-একটি নূতন স্থান পূর্ণ হইতেছে আর উৎপাদক-সংখ্যা একটি করিয়া বাড়িতেছে এবং প্রত্যেক উৎপাদক ঠিক তার পূর্ববর্তী উৎপাদক অপেক্ষা এক কম।

অতএব, এখানে r স্থান যত প্রকারে পূর্ণ হইবে তাহা হইল
$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots r$-তম উৎপাদক পর্যন্ত।
এখানে r-তম উৎপাদক $=\{n-(r-1)\}=(n-r+1)$.

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা
$=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots r$-তম উৎপাদক পর্যন্ত
$=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)$.

অনুসিদ্ধান্ত। উপরের উদাহরণে যদি n বিভিন্ন বস্তর সবগুলিকে একযোগে লওয়া হয়, তবে বিন্যাস সংখ্যা হইবে $n(n-1)(n-2)\cdots n$-তম উৎপাদক পর্যন্ত অর্থাৎ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.$

[n-তম উৎপাদক $=n-(n-1)=1.$]

§ 77. **প্রতীক**। (i) 1 হইতে আরম্ভ করিয়া 1, 2, 3 প্রভৃতি n পর্যন্ত ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যাগুলির গুণফলকে $\lfloor n$ (বা $n!$) চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়; এই প্রতীকটিকে পড়া হয় 'factiorial n'.

অতএব, $\lfloor 5=5\times4\times3\times2\times1$;

$\lfloor 6=6\times5\times4\times3\times2\times1$, ইত্যাদি।

§ 78. **কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত**

(1) $\lfloor n=n\lfloor n-1.$

প্রমাণ : $\lfloor n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.$

আবার $\lfloor n-1=(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.$

$\therefore\ \lfloor n=n\lfloor n-1.$ অনুরূপে $\lfloor n=n(n-1)\lfloor n-2$, ইত্যাদি।

(2) Factorial প্রতীকের দ্বারা ^nP_r-কে প্রকাশ করা যায়।

$^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ [ইহা প্রমাণিত হইয়াছে]

ডানপক্ষকে $(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1$ দ্বারা গুণ ও ভাগ করিয়া পাই

$$^nP_r=\frac{\{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\}(n-r)(n-r-1)\cdots3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3.2.1}$$

এক্ষণে, দেখা যায় যে, ডানপক্ষের লবটি $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times n$, এই উৎপাদকগুলির গুণফল $=\lfloor n$, এবং হরটি $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-r)$, এই উৎপাদকগুলির গুণফল $=\lfloor n-r.$

$$\therefore\ {}^nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}.$$

(3) $\lfloor 0$ দ্বারা কোন অর্থ প্রকাশ হয় কি ?

বিন্যাসের সংজ্ঞা অনুসারে $\lfloor 0$ এর কোন অর্থ না থাকিলেও, $\lfloor 0=1$ ধরা হয়, অর্থাৎ $\lfloor 0$ হইল 1 মানবিশিষ্ট একটি প্রতীক মাত্র।

(4) $^nP_n={}^nP_{n-1}$ হইবে।

প্রমাণ : $^nP_n=\lfloor n$ [প্রমাণিত]

আবার, $^nP_{n-1}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-(n-1)}=\frac{\lfloor n}{\lfloor 1}=\lfloor n.\quad \therefore\ {}^nP_n={}^nP_{n-1}.$

(5) যদি n বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছামত এক, দুই, তিন,···, n বস্তু পর্যন্ত একসঙ্গে লইয়া সাজান যায়, তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা

$$= {}^nP_1 + {}^nP_2 + {}^nP_3 + \cdots\cdots + {}^nP_n \text{ হইবে।}$$

উদাহরণমালা 7A

উদাহরণ 1. চাঁদপাল ঘাট এবং বোটানিক্যাল গার্ডেনের মধ্যে 12টি ফেরি-ষ্টীমার যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কয় প্রকারে একটি ষ্টীমারে চাঁদপাল ঘাট হইতে বোটানিক্যাল গার্ডেনে যাইয়া অপর একটি ষ্টীমারে ফিরিতে পারে? [H. S. 1960 (Comp.)]

ঐ ব্যক্তি চাঁদপাল ঘাট হইতে 12 প্রকারে বোটানিক্যাল গার্ডেনে যাইতে পারে। কারণ, সে 12টি ষ্টীমারের যে কোনটিতে যাইতে পারে। এই 12 প্রকারে যাইবার প্রত্যেক প্রকারের জন্য ঐ ব্যক্তি 11 প্রকারে ফিরিতে পারে। কারণ, যেটিতে সে গিয়াছিল, সেটিতে সে ফিরিবে না। সুতরাং সে মোট $12 \times 11 = 132$ প্রকারে যাতায়াত করিতে পারে।

উদা. 2. একটি রেলপথে 26টি স্টেশন আছে। কতগুলি বিভিন্ন তৃতীয় শ্রেণীর টিকিট মুদ্রিত করিলে এক স্টেশন হইতে অন্য স্টেশনে যাওয়া যাইবে? [H. S. 1961 (Comp.)]

নির্ণেয় টিকিট সংখ্যা 26টি স্টেশনের 2টিকে যত প্রকারে সাজান যায় তাহার সমান। কারণ, কোন স্টেশন A হইতে অপর একটি স্টেশন B-এ যাইবার জন্য এবং ফিরিবার জন্য দুইটি বিভিন্ন টিকিট লাগে। সুতরাং নির্ণেয় টিকিটের সংখ্যা ${}^{26}p_2 = 26 \times 25 = 650.$

উদা. 3. চারজন পথিক একটি শহরে আসিল। ঐ শহরে পাঁচটি হোটেল আছে। কোন দুইজন একই হোটেলে না থাকিলে, তাহারা কয় প্রকারে তাহাদের বাসস্থান ঠিক করিতে পারে? [H S. 1962 (Comp.)]

এখানে পথিকের সংখ্যা 4 হওয়ায়, 5টি হোটেলের মধ্যে 4টিকে লইতে হইবে এবং ইহা ${}^5P_4 = 120$ প্রকারে করা যায়।

উদা. 4. 1, 2, 3, 4, 5 ও 6 অঙ্কগুলি দ্বারা 3000 ও 4000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়। [H. S. 1960]

যেহেতু সংখ্যাগুলি 3000 ও 4000-এর মধ্যবর্তী, সুতরাং প্রত্যেক সংখ্যায় চারটি করিয়া অঙ্ক থাকিবে এবং সহস্র স্থানে 3 অবশ্যই থাকিবে। সুতরাং বাকী তিনটি স্থান অবশিষ্ট পাঁচটি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে এবং ইহা ${}^5P_3 = 60$ প্রকারে করা যায়।

[দ্রষ্টব্য : প্রশ্নে ইহা স্পষ্ট নয় যে, কোন অঙ্ককে একাধিক বার লওয়া যাইবে কিনা। আমরা এই প্রশ্নে মনে করিয়াছি যে কোন অঙ্ককে একাধিকবার লওয়া যাইবে না।]

উদা. 5. 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি দ্বারা (কোন অঙ্ককে একাধিক বার ব্যবহার করা যাইবে না) কয়টি পাঁচ অঙ্কের সংখ্যা গঠন করা যায় ?

[A. I. H. S. '70]

এখানে অঙ্কের সংখ্যা 5. যেহেতু পাঁচ অঙ্কের সংখ্যা গঠন করিতে হইবে, সুতরাং প্রত্যেক ক্ষেত্রেই 5টি অঙ্ককেই লইতে হইবে। সুতরাং এই পাঁচটি বিভিন্ন অঙ্ক দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্কের 'সংখ্যা'র সংখ্যা ${}^5P_5=\underline{|5}=120$.

কিন্তু এইগুলির কয়েকটি '0' দ্বারা আরম্ভ হয়, সেগুলিকে লওয়া যাইবে না। এখানে '0' দ্বারা কতগুলি সংখ্যা আরম্ভ হয়, নির্ণয় করা যাক। সেই সংখ্যাগুলির প্রথম স্থানে আছে 0 এবং অপর চারটি স্থান অপর চারটি অঙ্ক দ্বারা সম্ভাব্য সকল প্রকারে অর্থাৎ ${}^4P_4=\underline{|4}=24$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

নির্ণেয় 'সংখ্যা'র সংখ্যা $=120-24=96$.

উদা. 6. 5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের কয়টি সংখ্যা 3, 4, 5, 6 ও 7 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠন করা যায় ? কোন অঙ্ককে একাধিকবার ব্যবহার করা যাইবে না। [H. S. 1964]

5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের সংখ্যাগুলির সহস্রের অঙ্ক 5, 6 বা 7 হইতে পারে অর্থাৎ 3 প্রকারে সহস্রের স্থান পূর্ণ করা যায়। এই 3 প্রকারের প্রত্যেকটি প্রকারের জন্য অবশিষ্ট 3টি স্থান অবশিষ্ট 4টি অঙ্ক দ্বারা ${}^4P_3=24$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

সুতরাং প্রথম স্থান 3 প্রকারে পূর্ণ করিবার জন্য 5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের মোট $3\times 24=72$টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে।

উদা. 7. 3, 2, 7, 4, 0 অঙ্কগুলিকে (প্রত্যেকটি একবার করিয়া) লইয়া গঠিত পাঁচটি সার্থক অঙ্কযুক্ত কতগুলি সংখ্যা অযুগ্ম হইবে ? [H. S. 1967]

যেহেতু সংখ্যাগুলি অযুগ্ম, সুতরাং এককস্থানে 3 অথবা 7 বসিবে।

যদি এককস্থানে 3 বসে, তবে অযুত স্থানটি 2, 7, 4 অঙ্ক দিয়া (এই স্থানে 0 বসিতে পারে না) তিন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। এক্ষণে এই তিন প্রকারের প্রত্যেক প্রকারের জন্য বাকি তিনটি স্থান অবশিষ্ট তিনটি অঙ্ক (কারণ, সহস্র, শতক বা দশক স্থানে শূন্য বসিতে পারে) দ্বারা ${}^3P_3=6$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। সুতরাং এই ক্ষেত্রে ঐ তিন প্রকারের জন্য মোট $3\times 6=18$টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে।

অনুরূপে এককস্থানে 7 বসিলেও মোট 18টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে। সুতরাং নির্ণেয় মোট সংখ্যার সংখ্যা $= 18 + 18 = 36$.

উদা. 8. দশটি বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে তাহাদের কতগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (i) সর্বদা থাকিবে, (ii) কখনও থাকিবে না ? [C. U. '36]

10টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি বস্তু লইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

ঐ 10টি বস্তুর মধ্যে একটি নির্দিষ্ট বস্তু মোটেই থাকিবে না এরূপভাবে বিন্যস্ত করিতে হইলে $(10 - 1)$ বা 9টি বস্তুর মধ্য হইতে একযোগে 4টি লইয়া বিন্যস্ত করিতে হইবে ;

$\therefore$ এক্ষেত্রে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{9}P_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.

অতএব, যে বিন্যাসগুলিতে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকিবে তাহাদের নির্ণেয় সংখ্যা $= 5040 - 3024 = 2016$.

উদা. 9. স্বরবর্ণগুলি কেবল অযুগ্ম (odd) স্থানে থাকিবে, এরূপে *normal* শব্দের অক্ষরগুলি লইয়া কত রকমে সাজান যায় ?

প্রদত্ত শব্দে 3টি বিজোড় স্থান আছে এবং 2টি স্বরবর্ণ আছে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলিকে ${}^{3}P_2$ বা 6 প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। অবশিষ্ট 4টি স্থানকে 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে। ঐ প্রক্রিয়া $\underline{|4}$ বা 24 প্রকারে করা যায়। সুতরাং স্বরবর্ণগুলির 6 প্রকার বিন্যাসের জন্য মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 6 \times 24 = 144$.

$\therefore$ মোট নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 6 \times 24 = 144$.

উদা. 10. 5 জন বালক ও 3 জন বালিকাকে কত প্রকারে বিন্যস্ত করা যাইতে পারে যাহাতে কোন দুইটি বালিকা কখনও পাশাপাশি না থাকে ?

যেহেতু কোন দুইটি বালিকা কখনও পাশাপাশি থাকিবে না, সেজন্য প্রত্যেক বালিকা, দুইজন বালকের মাঝখানে অথবা একেবারে প্রথমে অথবা শেষে থাকিবে। সুতরাং প্রথমে বালকদের বিন্যাস নির্ণয় করা যাক। 5 জন বালকের ${}^{5}P_5 = 120$ প্রকারে বিন্যাস করা যায়। এবং এই 120 প্রকারের প্রত্যেকটি বিন্যাসের জন্য 3 জন বালিকা একেবারে প্রথমে বা শেষে অথবা উহাদের মধ্যের 4টি স্থানে অর্থাৎ মোট 6টি স্থানের 3টি স্থানে, ${}^{6}P_3 = 120$ প্রকারে থাকিতে পারে। সুতরাং বালকদের 120টি বিন্যাসের জন্য বালক-বালিকার মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $120 \times 120 = 14400$.

উদা. 11. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং যাহাতে কোন অঙ্ক একবারের বেশী থাকিবে না, এরূপ কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

এখানে সংখ্যাগুলি 5 দ্বারা বিভাজ্য বলিয়া উহাদের শেষ অঙ্ক 0 অথবা 5 হইবে। আবার, সংখ্যাগুলি 1000 অপেক্ষা কম বলিয়া সেগুলি 1, 2 বা 3 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

(i) এক অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হইবে মাত্র 1টি (অর্থাৎ 5)।

(ii) 0কে শেষে রাখিয়া দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে $^6P_1$ গুলি অর্থাৎ 6টি।

আবার, 5কে শেষে রাখিয়া কতগুলি সংখ্যা হয় দেখিতে হইলে 0 প্রথম স্থানে থাকিতে পারে না বলিয়া বাকি 5টি অঙ্ক (0 ও 5 ছাড়িয়া) হইতে একটি করিয়া অঙ্ক লইয়া কয়টি বিন্যাস হয় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

∴ ঐরূপ সংখ্যা হইবে $^5P_1$ বা 5টি।

অতএব; দুই অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হইবে (6+5) বা 11টি।

(iii) 0কে শেষ অঙ্ক ধরিয়া মোট তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা= বাকি 6টি অঙ্ক হইতে 2টি করিয়া অঙ্ক লইয়া প্রথম দুইটি স্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

∴ ঐরূপ সংখ্যা হইবে $^6P_2$ বা 30টি।

আবার, 5কে শেষ অঙ্ক ধরিয়া মোট তিন অঙ্কবিশিষ্ট-সংখ্যার সংখ্যা $= {^6P_2} = 30$. এখন এই সংখ্যাগুলির মধ্যে 0 প্রথম স্থানে আছে এরূপ সংখ্যাও ধরা হইয়াছে, সুতরাং ঐরূপ সংখ্যাগুলি বাদ দিতে হইবে।

প্রথম স্থানে 0 ও শেষ স্থানটিতে 5 থাকিলে বাকি মধ্যম স্থানটি অবশিষ্ট 5টি অঙ্ক দ্বারা 5 প্রকারে পূর্ণ করা যায়। ∴ 0 প্রথম অঙ্কযুক্ত সংখ্যা হইবে 5টি

∴ 5 শেষ অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে (30 − 5) বা 25টি

অতএব, মোট নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 11 + 30 + 25 = 67$.

উদা. 12. *player* শব্দটির অক্ষরগুলি লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায়? উহাদের কতগুলির আদ্যক্ষর *p* নহে? কতগুলির আদ্যক্ষর *p*, কিন্তু শেষ অক্ষর *r* নহে?

(i) প্রদত্ত শব্দটিতে 6টি অক্ষর আছে এবং উহারা বিভিন্ন।

∴ অক্ষরগুলিকে $\underline{|6}$ বা 720 প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়।

(ii) কতগুলি বিন্যাস p দিয়া আরম্ভ হইবে তাহা নির্ণয়ের জন্য প্রথম স্থানে p-কে বসাইয়া বাকি 5টি স্থান বাকি 5টি অক্ষর দ্বারা কত প্রকারে পূর্ণ হয় দেখিতে হইবে।

অতএব p-কে প্রথম স্থানে বসাইলে নির্ণেয় বিন্যাস $= |\underline{5} = 120$.

(iii) এখানে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 720$ এবং তন্মধ্যে 120টি বিন্যাস p দিয়া আরম্ভ হইয়াছে।

$\therefore$ p দিয়া আরম্ভ নহে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= 720 - 120 = 600$.

(iv) এখন দেখ p-কে প্রথম স্থানে এবং r-কে শেষ স্থানে বসাইলে বাকি মধ্যবর্তী 4টি স্থান বাকি 4টি অক্ষর দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে।

$\therefore$ ঐরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= |\underline{4} = 24$,

$\because$ p প্রথম অক্ষরবিশিষ্ট মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 120$,

$\therefore$ p দিয়া আরম্ভ কিন্তু r দিয়া শেষ হয় নাই এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= 120 - 24 = 96$.

উদা. 13. একটি তাকে n সংখ্যক পুস্তককে কয় প্রকারে সাজান যাইবে, যাহাতে দুইটি বিশেষ পুস্তক কখনও পাশাপাশি থাকিবে না। [C. U. Pre. U. 1962]

ঐ বিশেষ পুস্তক দুইটিকে প্রথমে একটি পুস্তক মনে করিলে, মোট পুস্তকের সংখ্যা হইবে $(n-1)$। এই $(n-1)$ পুস্তককে $(n-1)!$ প্রকারে সাজান যায়।

আবার এই $(n-1)!$ প্রকারের প্রত্যেক প্রকারের জন্য ঐ বিশেষ পুস্তক দুইটি নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়। সুতরাং ঐ পুস্তক দুইটি সর্বদা পাশাপাশি থাকিবে মোট $2|\underline{n-1}$ বিন্যাসে। আবার পুস্তকগুলি কোনরূপ শর্তছাড়া $|\underline{n}$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়। সুতরাং মোট $|\underline{n} - 2|\underline{n-1}$ বিন্যাসে ঐ পুস্তক দুইটি একত্রে থাকে না। এক্ষণে, $|\underline{n} - 2|\underline{n-1}$

$= n|\underline{n-1} - 2|\underline{n-1} = (n-2)|\underline{n-1}$.

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $(n-2)|\underline{n-1}$.

উদা. 14. স্বরবর্ণগুলি সর্বদা একত্রে রাখিয়া কত রকমে *daughter* শব্দের অক্ষরগুলিকে সাজান যায়।

এখানে, (a, u, e) তিনটি অক্ষর স্বরবর্ণ এবং বাকি 5টি অক্ষর ব্যঞ্জনবর্ণ। ঐ স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি অক্ষর ধরিলে মোট 6টি অক্ষর (a, u, e), d, g, h, t, r হইবে। ঐ অক্ষর 6টি মোট $|\underline{6}$ বা 720 প্রকারে সাজান যায়।

আবার, ঐ স্বরবর্ণ তিনটিকে একত্রে রাখিয়া উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|3}$ বা 3×2 বা 6 প্রকারে সাজান যায়। সুতরাং ঐ 720 প্রকার বিন্যাসের জন্য অক্ষরগুলিকে মোট $6\times 720=4320$ প্রকারে সাজান যাইবে।

প্রশ্নমালা 7A

1. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :—

$\underline{|8}$; $\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}}$; $7!$; ${}^6P_4$; ${}^5P_5$,

2. ${}^{n+1}P_3=10\times {}^{n-1}P_2$, হইলে n-এর মান নির্ণয় কর।

3. ${}^{2r+1}P_{r-1} : {}^{2r-1}P_r=3 : 5$, $r=$ কত ?

দেখাও যে,

4. ${}^{n+1}P_{r+1}=(n+1)\times {}^nP_r$.

5. ${}^nP_r=n\times {}^{n-1}P_{r-1}$.

6. $\underline{|2r}=\underline{|r}.2^r\{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)\}$

7. ${}^nP_{r-1}={}^{n-1}P_{r-1}+(r-1).\ {}^{n-1}P_{r-2}$.

8. দুই ব্যক্তি একটি রেলগাড়ীর কামরায় প্রবেশ করিয়া দেখিল সেখানে 6টি শূন্য আসন আছে। তাহারা কত বিভিন্ন প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারিবে ? [C. U. '10]

9. *paresh* শব্দটির অক্ষরগুলি সব কয়টি একযোগে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায় ?

10, কোন শহরে 8টি হাসপাতাল আছে। 3 জন রোগীকে কত প্রকারে হাসপাতালে পাঠান যায় যাহাতে কোন দুইজন রোগী একই হাসপাতালে না থাকে ?

11. একটি রেলপথে 20টি স্টেশন আছে। কতগুলি বিভিন্ন তৃতীয় শ্রেণীর টিকিট মুদ্রিত করিলে এক স্টেশন হইতে অন্য স্টেশনে যাওয়া যাইবে ?

12. কোন রেলপথে যদি 30টি স্টেশন থাকে, তবে যে কোন স্টেশন হইতে অন্য যে কোন স্টেশনে যাইবার জন্য কতগুলি বিভিন্ন প্রকারের তৃতীয় শ্রেণীর টিকিট প্রয়োজন ?

13. স্বরবর্ণগুলি সর্বদা একত্রে রাখিয়া *laughter* শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা কতগুলি বিভিন্ন বিন্যাস করা যায় ?

14. স্বরবর্ণগুলি কেবল বিজোড় স্থানে থাকিবে এরূপে *pointed* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায় ?

15. প্রদত্ত 5, 6, 7. 8, 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে 100 ও 1000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক যেন কেবল একবার থাকে।

16. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলির সাহায্যে 3000 ও 4000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

17. প্রদত্ত 0, 3, 4, 5, 6 অঙ্কগুলির সাহায্যে কতগুলি পাঁচটি সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট অযুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায়?

18. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি কেবল একবার করিয়া লইয়া গঠিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কতগুলি সংখ্যা যুগ্ম হইবে?

19. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ও 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? কোন সংখ্যায় কোন অঙ্ক একবারের বেশী থাকিবে না।

20. কোন দুইটি নির্দিষ্ট পুস্তক একত্রে থাকিবে, এরূপে n বিভিন্ন পুস্তককে কত প্রকারে একটি তাকে সাজান যায়? [C.U. Pre.U. 1963]

21. 12টি বস্তু হইতে একযোগে 3টি করিয়া লইয়া বিন্যাসের কতগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (i) সতত থাকিবে, (ii) কখনও থাকিবে না?

22. স্বরবর্ণ চারিটি সর্বদা একত্র রাখিয়া *failure* শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়? [C. U. '40]

23. কোন পরীক্ষায় 36 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন বালক ও 16 জন বালিকা। কোন দুইটি বালিকা পর পর না বসে এরূপভাবে ঐ পরীক্ষার্থীদিগকে কত প্রকারে একটি সারিতে বসান যায়?

24. যাহাতে সর্বোৎকৃষ্ট ও সর্বনিকৃষ্ট পরীক্ষা-পত্র দুইখানি একত্রে না থাকে এরূপে কত প্রকারে 7টি পরীক্ষা-পত্রকে সাজান যায়? [C.U. '51]

25. JUXTAPOSED শব্দটির সমস্ত অক্ষরগুলি একত্রে লইয়া কিন্তু স্বরবর্ণ চারিটি একত্রে রাখিয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর। [H. S. '71]

26. FRIDAY শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত রকমে সাজান যায়? তাহাদের মধ্যে কতগুলির আদ্যক্ষর F হইবে না? কতগুলির আদ্যক্ষর F হইবে, কিন্তু শেষ অক্ষর Y হইবে না?

§ 7·9. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস (Permutation of things not all different)

সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

মনে কর, n-সংখ্যক অক্ষর প্রদত্ত n-সংখ্যক বস্তু। ঐ অক্ষরের মধ্যে, মনে কর, p-সংখ্যক অক্ষর a, q-সংখ্যক অক্ষর b এবং r-সংখ্যক অক্ষর c আছে।

মনে কর, নির্ণেয় মোট বিন্যাসের সংখ্যা $=x$.

মনে কর, p-সংখ্যক a অক্ষরকে পরিবর্তিত করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অন্য প্রদত্ত অক্ষরগুলি হইতেও ভিন্ন এরূপ p-সংখ্যক অন্য অক্ষর লওয়া হইল।

এক্ষণে, যদি অন্য-অক্ষরগুলির অবস্থান বা বিন্যাসের কোন পরিবর্তন না করিয়া কেবলমাত্র ঐ p-সংখ্যক নূতন বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাসের পরিবর্তন করা হয়, তবে x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাস হইতে $\lfloor p$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। অতএব, x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor p$-সংখ্যক বিন্যাস হইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x\lfloor p$।

অনুরূপে, ঐ $x\lfloor p$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে যে q-সংখ্যক b অক্ষর আছে, সেইগুলি পরিবর্তন করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অক্ষরগুলি হইতে ভিন্ন q-সংখ্যক অন্য নূতন অক্ষর লওয়া হইলে, ঐ q-সংখ্যক নূতন অক্ষরের পারস্পরিক ক্রমের পরিবর্তন করিয়া $x\lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাসের এক একটি হইতেও $\lfloor q$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। অতএব তখন মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x\times\lfloor p\times\lfloor q$.

পুনরায়, যদি ঐ ভাবে r-সংখ্যক c-এর পরিবর্তে পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতেও ভিন্ন r-সংখ্যক নূতন-অক্ষর লওয়া হয়, তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$.

এখন p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b ও r-সংখ্যক c সবগুলি পরিবর্তিত হইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইয়া যাওয়ায় সব অক্ষরগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যস্ত করিলে বিন্যাসের সংখ্যা হয় $\lfloor n$.

$$\therefore\ x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r=\lfloor n.$$

$$\therefore\ x=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\lfloor q\lfloor r}.$$

[দ্রষ্টব্য : উপরে তিন প্রকার বিভিন্ন বস্তু দেওয়া ছিল। যদি আরও অধিক প্রকারের বিভিন্ন বস্তু দেওয়া থাকে, তাহা হইলেও উপরে প্রদর্শিত প্রণালী প্রযোজ্য হইবে।]

উদাহরণমালা 7B

উদা. 1. '*ballcon*' শব্দটির অক্ষরগুলির সব কয়টি লইয়া মোট কয়টি শব্দ গঠন করা যায় ?

প্রদত্ত শব্দে 7টি অক্ষরের মধ্যে দুইটি l ও দুইটি o আছে।

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=1260.$$

উদা. 2. '*cotton*' শব্দের t অক্ষর দুইটি একত্রে থাকিবে না এরূপে কত রকমে উহার অক্ষরগুলিকে সাজান যায় ?

প্রদত্ত শব্দে দুইটি t ও দুইটি o আছে এবং মোট অক্ষর ছয়টি।

∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\underline{|6}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2}=180.$

আবার, কতগুলি বিন্যাসে দুইটি t একত্রে আছে তাহা নির্ণয়ের জন্য ঐ t দুইটিকে একটি অক্ষর ধরিয়া কয়টি বিন্যাস হয় তাহা দেখিতে হইবে। মোট অক্ষর হইল 5টি এবং তাহাদের মধ্যে o দুইটি আছে।

∴ ঐরূপ বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\underline{|5}}{\underline{|2}}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=60.$

∴ যে বিন্যাসগুলিতে দুইটি t একত্রে থাকিবে না সেগুলির সংখ্যা $=180-60=120.$

উদা. 3. '*accommodation*' শব্দটির অক্ষরগুলি লইয়া কতগুলি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় এবং উহাদের কতগুলিতে o-অক্ষর তিনটি পাশাপাশি থাকিবে ?

এখানে প্রদত্ত শব্দটিতে 13টি অক্ষর আছে এবং উহাদের মধ্যে 2টি a, 2টি c, 2টি m, 3টি o এবং বাকি 4টি অক্ষর পরস্পর বিভিন্ন।

∴ মোট নির্ণেয় শব্দসংখ্যা $=\frac{\underline{|13}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}}=129729600.$

আবার তিনটি o অক্ষরকে সর্বদা পাশাপাশি রাখিয়া শব্দ রচনা করিতে হইলে ঐ o অক্ষর তিনটিকে একটি অক্ষর ধরিতে হইবে। এস্থলে অক্ষর সংখ্যা হইবে 11টি এবং তন্মধ্যে 2টি a, 2টি c এবং 2টি m.

∴ নির্ণেয় ঐরূপ শব্দ সংখ্যা $=\frac{\underline{|11}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}}=4989600.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে *anticipation* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা *commencement* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যার তিন গুণ।

"anticipation" শব্দটিতে 2টি a, 2টি n, 2টি t ও 3টি i আছে। উহার অবশিষ্ট অক্ষর 3টি বিভিন্ন এবং উহাতে মোট 12টি অক্ষর আছে;

$$\therefore \text{ বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 3} \cdots\cdots\cdots (1)$$

আবার, commencement শব্দটিতে মোট 12টি অক্ষরের মধ্যে 2টি c, 3টি m, 3টি e, 2টি n এবং বাকি অক্ষরগুলি বিভিন্ন।

$$\therefore \text{ এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 3 \lfloor 2} \cdots\cdots\cdots (2)$$

এক্ষণে (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{\lfloor 12}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 3} \times \frac{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 3}{\lfloor 12} = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3.$$

অতএব, প্রথম শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা দ্বিতীয় শব্দটির বিন্যাস সংখ্যার 3 গুণ হইল।

উদা. 5. *purpose* শব্দের (i) স্বরবর্ণগুলির স্থান স্থির রাখিয়া (ii) স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত রাখিয়া, উহার অক্ষরগুলিকে কত রকমে পুনর্বিন্যস্ত করা যায়।

(i) প্রদত্ত শব্দে মোট 7টি অক্ষরের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ, এবং বাকি 4টি ব্যঞ্জনবর্ণের মধ্যে 2টি p.

এখানে শর্ত হইল যে, বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণ তিনটির স্থান স্থির থাকিবে; সুতরাং, এক্ষেত্রে কেবল বাকি 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ লইয়া বিন্যাস গঠন করিতে হইবে এবং উহাদের মধ্যে 2টি p.

$$\therefore \text{ মোট বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = \frac{4 \times 3 \times \lfloor 2}{\lfloor 2} = 4 \times 3 = 12.$$

ঐ 12টি বিন্যাসের মধ্যে purpose কথাটিও আছে বলিয়া পুনর্বিন্যাসের (re-arranged-এর) প্রশ্নে উহা বাদ যাইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস সংখ্যা} = 12 - 1 = 11.$$

(ii) প্রদত্ত শব্দে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি প্রথম, তৃতীয়, চতুর্থ ও ষষ্ঠ স্থানে এবং স্বরবর্ণগুলি দ্বিতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম স্থানে আছে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত শর্ত অনুসারে বিন্যাসগুলিতে ব্যঞ্জনবর্ণ ও স্বরবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পূর্বের ন্যায় অপরিবর্তিত থাকিবে।

এক্ষণে, স্বরবর্ণ 3টিকে পূর্বের নির্দিষ্ট তিনটি স্থানে $\underline{|3}$ বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়।

আর, ব্যঞ্জনবর্ণ 4টির মধ্যে 2টি p থাকায়, ঐগুলিকে ব্যঞ্জনবর্ণের চারিটি পূর্বনির্দিষ্ট স্থানে $\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}}$ বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= \underline{|3} \times \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}} = 72$ (ইহাদের মধ্যে প্রদত্ত শব্দটিও আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস সংখ্যা $= 72 - 1 = 71$.

উদা. 6. 1, 2, 3, 1, 4, 3, 2 অঙ্কগুলি দ্বারা সাত অঙ্কের মোট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে যে, অযুগ্ম অঙ্কগুলি অযুগ্ম স্থান অধিকার করিবে ? [Pat. 1939]

এখানে 1, 3, 3, 1 সংখ্যাগুলি অযুগ্ম এবং তাহারা প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম এই অযুগ্ম স্থানগুলি অধিকার করিবে। এই চারিটি অযুগ্মস্থানে এই চারিটি অযুগ্ম অঙ্ককে $\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}$ (কারণ, এখানে দুইটি করিয়া 1 ও 3 আছে) প্রকারে সাজান যাইবে। আবার 2, 4, 2 অঙ্কগুলিকে দ্বিতীয়, চতুর্থ ও ষষ্ঠ স্থানগুলিতে $\frac{\underline{|3}}{\underline{|2}}$ প্রকারে বসান যাইবে। এক্ষণে, অযুগ্ম সংখ্যাগুলির প্রত্যেক বিন্যাসের জন্য যেহেতু যুগ্ম সংখ্যাগুলির বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{\underline{|3}}{\underline{|2}} = 3$, সুতরাং অযুগ্ম সংখ্যাগুলির $\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}$ বিন্যাসের জন্য নির্ণেয় মোট বিন্যাস অর্থাৎ সংখ্যার সংখ্যা $= \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}} \times 3 = 18$.

উদা. 7. স্বরবর্ণগুলি অবিচ্ছিন্ন থাকিবে, *TECHNICAL* শব্দটির অক্ষরগুলির এরূপ কতগুলি বিন্যাস সম্ভব ?

TECHNICAL শব্দটিতে *EIA* এই তিনটি স্বরবর্ণ এবং *TCHNCL* এই 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। ব্যঞ্জনবর্ণগুলির মধ্যে দুইটি C. যেহেতু স্বরবর্ণগুলিকে অবিচ্ছিন্ন রাখিতে হইবে, মনে করি *EIA* একত্রে একটি অক্ষর। সুতরাং এখন 7টি অক্ষর হইল যাহাদের 2টি *C* সুতরাং এই 7টি অক্ষরকে $\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}}$ প্রকারে বিন্যাস করা যায়। আবার এই সকল বিন্যাসের প্রত্যেকটির জন্য

স্বরবর্ণ তিনটির $\underline{|3}=6$টি করিয়া বিন্যাস পাওয়া যায়। সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}}\times 6=15120$.

উদা. 8. *SYZYGY* শব্দের অক্ষরগুলিকে এরূপ কয় প্রকারে সাজান যাইবে যে, *Y* গুলি কখনও একত্রিত হইবে না ? [A. I. H. S. '69]

SYZYGY শব্দে মোট অক্ষর 6টি তাহার মধ্যে *Y*-এর সংখ্যা তিনটি। সুতরাং এই 6টি অক্ষরকে $\frac{\underline{|6}}{\underline{|3}}=120$ প্রকারে সাজান যায়। এখানে দেখা যাক এই 120 প্রকারের মধ্যে কয়টি বিন্যাসে *Y*-গুলি একত্রিত হয়।

মনে কর, তিনটি *Y* একত্রে একটি অক্ষর *X*, সুতরাং এখন অক্ষর সংখ্যা হইল 4. এই চারিটি অক্ষর $\underline{|4}=24$ প্রকারে সাজান যায়। সুতরাং 24টি ক্ষেত্রে *Y* গুলি একত্রে থাকে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $120-24=96$ অর্থাৎ *Y* গুলি একত্রিত হইবে না এইরূপ 96 প্রকারে অক্ষরগুলিকে সাজান যাইবে।

প্রশ্নমালা 7B

1. *approximation* শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায় এবং তাহাদের কয়টির আদিতে *p* অক্ষর থাকিবে ?

2. *multiple* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে কতগুলি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় ? উহাদের কয়টিতে *l*-অক্ষর দুইটি পর পর থাকিবে ?

3. *contact* শব্দের সব কয়টি অক্ষর ব্যবহার করিয়া মোট কয়টি বিন্যাস পাওয়া যাইবে ? [H. S. '65]

4. *struggle* শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা অপর কতগুলি বিন্যাস করা যায় যাহাতে (i) স্বরবর্ণগুলির ক্রমিক অবস্থান ঠিক থাকে, (ii) স্বরবর্ণগুলির ও ব্যঞ্জনবর্ণগুলির আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, (iii) স্বরবর্ণগুলির স্থান অপরিবর্তিত থাকে ?

5. প্রমাণ কর যে *calcutta* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা, *america* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যার দ্বিগুণ। [C. U. '44]

6. দুইটি 'o' অক্ষর একত্রে থাকিবে না এরূপে কত রকমে *blossom* শব্দটির অক্ষরগুলিকে সাজান যায় ?

7. একটি পাঠাগারে কোন পুস্তকের 4 কপি, অন্য দুই পুস্তকের 5 কপি করিয়া, অপর তিন পুস্তকের 7 কপি করিয়া এবং ছয়টি বিভিন্ন পুস্তক এক কপি করিয়া আছে। সব পুস্তকগুলিকে কত রকমে সাজান যায় ?

8. একটি পাঠাগারে কোন এক পুস্তকের 5 কপি, অন্য দুই পুস্তকের 4 কপি করিয়া, অপর তিন পুস্তকের 6 কপি করিয়া এবং আটটি বিভিন্ন পুস্তক এক কপি করিয়া আছে। সব পুস্তকগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায়? [C. U. '34]

9. সব কয়টি অক্ষরকে একত্রে লইয়া নীচের প্রত্যেকটি শব্দের অক্ষরগুলির সকল বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

(i) *acacia*, (ii) *hannah*, (iii) *success*, (iv) *missisipi*.

§ 7·10. একই বস্তু বার বার (একবার, দুইবার ইত্যাদি) লইয়া বিন্যাস (Permutations involving repetitions)

যদি প্রত্যেক বস্তুকে r বার পর্যন্ত পুনঃ পুনঃ লওয়া চলে, তবে n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত n-সংখ্যক বস্তু n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর। মনে কর, r শূন্যস্থান আছে। ঐ n অক্ষর হইতে একযোগে r অক্ষর লইয়া এবং প্রত্যেক অক্ষর একবার, দুইবার, তিনবার,……, r বার পর্যন্ত লইয়া ঐ r শূন্যস্থান মোট যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহাই হইবে এক্ষেত্রে নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা।

প্রথম শূন্যস্থানটিতে n-সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটি স্থাপন করা যায়, সুতরাং প্রথম শূন্যস্থানটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থান n প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইবার পর, দ্বিতীয় শূন্যস্থানটিও n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে; কারণ, এখানে একই অক্ষর পুনরায় ব্যবহার করা চলিবে। অতএব প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n$ বা n^2-সংখ্যক বিভিন্নভাবে পূর্ণ করা যাইবে। অনুরূপে, তৃতীয় স্থানটিও n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। অতএব, প্রথম তিনটি স্থান পূর্ণ হইবে n^3 সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে।

এখানে দেখা যাইতেছে যে প্রত্যেক ক্ষেত্রে যতগুলি শূন্যস্থান পূর্ণ করা হইতেছে n-এর ঘাত তত হইতেছে।

এক্ষণে, এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে r শূন্যস্থান পূর্ণ করা যায় n^r প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

[**দ্রষ্টব্য:** (i) এখানে বিভিন্ন প্রকারের বস্তুগুলির কোন প্রকার বস্তুর সংখ্যা r অপেক্ষা কম নহে। (ii) অন্যান্য বিন্যাসগুলি হইতে এই প্রকার বিন্যাসের পার্থক্য লক্ষ্য করিবার বিষয়।]

উদাহরণমালা 7C

উদা. 1. আবৃত্তির জন্য একটি, নিয়মিত উপস্থিতির জন্য একটি ও খেলা-ধূলার জন্য একটি—এই মোট 3টি পারিতোষিক আছে। ঐগুলি কত প্রকারে 20 জন বালকের মধ্যে বিতরণ করা যায় ?

∵ প্রত্যেক পুরস্কার যে-কোন বালককে দেওয়া যায়,

∴ এখানে প্রত্যেক পুরস্কার 20 প্রকারে দেওয়া যায়।

প্রথম পুরস্কার বিতরণের পর সেইটি যত প্রকারে দেওয়া হইয়াছে, তাহার প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় পুরস্কারটি 20 প্রকারে দেওয়া যাইবে।

∴ প্রথম দুইটি পুরস্কার 20×20 বা 20^2 প্রকারে বিতরণ করা যাইবে।

অনুরূপে, 3টি পুরস্কার মোট 20^3 বা 8000 প্রকারে বিতরণ করা যাইবে।

উদা. 2. 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি দ্বারা 10,000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

10,000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাগুলি এক, দুই, তিন বা চার অঙ্কের হইতে পারে।

(i) এক অঙ্কের সংখ্যা স্পষ্টতঃ 4টি হইবে, কারণ অঙ্ক সংখ্যা চার।

(ii) দুই অঙ্কের সংখ্যার এককস্থান চার প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ অঙ্ক চারিটির যে কোনটি এককস্থানে বসান যায়। আবার এককস্থান পূর্ণ করিবার যে কোন প্রকারের জন্য দশকস্থান চারি প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ, অঙ্ক চারিটির যে কোনটিই এখানে বসিতে পারে।

(এখানে একই সংখ্যা একাধিকবার ব্যবহার করা যাইতে পারে।)

সুতরাং একক ও দশক স্থান একত্রে $4 \times 4 = 4^2 = 16$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়। অর্থাৎ এইক্ষেত্রে 16টি সংখ্যা পাওয়া যায়।

অনুরূপে (iii) তিন অঙ্কের $4^3 = 64$টি সংখ্যা এবং

(iv) চার অঙ্কের $4^4 = 256$টি সংখ্যা পাওয়া যায়।

∴ নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা $4 + 16 + 64 + 256 = 340$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, p-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর প্রত্যেক বার q-সংখ্যক বস্তুর অধিক বস্তু $(p > q)$ না লইয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা $\frac{p}{p-1}(p^q - 1)$. প্রত্যেক বস্তু একাধিকবার লওয়া যাইতে পারে।

যদি প্রত্যেকবার 1টি বস্তু লওয়া যায়, তবে বিন্যাস সংখ্যা হয় p. যদি প্রত্যেকবার 2টি বস্তু লওয়া হয়, তবে বিন্যাস সংখ্যা হয় p^2. যদি প্রত্যেকবার q-সংখ্যক বস্তু লওয়া হয় তবে বিন্যাস সংখ্যা হয় p^q,

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= p + p^2 + p^3 + \cdots + p^q = \frac{p(p^q - 1)}{p - 1}$.

[দ্রষ্টব্য : $p+p^2+p^3+\cdots+p^q$, একটি গুণোত্তর প্রগতির q-সংখ্যক পদের যোগফল, যাহার প্রথম পদ $=p$, সাধারণ অনুপাত $=p$.]

প্রশ্নমালা 7C

1. তিনটি ডাকবাক্সে 4 খানি চিঠি কত প্রকারে ফেলা যায় ?

2. চারিটি বিভিন্ন পুরস্কার 15 জন বালকের মধ্যে কত প্রকারে বিতরণ করা যায় ?

3. 2, 3, 4 অঙ্কগুলিদ্বারা 10000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

4. একটি নির্বাচনে একজন ভোটদাতা চারিটি করিয়া ভোট দিতে পারে। একজন ভোটপ্রার্থীকে একজন ভোটদাতা একাধিক ভোট দিতে পারে। ভোটপ্রার্থীর সংখ্যা চার হইলে, কোন ভোটদাতা কয়প্রকারে ভোট দিতে পারে ?

5. 4টি পুস্তক 6টি ছাত্রকে দেওয়া হইবে। একজন ছাত্র একাধিক পুস্তক পাইতে পারিলে, মোট কয়প্রকারে পুস্তকগুলি বিতরণ করা যাইবে ?

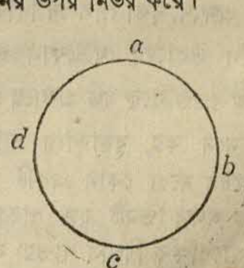
§ 7 11. বৃত্তাকারে বিন্যাস (Permutation in a Circle) :

কতিপয় বিভিন্ন বস্তুকে এক সারিতে (in a row) সাজাইলে সেই বিন্যাসকে রৈখিক বিন্যাস (linear arrangement) বলা যায়।

আর বস্তুগুলিকে বৃত্তাকারে (in a circle বা in a ring) সাজাইলে সেই বিন্যাসকে বৃত্তাকারে বিন্যাস (circular arrangement) বলে।

উভয় প্রকারের পার্থক্য এই যে, প্রথম প্রকার বিন্যাসের দুইটি প্রান্ত বা সীমা (ends) থাকে, কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে তাহা থাকে না। রৈখিক বিন্যাস বস্তুগুলির স্বতন্ত্র স্থানের (absolute position) উপর নির্ভর করে। কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাস বস্তুগুলির আপেক্ষিক স্থানের উপর নির্ভর করে।

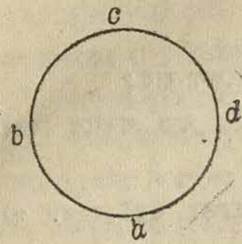
abcd, bcda, cdab, dabc এই চারিটি রৈখিক বিন্যাস বিভিন্ন; কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে উহাদের বিশেষ কোন প্রভেদ থাকিবে না। কারণ, ঐ a, b, c, d অক্ষর চারিটির যে কোন একটি হইতে আরম্ভ করিয়া চক্রক্রমে (in cyclic order) পড়িয়া গেলেই ঐ বিন্যাস চারিটি পাওয়া যায়।



[চিত্র (ক)

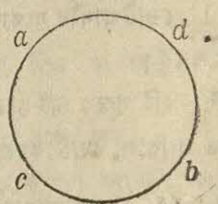
§ 7·12. বিভিন্ন ও অভিন্ন বৃত্তাকার বিন্যাস :

বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে যে সকল বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের মধ্যে যে বিন্যাসগুলিতে বস্তুগুলি **একই আপেক্ষিক অবস্থানে** সাজান থাকে সেই বিন্যাসগুলিকে অভিন্ন ধরা হয়। আর, যে বিন্যাসগুলিতে বস্তুগুলির আপেক্ষিক অবস্থান বিভিন্ন অর্থাৎ একরূপ নহে, সেই বিন্যাসগুলিকে বিভিন্ন ধরা হয়।



[চিত্র (খ)]

চিত্র (ক)-এ বৃত্তটির যে যে স্থানে a, b, c, d বসান আছে, চিত্র (খ)-এ ঐ অক্ষরগুলি ঠিক সেই সেই অবস্থানে নাই। কিন্তু উহাদের আপেক্ষিক অবস্থান দুই চিত্রেই অভিন্ন। কারণ, দুই চিত্রেই যে কোন একই অক্ষর (a বা b বা c বা d) হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিয়া গেলে পর পর অক্ষরগুলি উভয়ক্ষেত্রে একই ক্রমে পাওয়া যাইবে। অতএব, ঐ বিন্যাস দুইটি অভিন্ন। আবার দেখ, চিত্র (গ)-এ a, b, c, d অক্ষর চারিটির আপেক্ষিক অবস্থান চিত্র (ক) বা (খ)-এ উহাদের আপেক্ষিক অবস্থানের সহিত এক নহে। কারণ, চিত্র (ক)-এর a হইতে আরম্ভ করিয়া চক্রক্রমে পড়িয়া গেলে পাই $abcd$ এবং চিত্র (গ)-এ a হইতে আরম্ভ করিয়া চক্রক্রমে পড়িয়া গেলে পাই $adbc$. অতএব, প্রথম বিন্যাস দুইটি হইতে তৃতীয় বিন্যাসটি [চিত্র (গ)] বিভিন্ন।



[চিত্র (গ)]

এক্ষণে, বুঝা গেল যে বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে বিভিন্ন বিন্যাসে সাজাইতে হইলে উহাদের যে কোন একটি বস্তুকে কোন একটি অবস্থানে স্থির রাখিয়া বাকি বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব বিভিন্ন উপায়ে সাজাইতে হয়।

মনে কর, বৃত্তাকারে চারিটি ভিন্ন স্থান আছে। এখন যদি a অক্ষরটিকে উহাদের মধ্যে কোন একটি স্থানে বসান হয়, তবে উহাকে স্থির রাখিয়া বাকি অক্ষর তিনটি যত প্রকারে সম্ভব অপর স্থান তিনটিতে বসাইলে মোট $\underline{|3}$ আপেক্ষিক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\underline{|n-1}$.

[দ্রষ্টব্য : এই প্রকার বিন্যাসে যদি চক্রক্রমে আবর্তনের দিকের কথা ধরা না হয় (অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার দিকে ও বিপরীত দিকে—এই দুই প্রকার আবর্তনের কোন প্রভেদ না করা হয়), তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$.]

দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝা যাউক। (1) মনে কর, 20 জন ব্যক্তিকে লইয়া একটি round table সভা হইবে। এখন গোলাকার টেবিলে কত প্রকারে ঐ লোকগুলিকে বসান যায় ? (2) 20টি বালক আপেক্ষিকভাবে কত প্রকারে নাগরদোলায় (merry-go-round) বসিতে পারে ? (3) 20টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা দিয়া কত রকমে মালা গাঁথা যায় ?

(1) প্রথম প্রশ্নে লোকদিগের আপেক্ষিক অবস্থানই কেবল বিবেচ্য নহে, টেবিলের সম্পর্কে অবস্থান অর্থাৎ উহার কোন্ স্থানে অবস্থিতি তাহাও বিবেচ্য। অতএব, এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\underline{|20}$.

(2) দ্বিতীয়টি আপেক্ষিক বিন্যাস ; কারণ, ইহা বালকগণের মধ্যে আপেক্ষিক অবস্থানের প্রশ্ন। এখন যদি নাগরদোলায় 20টি আসনের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট আসনে একজন বালককে স্থির রাখিয়া অন্য 19টি বালককে বিভিন্ন প্রকারে বসান হয়, তবে তাহাদিগকে $\underline{|19}$টি প্রকারে বসান যাইবে। অতএব, এস্থলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\underline{|19}$.

(3) তৃতীয়টিও আপেক্ষিক বিন্যাসের প্রশ্ন, কিন্তু দ্বিতীয় প্রশ্ন হইতে ইহার পার্থক্য আছে। 20টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তার মধ্যে যদি একটি মুক্তাকে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 19টি মুক্তাকে বিভিন্ন প্রকারে গাঁথা হয়, তবে ডানদিক দিয়া (clockwise) অথবা বামদিক দিয়া (anti-clockwise) গাঁথিলে একই প্রকারের মালা হইবে—কোন পার্থক্য হইবে না। কারণ, কোন একটি ক্রমে মুক্তাগুলি সাজাইয়া মালাটি অপর পার্শ্বে ঘুরাইয়া দিলে দুই প্রকারই অনুরূপ হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\underline{|19}$.

§ 7·13. **বিবিধ বিন্যাস :** আমরা যতপ্রকার বিন্যাস সম্বন্ধে এ পর্যন্ত আলোচনা করিয়াছি তাহা ছাড়া আরও বিভিন্ন প্রদত্ত শর্ত অনুসারে বিভিন্ন প্রকার বিন্যাস হইতে পারে।

উদাহরণমালা 7D

উদা. 1. 6 জন বালক কত রকমে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ?

ইহা একটি আপেক্ষিক অবস্থানের প্রশ্ন। মনে কর, একটি বালক একটি নির্দিষ্ট স্থানে আছে, সুতরাং বাকি 5 জন বালককে $\underline{|5}$ প্রকারে সাজান যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=\underline{|5}=5\times4\times3\times2\times1=120$.

উদা. 2. 6টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা দিয়া কতরকমভাবে মালা গাঁথা যায় ?

ছয়টি মুক্তা বৃত্তাকারে বিন্যাস করিলে বিন্যাস সংখ্যা হয় $\underline{\lfloor 5}$, ইহাতে ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে ও ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে এই দুই প্রকার বিন্যাস ধরা হইয়াছে।

কিন্তু বিভিন্ন বর্ণের মুক্তার মালা ঘুরাইয়া ধরিলে উহার মুক্তাগুলির ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে ও ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ক্রম অনুরূপ হইয়া যায়।

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় সংখ্যা $=\frac{1}{2}\underline{\lfloor 5}=\frac{1}{2}\times 120=60.$

উদা. 3. একটি গোল টেবিলের চারিদিকে 6 জন ব্যক্তি কত প্রকারে বসিতে পারে ?

এখানে বিন্যাসগুলির সম্পর্ক টেবিলের সহিত, কিন্তু ঐগুলি ব্যক্তিগণের পরস্পরের অবস্থান নিরপেক্ষ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=\underline{\lfloor 6}=6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=720.$

উদা. 4. কোন দুইজন বালিকা পাশাপাশি থাকিবে না এরূপভাবে কত রকমে 5 জন বালক ও 5 জন বালিকা একটি গোলটেবিলের চারিদিকে বসিতে পারে ?

[টেবিলে অবস্থান সম্পর্কে] একটি বালকের অবস্থান স্থির রাখিয়া বাকি 4 জন বালককে যত প্রকারে সম্ভব গোল টেবিলের পাশে পাশে বসাইলে মোট $\underline{\lfloor 4}$ বা 24টি বিন্যাস হইবে।

এই 24টি বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাসের পক্ষে দুই দুইজন বালকের মধ্যে এক একজন করিয়া বালিকাকে বসান হইলে 5 জন বালিকাকে ঐরূপ 5টি স্থানে বসান যাইবে এবং কোন দুইজন বালিকা পাশাপাশি থাকিবে না।

5 জন বালিকাকে ঐরূপ 5টি স্থানে $\underline{\lfloor 5}$ বিভিন্ন প্রকারে বসান যায়। অতএব, বালকদের প্রতিটি বিন্যাসের সহিত বালিকাদের $\underline{\lfloor 5}$ বিন্যাস পাওয়া যায়। $\because$ প্রথম বালকটিকে স্থির রাখার সময় সে 10টি শূন্য স্থানের যে কোন একটিতে থাকিতে পারে, $\therefore$ তাহার অবস্থান 10 প্রকারে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=10\times\underline{\lfloor 4}\times\underline{\lfloor 5}=28800.$

[দ্রষ্টব্য : পরস্পরের আপেক্ষিক অবস্থান ধরিলে নির্ণেয় সংখ্যা $=\underline{\lfloor 4}\times\underline{\lfloor 5}=2880$; কিন্তু এস্থলে ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে ও ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে প্রভেদ না ধরিলে সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\times 2880$.]

প্রশ্নমালা 7D

1. কত প্রকারে 10 জন বালক-বালিকা আপেক্ষিক ভাবে একটি নাগরদোলায় বসিতে পারে?

2. 8 জন বালক কত প্রকারে বৃত্তাকারে বসিতে পারে?

3. বিভিন্ন বর্ণের 8টি মুক্তা দিয়া কত প্রকারে মালা গাঁথা যায়?

4. কোন গোল টেবিলের ধারে ধারে 8 জন ব্যক্তি কত প্রকারে বসিতে পারে, যাহাতে কোন দুই প্রকারে পাশাপাশি একইভাবে লোক না থাকে?

5. কোন দুইটি ছাত্র পাশাপাশি থাকিবে না এরূপ কত প্রকারে 6 জন শিক্ষক ও 6 জন ছাত্র গোল টেবিলের ধারে বসিতে পারে?

6. একজন ভারতবাসী ও একজন ইংরাজ একান্তরভাবে বসিলে 5 জন ভারতবাসী ও 5 জন ইংরাজ কত প্রকারে একটি গোল টেবিলের ধারে বসিতে পারে?

7. একান্তরভাবে বালক ও বালিকাকে বসাইলে 5 জন বালক ও 5 জন বালিকাকে কত রকমে বৃত্তাকারে বসান যাইবে?

সমবায়
(Combination)

§ 7·14. § 7·2-এ সমবায়ের সংজ্ঞা এবং § 7·3-এ বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে।

কতকগুলি বস্তু হইতে সবগুলি বা কয়েকটি করিয়া একযোগে লইয়া যত প্রকার দল নির্বাচন করা যায় তাহাদের এক একটি নির্বাচনকে এক একটি **সমবায় (Combination)** বলে।

সমবায় দ্বারা কেবল এই দল নির্বাচনই বুঝায়, কিন্তু সমবায়ে এই দল নির্বাচনের পর এক-দলীয় বস্তুগুলিকে আবার বিভিন্নক্রমে সাজান বুঝায় না। এক-দলীয় বস্তুগুলি কোন্‌টির পর কোন্‌টি সাজান হইল তাহা বিন্যাসের লক্ষ্য, আর কেবল কোন্ কোন্ বস্তু লওয়া হইল তাহাই সমবায়ের মূল কথা। যথা—মনে কর, a ও b অক্ষর দুইটি দেওয়া আছে। দুইটি অক্ষরই একযোগে লইলে সমবায় হইবে মাত্র একটি ab, কিন্তু বিন্যাস হইবে দুইটি ab ও ba.

প্রতীক। n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, তাহা সংক্ষেপে ^nC_r বা $_nC_r$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

§ 7·15. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয় (এখানে $r \leqslant n$)।

মনে কর, নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা x। এখানে প্রত্যেক সমবায়ে r সংখ্যক বস্তু আছে। এক একটি সমবায়ে r বস্তুকে লইয়া যদি যতগুলি সম্ভব বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়, তবে $\lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস হইবে।

$\therefore$ x সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $x \times \lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস হইবে।

আবার দেখ, এই x সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব সাজাইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া যতগুলি বিন্যাস সংখ্যা হয় তাহাই পাওয়া যায়।

$\therefore$ $x \times \lfloor r = n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা $= {}^nP_r$.

অর্থাৎ ${}^nC_r \times \lfloor r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$,

$$\therefore\ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} \quad \cdots\cdots(1)$$

এক্ষণে (1)কে factorial আকারে প্রকাশ করার জন্য ডান পক্ষের লব ও হরকে $\lfloor n-r$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$${}^nC_r = \frac{\{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\} \times (n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{\lfloor r \times \lfloor n-r}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}.$$

বিকল্প প্রমাণ (বিন্যাস সূত্রের সাহায্য না লইয়া) :

মনে কর, n-সংখ্যক বস্তু যেন n-সংখ্যক অক্ষর এবং মোট সমবায় সংখ্যা $= {}^nC_r$.

যে সমবায়গুলিতে কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর আছে সেগুলি পাওয়া যাইবে, যদি অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে একযোগে $(r-1)$ অক্ষর লইয়া যতগুলি সমবায় হয় তাহাদের প্রত্যেকটির সহিত ঐ নির্দিষ্ট অক্ষরটিকে সংযুক্ত করা যায়।

$\therefore$ যে সমবায়গুলিতে কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর আছে সেগুলির সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$.

অতএব, যদি n-অক্ষর হইতে একযোগে r-অক্ষর লইয়া সমস্ত সমবায়গুলি লেখা যায়, তবে প্রত্যেক অক্ষর সেইগুলিতে ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া আছে।

$\therefore$ ঐ সমবায়গুলিতে মোট অক্ষর সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

আবার দেখ, এখানে মোট সমবায় সংখ্যা ধরা হইয়াছে ^nC_r এবং প্রত্যেক সমবায়ে r-সংখ্যক অক্ষর আছে। অতএব, সমস্ত সমবায়ে মোট অক্ষর সংখ্যা $=r\times {}^nC_r$

$$\therefore \quad r\times {}^nC_r = n\times {}^{n-1}C_{r-1},$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{n}{r}\times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

অনুরূপে, $${}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1}\times {}^{n-2}C_{r-2}$$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2}\times {}^{n-3}C_{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2}\times {}^{n-r+1}C_1$$

এবং $${}^{n-r+1}C_1 = \frac{n-r+1}{1}$$

এক্ষণে উপরের বামপক্ষের রাশিগুলি ও ডানপক্ষের রাশিগুলি গুণ করিয়া এবং ঐ দুই গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ করিলে পাই

$$\begin{aligned}{}^nC_r &= \frac{n}{r}\times\frac{n-1}{r-1}\times\frac{n-2}{r-2}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{1}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2.1}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\lfloor n-r}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\\ &= \frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\quad\cdots(2)\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $^nC_1=n.$

প্রমাণ : $\because\ {}^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$, $\therefore\ {}^nC_1=\frac{\lfloor n}{\lfloor 1\,\lfloor n-1}=\frac{n\lfloor n-1}{\lfloor n-1}=n$

(ii) $^nC_n=1.$

প্রমাণ : $\because\ {}^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$, $\therefore\ {}^nC_n=\frac{\lfloor n}{\lfloor n\,\lfloor n-n}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n}1=$

[$\because\ \lfloor 0=1$].

(iii) $^nP_r=\lfloor r\times {}^nC_r$

প্রমাণ : $^nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}=\lfloor r\times\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\lfloor r\times {}^nC_r.$

(iv) $^nC_0=1$.

প্রমাণ : $r=0$ লিখিয়া পাই $^nC_0=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 0 \lfloor n}=1$.

[প্রকৃতপক্ষে কিন্তু $^nC_0$-র কোন অর্থ হয় না]

§ 7·16. n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা এবং n বিভিন্ন বস্তু হইতে (n−r) বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা সমান হয়।

প্রমাণ : (সূত্র প্রয়োগ না করিলে)

n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু তুলিয়া লইলে $(n-r)$ বস্তু পড়িয়া থাকে। অতএব ঐ n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া নির্বাচন করিলে প্রত্যেক প্রথম প্রক্রিয়াটি যত প্রকারে করা যায়, দ্বিতীয় প্রক্রিয়াটিও ঠিক তত প্রকারেই করা যায়।

$\therefore\ ^nC_r={}^nC_{n-r}$.

সূত্র সাহায্যে প্রমাণ :

$$^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}\ \cdots\ \cdots(1)$$

$\therefore$ r-এর স্থানে $(n-r)$ বসাইয়া পাই

$$^nC_{n-r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor n-(n-r)}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor r}$$

অতএব, $^nC_r={}^nC_{n-r}$.

^nC_r ও $^nC_{n-r}$কে **পরস্পরের পূরক সমবায়** বলে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $^nC_p={}^nC_q$ হয়, তবে $p=q$, অথবা $p+q=n$ হইবে।

প্রমাণ : এখানে $\because$ n বস্তু হইতে একযোগে p বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, একযোগে q বস্তু লইলেও ততগুলি সমবায় হয়, $\therefore\ p=q$.

আবার, $\because\ ^nC_p={}^nC_{n-p}$ এবং $\because\ ^nC_p={}^nC_q$ (স্বীকার)

$\therefore\ ^nC_{n-p}={}^nC_q,\ \therefore\ n-p=q,\ \therefore\ p+q=n.$

§ 7·17. $^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$.

$(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায়ের সংখ্যা = উহাদের কোন একটি নির্দিষ্ট বস্তু যতগুলি সমবায়ে আছে + ঐ বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে নাই।

এখানে বস্তুসংখ্যা $=n+1$ এবং একযোগে লইতে হইবে r বস্তু।

$\therefore$ নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে আছে তাহাদের সংখ্যা = অবশিষ্ট n বস্তু হইতে $(r-1)$ বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $={}^nC_{r-1}$.

আবার ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে নাই তাহাদের সংখ্যা
$= n$ বস্তু হইতে r বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $= {}^nC_r$.
অতএব, প্রমাণিত হইল যে, ${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$.

[দ্রষ্টব্য : নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে আছে তাহা নির্ণয়ের সময় মনে কর $(n+1)$ বস্তু হইতে প্রথমেই সেই বস্তুটি লইলাম। তখন বাকি n বস্তু থাকিল এবং উহা হইতে আর $(r-1)$ বস্তু লইতে হইবে। আগের নির্দিষ্ট বস্তুটি লইলেই মোট r বস্তু লওয়া হইবে।

আবার, যে সকল সমবায়ে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি নাই তাহা নির্ণয়ের জন্য মনে কর $(n+1)$ বস্তু হইতে ঐ বস্তুটি সরাইয়া রাখিলাম, কারণ উহাকে কখনও লইতে হইবে না। এখন বাকি থাকিল n-সংখ্যক বস্তু, উহা হইতে r বস্তু লইতে হইবে।]

বিকল্প প্রমাণ :—

$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-(r-1)}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1}$$

এক্ষণে, $\because \lfloor r = r\lfloor r-1$ এবং $\lfloor n-r+1 = (n-r+1)\lfloor n-r$

$$\therefore\ {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{r\lfloor r-1 \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \times (n-r+1) \lfloor n-r}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r}\left\{\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right\} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r} \times \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\lfloor n}{r\lfloor r-1 . (n-r+1) \lfloor n-r} = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor n-r+1} = {}^{n+1}C_r.$$

§ 7·18. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া গঠিত যে সমবায়গুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত থাকিবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানে $r \geqslant p$। মনে কর, প্রথমেই ঐ নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু পৃথক করিয়া রাখা হইল। তখন আর থাকিল $(n-p)$ সংখ্যক বস্তু। এক্ষণে, ঐ $(n-p)$ বস্তু হইতে একযোগে $(r-p)$ সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সম্ভব সমবায় নির্ণয় করা হইল। সমবায়গুলিকে যদি পূর্বের পৃথক্ করা p বস্তুর সহিত যুক্ত করা যায় তাহা হইলে যে সকল সমবায়ে ঐ p বস্তু সতত বিদ্যমান সেই সমবায়গুলিকে পাওয়া যাইবে। অতএব $\because$ $(n-p)$ বস্তু হইতে একযোগে $(r-p)$ বস্তু লইয়া মোট সমবায় হয় ${}^{n-p}C_{r-p}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{n-p}C_{r-p}$.

§ 7·19. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া নির্বাচিত যে সমবায়গুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানেও $r \geqslant p$ হইবে। ঐ p-সংখ্যক বস্তু কোন সমবায়ে থাকিবে না বলিয়া প্রথমে ঐ p বস্তুকে সরাইয়া রাখা হইল। এখন অবশিষ্ট $(n-p)$ বস্তু হইতে r সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া যে সমবায়গুলি হইবে সেইগুলিতে ঐ p বস্তু থাকিবে না। অতএব, এই সমবায়গুলির সংখ্যাই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$.

উদাহরণমালা 7E

উদা. 1. মান নির্ণয় কর :—

(i) ${}^7C_3$, (ii) ${}^8C_4 \times \lfloor 5$, (iii) $\dfrac{16!}{14!\,2!}$.

(i) $${}^7C_3 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\ \lfloor 7-3} = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\ \lfloor 4} = \frac{7.6.5\ \lfloor 4}{\lfloor 3\ \lfloor 4} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35.$$

(ii) $${}^8C_4 \times \lfloor 5 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} \times \lfloor 5 = 70 \times \lfloor 5 = 70 \times 120 = 8400.$$

(iii) $$\frac{16!}{14!\,2!} = \frac{16\times15\times\lfloor 14}{\lfloor 14\times2\times1} = 8\times15 = 120.$$

উদা. 2. ${}^nC_4 = 21 \times {}^{\frac{n}{2}}C_3$ হইলে $n =$ কত ?

এখানে $${}^nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1},$$

এবং $$21 \times {}^{\frac{n}{2}}C_3 = 21 \times \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{3\times2\times1} = 21 \times \frac{n(n-2)(n-4)}{8\times3\times2\times1}.$$

এক্ষণে, প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} = \frac{21\times n(n-2)(n-4)}{8\times3\times2\times1}$$

বা, $(n-1)(n-3) = \frac{21}{2}(n-4)$,

বা, $2n^2 - 8n + 6 = 21n - 84$, বা, $2n^2 - 29n + 90 = 0$,

বা, $(n-10)(2n-9) = 0$, $\therefore$ $n = 10, \frac{9}{2}$.

$\therefore$ n-এর নির্ণেয় মান $= 10$, ($\because$ অপর ভগ্নাংশ মানটি গ্রাহ্য নহে)।

উদা. 3. ${}^nC_{10} = {}^nC_8$ হইলে ${}^nC_{16}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\because$ ${}^nC_{10} = {}^nC_8$, $\therefore$ $n = 10 + 8 = 18$.

$\therefore$ ${}^nC_{16} = {}^{18}C_{16} = {}^{18}C_2 = \frac{18\times17}{2\times1} = 153$.

উদা. 4. 9 জন ব্যক্তির মধ্যে কত প্রকারে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করা যায় ?

এখানে 9 জন ব্যক্তির মধ্যে একযোগে 6 জনকে যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় ততগুলি কমিটি হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটি সংখ্যা $= {}^9C_6 = {}^9C_3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

উদা. 5. 13টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 4টি স্বরবর্ণ হইতে একযোগে 3টি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি করিয়া স্বরবর্ণ লইয়া কয়টি শব্দ গঠন করা যায় ?

13টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে একযোগে 3টি করিয়া নির্বাচন করা হইতেছে, সুতরাং সমবায় সংখ্যা $= {}^{13}C_3$.

4টি স্বরবর্ণ হইতে একযোগে 2টি করিয়া নির্বাচন করিলে সমবায় সংখ্যা হয় ${}^4C_2$.

অতএব, দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে করিলে মোট সমবায় সংখ্যা

$$= {}^{13}C_3 \times {}^4C_2.$$

এক্ষণে, প্রত্যেক সমবায়ে 5টি করিয়া অক্ষর (3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ) আছে। উহাদিগকে বিভিন্নভাবে সাজাইলে প্রত্যেকবার একটি করিয়া নূতন শব্দ (word) পাওয়া যাইবে। ঐ 5টি অক্ষরের বিন্যাস সংখ্যা $\underline{|5} = 120$.

$\therefore$ মোট শব্দ সংখ্যা $= {}^{13}C_3 \times {}^4C_2 \times 120$

$$= \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1} \times 120 = 205920.$$

দ্রষ্টব্য : শব্দ ও সংখ্যা গঠন প্রশ্নে সর্বদাই নির্বাচনের পর বিন্যাসের প্রশ্ন উঠে। অতএব, প্রথমে কতগুলি সমবায় হয় তাহা নির্ণয় করিয়া পরে প্রত্যেক সমবায়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অঙ্কগুলিকে বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে কতগুলি বিন্যাস হয় দেখিতে হইবে। আর **কমিটি গঠন** ইত্যাদি প্রশ্ন সমাধানে কেবলমাত্র নির্বাচন করিলেই অর্থাৎ সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করিলেই হইবে। কারণ, কমিটিতে নির্বাচিত ব্যক্তিগণ যে ভাবেই আসন গ্রহণ করুন না কেন, তাহাতে কমিটি একই থাকে, ভিন্ন কমিটি হয় না। [উদা. 4 এবং উদা. 5-এর পার্থক্য বুঝিয়া দেখ।]

উদা. 6. প্রদত্ত 12টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া বস্তু কত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে (i) একটি নির্দিষ্ট বস্তু সতত থাকিবে, (ii) একটি নির্দিষ্ট বস্তু সতত পরিত্যক্ত হইবে ?

(i) $\because$ একটি নির্দিষ্ট বস্তুকে প্রত্যেক নির্বাচনে লইতেই হইবে,

$\therefore$ ঐ বস্তুটিকে আগেই লইয়া বাকি 11টি বস্তু হইতে কেবল 3টি করিয়া বস্তু নির্বাচন করিতে হইবে। এই নির্বাচন করা যায় ${}^{11}C_3$ প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{11}C_3 = \frac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 165.$

(ii) এক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট বস্তুকে কোন নির্বাচনেই লওয়া হইবে না। অতএব, উহা যেন নাই মনে করিয়া বাকি 11টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া বস্তু নির্বাচন করিতে হইবে, এবং উহা ${}^{11}C_4$ প্রকারে করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{11}C_4 = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = 330.$

উদা. 7. 7 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলার মধ্যে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলা থাকিবে এরূপ কত প্রকারে কমিটি হইতে পারে? [C. U. '43]

∵ কমিটিতে মোট 5 ব্যক্তির মধ্যে অন্তত: 1 জন মহিলা থাকিবে,

∴ ঐ কমিটি নিম্নলিখিত ভাবে গঠিত হইতে পারে :—

(*a*) 1 জন মহিলা ও বাকি 4 জন পুরুষ লইয়া,

(*b*) 2 জন মহিলা ও 3 জন পুরুষ লইয়া;

(*c*) 3 জন মহিলা ও 2 জন পুরুষ লইয়া,

অথবা, (*d*) 4 জন মহিলা ও 1 জন পুরুষ লইয়া।

(*a*) এই ক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 1 জনকে এবং 7 জন পুরুষের মধ্যে 4 জনকে বাছিয়া লইতে হইবে।

∴ সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^7C_4 = {}^4C_1 \times {}^7C_3 = 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 140.$

(*b*) এই ক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 2 জনকে এবং 7 জন পুরুষের মধ্যে 3 জনকে বাছিয়া লইতে হইবে।

∴ সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^7C_3 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 210.$

(*c*) অনুরূপে, এই ক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^7C_2 = {}^4C_1 \times {}^7C_2$
$= 4 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 84.$

এবং (*d*) এই ক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 1 \times 7 = 7.$

∴ নির্ণেয় মোট কমিটির সংখ্যা $= 140 + 210 + 84 + 7 = 441.$

উদা. 8. 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ হইতে 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়, যাহাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণ দুইটির মধ্যে পড়ে? [C. U. '22]

এখানে 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে 2টি করিয়া একযোগে লইয়া বিন্যস্ত করিলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় ${}^7P_2$ বা 42টি।

আবার, এক একটি বিন্যাসে যে দুইটি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ আছে, তাহার মধ্যস্থলে 3টি স্বরবর্ণের মধ্যে যে-কোন একটি বসাইলে এক একটি শব্দ হইবে।

∴ প্রত্যেক বিন্যাস হইতে 3টি করিয়া শব্দ পাওয়া যাইবে।

∴ মোট নির্ণেয় শব্দসংখ্যা $= 42 \times 3 = 126.$

উদা. 9. 10টি বাহুবিশিষ্ট কোন বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যায়? ঐ বহুভুজের কর্ণগুলির সংখ্যা কত?

বহুভুজের 10টি বাহু থাকায় উহার কৌণিক বিন্দুও 10টি আছে। ঐ 10টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন 3টি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

অতএব, 10টি বিন্দু হইতে 3টি বিন্দু যত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, ততগুলি ত্রিভুজ হইবে।

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^{10}C_3 = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120.$

আবার, ঐ বিন্দুগুলির যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি সরলরেখা হয়।

∴ মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$

এই 45টি সরলরেখার মধ্যে ঐ বহুভুজের 10টি বাহুও ধরা আছে, কিন্তু ঐ বাহুগুলি উহার কর্ণ হইতে পারে না।

∴ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $= 45 - 10 = 35.$

প্রশ্নমালা 7E

1. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :—

(i) ${}^{6}C_2$ (ii) ${}^{10}C_7$ (iii) ${}^{30}C_{28}$ (iv) $\frac{18!}{16! \, \underline{|3}}$.

2. ${}^{30}C_{n+5} = {}^{30}C_{n-3}$ হইলে $n =$ কত ?

3. (i) $2 \times {}^{r}C_4 = 35 \times {}^{\frac{r}{2}}C_3$ হইলে $r =$ কত ?

(ii) ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_8$. হইলে ${}^{23}C_n$ নির্ণয় কর।

(iii) $m = {}^{n}C_2$ হইলে দেখাও ${}^{m}C_2 = 3.{}^{n+1}C_4$. [C. U. '12]

4. ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হইলে $r =$ কত ? [C. U. '30]

5. 8 জন সদস্য হইতে 5 জনকে কতপ্রকারে নির্বাচন করা যায় ?

6. 9 জন স্বরাজপন্থী ও 5 জন মন্ত্রিত্বপন্থী লোক আছে। প্রথম দলের 6 জন ও দ্বিতীয় দলের 2 জন থাকিবে এরূপ কতগুলি কমিটি গঠন করা যায় ? [C. U. '32]

7. 6 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলার মধ্য হইতে 5 জনকে লইয়া একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। প্রত্যেক কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলা থাকিবেই এরূপভাবে কয়টি কমিটি গঠন করা যায় ? [C. U. '37]

0. একটি মিউনিসিপ্যাল কর্পোরেশনে 20 জন কাউন্সিলার ও 8 জন অল্ডারম্যান আছেন। 5 জন কাউন্সিলার ও 3 জন অল্ডারম্যান লইয়া কতগুলি কমিটি গঠন করা যায় ? [C. U. '33]

9. কোন বর্ণমালায় 5টি স্বরবর্ণ ও 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। উহা হইতে 2টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণবিশিষ্ট কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় যাহাতে শব্দের অক্ষরগুলি বিভিন্ন হইবে ? [C. U. '32]

10. 10টি আম হইতে 3টি করিয়া লইয়া কতগুলি বিভিন্ন নির্বাচন করা যায়, যাহাতে প্রতি নির্বাচনে একটি নির্দিষ্ট আম সর্বদা থাকে ? [C. U. '21]

11. 15 জন লোকের মধ্য হইতে কত রকমে 9 জন লোক নির্বাচন করা যায়, যাহাতে নির্দিষ্ট 3 জন লোক সর্বদা বাদ পড়ে ? [C. U. '54]

12. 7 জন শিক্ষক ও 4 জন ছাত্র হইতে 6 জনের একটি কমিটি করিতে হইবে। যদি (i) কমিটিতে ঠিক 2 জন ছাত্র, (ii) অন্ততঃপক্ষে 2 জন ছাত্র থাকে, তবে কত প্রকারে ঐ কমিটি গঠন করা যায় ?

13. দুইটি বিভাগে 5টি করিয়া মোট 10টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হইবে, কিন্তু কোন বিভাগ হইতে 4টির বেশী প্রশ্নের উত্তর দিতে পারিবে না। এইভাবে সে কত রকমে প্রশ্নগুলি নির্বাচন করিতে পারিবে? [C. U. '32]

14. 5 জন নির্বাচনপ্রার্থীর মধ্য হইতে 3 জন সদস্য নির্বাচন করিতে হইবে। একজন ভোটদাতা যতজনকে নির্বাচন করিতে হইবে, তাহার অনধিক যতজন প্রার্থীকে ইচ্ছা ভোট দিতে পারিবেন। তিনি কত রকমে ভোট দিতে পারিবেন? [C. U. '35]

15. একটি ষড়্‌ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যায়? ঐ ষড়্‌ভুজের কর্ণের সংখ্যা কত?

16. কোন সমতলের উপর 16টি বিন্দু আছে এবং উহাদের কোন 3টি একরেখীয় নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি সরলরেখা গঠন করা যায়? [C. U. 1909]

17. কোন সমতলে 10টি বিন্দু আছে, তন্মধ্যে 4টি একরেখীয়। বিন্দুগুলি যোগ করিয়া (i) কতগুলি সরলরেখা, (ii) কতগুলি ত্রিভুজ হইতে পারে?

18. কোন সমতলে n-সংখ্যক বিন্দু আছে, উহাদের মধ্যে নির্দিষ্ট m-সংখ্যক বিন্দু সমরেখা, অন্য কোন 3টি বিন্দু একরেখীয় নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি (i) বিভিন্ন সরলরেখা, (ii) কতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যায়? [C. U. '28]

19. একটি কাউন্সিলে একজন সভাপতি, দুইজন সহ-সভাপতি ও অপর 12 জন সদস্য আছেন। ঐ সভাপতি ও কেবলমাত্র একজন সহ-সভাপতি থাকিবেন এরূপে 6 জন লোকের কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যায়? [C. U. '14]

20. যদি ${}^nC_r = 20$ ও ${}^nP_r = 120$ হয়, তবে n ও r-এর মান কত?

21. একটি দলে 6 জন ও অপর একদলে 8 জন খেলোয়াড় আছে। ঐ দুই দল হইতে মোট 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল নির্বাচন করিতে হইবে। যদি প্রথম দলটি হইতে অন্ততঃপক্ষে 4 জন খেলোয়াড় লইতে হয়, তবে কত প্রকারে ঐ নির্বাচন করা যাইবে? [C. U. '38]

22. 15 জন ক্রিকেট খেলোয়াড় আছে, তন্মধ্যে কেবল 5 জন বোলার (বল দিতে পারে)। প্রত্যেক দলে অন্ততঃ 3 জন বোলার থাকিবে এরূপভাবে কতরকমে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল গঠন করা যায়?

23. কোন সমতলে 15টি বিভিন্ন বিন্দু আছে, তন্মধ্যে 4টি নির্দিষ্ট বিন্দু ভিন্ন আর কোন তিনটি বিন্দু একরেখীয় নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া (i) কতগুলি বিভিন্ন সরলরেখা এবং (ii) কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায়?

24. গণনার জন্য 8টি ধাতুখণ্ডে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এই সংখ্যাগুলি লেখা আছে। অন্ততঃ একটি যুগ্ম ও একটি অযুগ্ম সংখ্যার ধাতুখণ্ড থাকিবে. এরূপভাবে 4টি ধাতুখণ্ড কতরকমে নির্বাচন করা যায়? [C. U. 41]

25. 22 জন লোককে কতপ্রকারে দুইটি ক্রিকেট দলে বিভক্ত করা যায়? [C. U. '50]

§ 7·20. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মোট সংখ্যা নির্ণয়।

এখানে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে নির্বাচন করা হইতেছে; উহাদের প্রত্যেক বস্তুটি লইয়া দুই প্রকার প্রক্রিয়া সম্ভব। যথা, (i) ঐ বস্তুটি নির্বাচিত হইতে পারে, অথবা (ii) উহা পরিত্যক্ত হইতে পারে।

প্রদত্ত n বস্তুর প্রত্যেকটি সম্বন্ধে ঐ দুই প্রকার প্রক্রিয়া হইবে।

অতএব, সমুদয় n বস্তুর মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা।

$= 2 \times 2 \times 2 \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত অর্থাৎ 2^n.

এই 2^n সংখ্যক প্রক্রিয়ার মধ্যে কিন্তু একটি ক্ষেত্র এরূপ আছে যাহাতে সমুদয় বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে।* কিন্তু একটি বস্তুও থাকিবে না এরূপ সমবায় হইতে পারে না। অতএব, ঐ প্রক্রিয়াটি ধরা চলিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= 2^n - 1$.

*দ্রষ্টব্য : (i) যে প্রক্রিয়ায় প্রথম বস্তুটি পরিত্যক্ত এবং যে প্রক্রিয়াটিতে দ্বিতীয় বস্তুটি পরিত্যক্ত হইয়াছে, এই দুই প্রকার প্রক্রিয়া যুক্ত হইলে সেই প্রক্রিয়ায় প্রথম ও দ্বিতীয় দুইটি বস্তুই থাকিবে না। আবার, ঐ প্রক্রিয়াটির সহিত যে প্রক্রিয়ায় তৃতীয় বস্তুটিও নাই তাহা একবার সংযুক্ত হইবে। এইভাবে অন্য সবগুলি বস্তু সম্বন্ধেই হইবে। অতএব; ঐ 2^n সংখ্যক প্রক্রিয়ার মধ্যে একটি প্রক্রিয়া আছে, যেটিতে n বস্তুর কোনটিই নাই। অতএব, ঐ প্রক্রিয়াটি গ্রাহ্য হইবে না।

(ii) n বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছানুসারে একযোগে একটি, দুইটি, তিনটি,···, n-সংখ্যক বস্তু পর্যন্ত লওয়া যাইতে পারে।

[n বস্তু হইতে একটি বস্তু একযোগে লইলে সমবায় সংখ্যা হয় $^nC_1$, একযোগে 2টি বস্তু লইলে সমবায় হয় $^nC_2 \cdots\cdots$, ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সমবায় সংখ্যা $= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n$.

অতএব, $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n = 2^n - 1$.]

§ 7·21. p+q+r+···সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে একপ্রকার অভিন্ন বস্তু p-সংখ্যক, দ্বিতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু q-সংখ্যক, তৃতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু r-সংখ্যক ইত্যাদি আছে। উহাদের যতগুলিকে ইচ্ছা একযোগে লইয়া মোট সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয়।

প্রথম প্রকারের p অভিন্ন বস্তু হইতে $(p+1)$ প্রকার নির্বাচন করা যায়; কারণ, ঐ p বস্তু হইতে আমরা একযোগে 1, 2, 3,······বা p বস্তু লইতে পারি (ইহাতে মোট p প্রকার নির্বাচন হয়), অথবা একটি প্রক্রিয়ায় উহাদের

কোনটিই না লইতে পারি। অতএব, ঐ নির্বাচনটি ধরিয়া মোট $(p+1)$ প্রকার, নির্বাচন হইবে।

অনুরূপে, q অভিন্ন বস্তু হইতে $(q+1)$ প্রকার, r অভিন্ন বস্তু হইতে $(r+1)$ প্রকার ইত্যাদি নির্বাচন হইবে।

এখন দেখ, প্রথম $(p+1)$ প্রকার নির্বাচনের প্রত্যেকটিকে দ্বিতীয় $(q+1)$ প্রকার নির্বাচনের সহিত যুক্ত করিলে p ও q বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। অনুরূপে p, q ও r বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। এইভাবে নির্বাচন সংখ্যা হইল $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$, কিন্তু ইহাদের মধ্যে এমন একটি নির্বাচন আছে যাহাতে সবগুলি বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে। ঐ নির্বাচনটি গ্রাহ্য হইবে না।

$\therefore$ মোট নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $=\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots\}-1.$

§ 7·22. (m+n) বস্তুকে কত প্রকারে এরূপ দুইভাগে বিভক্ত করা যায়, যাহাতে একভাগে m বস্তু এবং অপরভাগে n বস্তু থাকে।

$(m+n)$ বস্তু হইতে একটি ভাগে যদি m বস্তু বাছিয়া লওয়া হয়, তবে অপর ভাগে n বস্তু থাকিয়া যায়।

[অনুরূপে যদি একভাগে n বস্তু বাছিয়া লওয়া হয়, তবে অপর ভাগটিতে অপর m বস্তু পড়িয়া থাকে।]

$(m+n)$ বস্তু হইতে m বস্তু যতপ্রকারে নির্বাচন করা যায় তাহার সংখ্যা $={}^{m+n}C_m$. এক এক প্রকারে এই প্রথম ভাগটি নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে অপর n বস্তু অবশিষ্ট থাকে এবং সেই n বস্তু হইতে একযোগে n বস্তু লইয়া অপর ভাগটি নির্বাচন করা যাইবে। ঐ নির্বাচনের সংখ্যা $={}^nC_n=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $={}^{m+n}C_m\times 1$

$$=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|m+n-m}}=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$$

অনুসিদ্ধান্ত: (i) এখানে যদি $n=m$ হয়, তবে প্রত্যেক ভাগেই m বস্তু থাকায় ভাগগুলি সমান হইবে। এক্ষেত্রে পূর্বের ন্যায় প্রক্রিয়ার সংখ্যা $\frac{\underline{|m+m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}}$ হইবে না। কারণ, এখানে দুইটি ভাগেই m বস্তু থাকায় তাহারা অভিন্ন এবং ভাগগুলি (groups) অদল বদল করিলেও কোন পার্থক্য দৃষ্ট হয় না, অর্থাৎ নূতন কোন সমবায় পাওয়া যায় না। অতএব, এরূপ ক্ষেত্রে যতপ্রকার বিভাগ (sub-divisions) করা যায় তাহার সংখ্যা $\frac{\underline{|m+m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}\,\underline{|2}}=\frac{\underline{|2m}}{\{\underline{|m}\}^2\underline{|2}}$.

দ্রষ্টব্য : মনে কর A, B, C, D এই চারিটি অক্ষরকে দুই সমান ভাগে ভাগ করিতে হইবে। এখানে প্রত্যেক ভাগে দুইটি করিয়া অক্ষর থাকিবে। বিভাগগুলি নিম্নলিখিতরূপ হইবে।

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
AB	AC	AD	BC	BD	CD
CD	BD	BC	AD	AC	AB

অনুচ্ছেদ 7·22-এর সূত্র অনুসারে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}=6$টি ভাগই হইল বটে, কিন্তু ইহাদের মধ্যে (i) ও (vi) ভাগ দুইটি একই হইয়াছে। ঐরূপ (ii) ও (v) এবং (iii) ও (iv) একই হইয়াছে। সুতরাং এক্ষেত্রে মোট বিভাগের সংখ্যা $\frac{6}{2}=3$ হইয়াছে। অর্থাৎ যতগুলি ভাগ (এক্ষেত্রে 2) তাহার factorial সংখ্যক বিভাগ একই প্রকারের হয় বলিয়া 7·22 অনুচ্ছেদ অনুসারে লব্ধ ফলকে বিভাগ সংখ্যার factorial (এক্ষেত্রে $\lfloor 2$) দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উপরের দৃষ্টান্তটিতে বিভাগ সংখ্যা 2 হওয়াতে এবং 2 ও $\lfloor 2$-এর মান একই বলিয়া হয়ত ইহাও মনে হইতে পারে যে 2 দ্বারা ভাগ না করিয়া $\lfloor 2$ দ্বারা কেন ভাগ করা হইল ?

এইরূপ ক্ষেত্রে নিঃসন্দেহ হইতে হইলে A, B, C, D, E, F এই ছয়টি অক্ষরকে উপরে লিখিতভাবে 3 ভাগ কর। ইহাতে মোট বিভাগ সংখ্যা হইবে 90 ; কিন্তু উহাদের মধ্যে 6টি করিয়া ভাগ অর্থাৎ $\lfloor 3$ সংখ্যক ভাগ একই হইবে। সুতরাং বিভাগ সংখ্যা পাইতে হইলে $\lfloor 3$ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।

কিন্তু যদি দুই ব্যক্তিকে $2m$ বস্তু সমানভাগে ভাগ করিয়া দিতে হয়, তবে তাহা $\frac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}$ প্রকারে করা যাইবে।

(ii) যদি $(m+n+p)$ সংখ্যক বস্তু থাকে এবং সেইগুলিকে এরূপ তিনভাগে বিভক্ত করা হয় যাহাতে একভাগে m, একভাগে n এবং একটিতে p বস্তু থাকে, তবে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p}$.

এখানে যদি $m=n=p$ হয়, তবে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 3m}{\{\lfloor m\}^3 \lfloor 3}$.

যদি $3m$ বস্তু তিনজনকে সমভাবে ভাগ করিয়া দিতে হয়, তবে সেই প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 3m}{\{\lfloor m\}^3}$.

(iii) দলগুলির সংখ্যা যতই হউক না কেন, ঐ সিদ্ধান্তগুলি প্রযোজ্য হইবে।

§7·23. যদি বিভিন্ন ভাগে ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থাকে, অর্থাৎ একটি ভাগে m ভিন্ন বস্তু, দ্বিতীয় ভাগে n ভিন্ন বস্তু, তৃতীয় ভাগে p ভিন্ন বস্তু, ইত্যাদি থাকে এবং যদি প্রথম ভাগ হইতে r বস্তু, দ্বিতীয় ভাগ হইতে q বস্তু, তৃতীয় ভাগ হইতে t বস্তু, ইত্যাদি লইয়া নির্বাচন করা হয়, তবে মোট সমবায় সংখ্যা হইবে $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots$

প্রমাণ : প্রথম ভাগের m ভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু ^mC_r প্রকারে নির্বাচন করা যায় ; তৎপরে দ্বিতীয় ভাগের n ভিন্ন বস্তু হইতে q বস্তু ^nC_q প্রকারে নির্বাচন করা যায়। $\therefore$ উভয় প্রক্রিয়া যুক্ত হইলে অর্থাৎ একযোগে সাধিত হইলে সমবায় সংখ্যা হইবে $^mC_r \times {}^nC_q$. এই প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর তৃতীয় ভাগের p ভিন্ন বস্তু হইতে t বস্তু ^pC_t প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ তিনটি প্রক্রিয়া একযোগে অনুষ্ঠিত হইলে মোট সমবায় সংখ্যা হয় $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t$. এইভাবে যত ইচ্ছা ভাগ থাকিলে, সমবায় সংখ্যা হইবে $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots$

দ্রষ্টব্য : এরূপক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা কত হয় দেখ। প্রথম তিনটি প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর এক এক সমবায়ে $(r+q+t)$ সংখ্যক ভিন্ন বস্তু আছে। এইগুলিকে পরস্পরের মধ্যে $\underline{|r+q+t}$ প্রকারে সাজানো যায়।

অতএব, সবগুলি সমবায় হইতে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে
$^mC \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \underline{|r+q+t}.$

ভাগের সংখ্যা আরও বেশী থাকিলে সাধারণভাবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots \times \underline{|r+q+t+\cdots\cdots}$

§ 7·24. ^nC_r-এর সর্বাধিক মান : r-এর মান কত হইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক হইবে ?

আমরা দেখিয়াছি $^nC_r = \frac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}$;

অতএব, $^nC_r >, =,$ অথবা, $< {}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি $\frac{n-r+1}{r} > =$ অথবা <1 হয়,

অর্থাৎ যদি $n-r+1 > =$ অথবা $<r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $n+1 > =$ অথবা $<2r$ হয়

অর্থাৎ যদি $r < =$ অথবা $> \frac{n+1}{2}$ হয়,

এখানে r-এর মান কেবলমাত্র অখণ্ড ধনসংখ্যা হইবে।

(i) এক্ষণে যদি n জোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি ভগ্নাংশ হইবে ; কারণ, তখন $(n+1)$ বিজোড়। অতএব, এস্থলে r-এর সর্বাধিক মান $\frac{n}{2}$ হইতে পারে। কারণ, r-এর মান $\frac{n}{2}$ অপেক্ষা যদি ন্যূনপক্ষে 1 অধিক হয়, তবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ সংখ্যাটি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা অর্থাৎ $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$ অপেক্ষা বড় হইয়া যাইবে, সুতরাং $^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ^nC_r ছোট হইয়া পড়িবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r = \frac{n}{2}$ হয়। [ঐ বৃহত্তম মান ${}^nC_{\frac{n}{2}}$].

(ii) যদি n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা হইবে। অতএব, এস্থলে $r = \frac{n+1}{2}$ হইলে ${}^nC_r = {}^nC_{r-1}$ হইবে, এবং r-এর মান যদি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা ন্যূনপক্ষে 1 বেশী হয়, তবে ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইয়া পড়িবে।

অতএব, এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যদি $r = \frac{n+1}{2}$ অথবা $\frac{n-1}{2}$ হয়; কারণ, উভয়পক্ষেই একই ফল পাওয়া যাইবে।

[ঐ বৃহত্তম মান ${}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ ও ${}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$].

উদাহরণমালা 7F

উদা. 1. 5 জন বন্ধুর মধ্যে একসঙ্গে এক বা একাধিক বন্ধুকে কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করা যায়?

5 জন বন্ধুর মধ্যে একজন করিয়া, অথবা 2 জন করিয়া অথবা 3 জন বা 4 জন বা 5 জন করিয়া নিমন্ত্রণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5$

$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31.$

[**অন্য প্রণালী**] 5 জন বন্ধুর ইচ্ছামত কয়েকজনকে বা সকলকে নিমন্ত্রণ করা যায়। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 2^5 - 1 = 31.$

উদা. 2. এক ব্যক্তির 4টি 10 টাকা, 3টি 2 টাকা, ও 5টি 1 টাকার মুদ্রা আছে। সে কত প্রকারে উহা দরিদ্রদিগকে দান করিতে পারে?

এখানে 4টি 10 টাকা এক প্রকারের মুদ্রা, 2 টাকা 3টি দ্বিতীয় অন্য এক প্রকারের মুদ্রা এবং 5টি 1 টাকা তৃতীয় এক প্রকারের মুদ্রা।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= (4+1)(3+1)(5+1) - 1 = 119.$

উদা. 3. 3 জন বালকের মধ্যে 6টি কলম কত প্রকারে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়?

মনে কর, x, y, z তিনজন বালক। এখানে প্রত্যেক বালক 2টি করিয়া কলম পাইবে।

এক্ষণে, আমরা 6টি কলম হইতে x-এর জন্য 2টি কলম ${}^6C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে বাকী থাকে 4টি কলম। ঐ 4টি কলম হইতে y-এর জন্য 2টি কলম আমরা ${}^4C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। x ও y-এর জন্য নির্বাচন করার পর যে দুইটি কলম বাকী থাকে তাহা z-কে দেওয়া হইবে ${}^2C_2$ বা এক প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = \frac{6.5}{2.1} \times \frac{4.3}{2.1} \times 1 = 90.$

প্রমাণ : প্রথম ভাগের m ভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু ^mC_r প্রকারে নির্বাচন করা যায় ; তৎপরে দ্বিতীয় ভাগের n ভিন্ন বস্তু হইতে q বস্তু ^nC_q প্রকারে নির্বাচন করা যায়। $\therefore$ উভয় প্রক্রিয়া যুক্ত হইলে অর্থাৎ একযোগে সাধিত হইলে সমবায় সংখ্যা হইবে $^mC_r \times {}^nC_q$. এই প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর তৃতীয় ভাগের p ভিন্ন বস্তু হইতে t বস্তু ^pC_t প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ তিনটি প্রক্রিয়া একযোগে অনুষ্ঠিত হইলে মোট সমবায় সংখ্যা হয় $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t$. এইভাবে যত ইচ্ছা ভাগ থাকিলে, সমবায় সংখ্যা হইবে $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots$

দ্রষ্টব্য : এরূপক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা কত হয় দেখ। প্রথম তিনটি প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর এক এক সমবায়ে $(r+q+t)$ সংখ্যক ভিন্ন বস্তু আছে। এইগুলিকে পরস্পরের মধ্যে $\underline{|r+q+t}$ প্রকারে সাজানো যায়।

অতএব, সবগুলি সমবায় হইতে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে
$^mC \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \underline{|r+q+t}.$

ভাগের সংখ্যা আরও বেশী থাকিলে সাধারণভাবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় $^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots \times \underline{|r+q+t+\cdots\cdots}$

§ 7·24. ^nC_r-এর সর্বাধিক মান : r-এর মান কত হইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক হইবে?

আমরা দেখিয়াছি $^nC_r = \frac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}$;

অতএব, $^nC_r >, =$, অথবা, $< {}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি $\frac{n-r+1}{r} > =$ অথবা < 1 হয়,

অর্থাৎ যদি $n-r+1 > =$ অথবা $< r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $n+1 > =$ অথবা $< 2r$ হয়

অর্থাৎ যদি $r < =$ অথবা $> \frac{n+1}{2}$ হয়,

এখানে r-এর মান কেবলমাত্র অখণ্ড ধনসংখ্যা হইবে।

(i) এক্ষণে যদি n জোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি ভগ্নাংশ হইবে; কারণ, তখন $(n+1)$ বিজোড়। অতএব, এস্থলে r-এর সর্বাধিক মান $\frac{n}{2}$ হইতে পারে। কারণ, r-এর মান $\frac{n}{2}$ অপেক্ষা যদি ন্যূনপক্ষে 1 অধিক হয়, তবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ সংখ্যাটি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা অর্থাৎ $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$ অপেক্ষা বড় হইয়া যাইবে, সুতরাং $^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ^nC_r ছোট হইয়া পড়িবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{n}{2}$ হয়। [ঐ বৃহত্তম মান ${}^nC_{\frac{n}{2}}$].

(ii) যদি n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা হইবে। অতএব, এস্থলে $r=\frac{n+1}{2}$ হইলে ${}^nC_r={}^nC_{r-1}$ হইবে, এবং r-এর মান যদি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা ন্যূনপক্ষে 1 বেশী হয়, তবে ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইয়া পড়িবে।

অতএব, এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যদি $r=\frac{n+1}{2}$ অথবা $\frac{n-1}{2}$ হয়; কারণ, উভয়পক্ষেই একই ফল পাওয়া যাইবে।

[ঐ বৃহত্তম মান ${}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ ও ${}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$].

উদাহরণমালা 7F

উদা. 1. 5 জন বন্ধুর মধ্যে একসঙ্গে এক বা একাধিক বন্ধুকে কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করা যায়?

5 জন বন্ধুর মধ্যে একজন করিয়া, অথবা 2 জন করিয়া অথবা 3 জন বা 4 জন বা 5 জন করিয়া নিমন্ত্রণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $={}^5C_1+{}^5C_2+{}^5C_3+{}^5C_4+{}^5C_5$
$=5+10+10+5+1=31.$

[অন্য প্রণালী] 5 জন বন্ধুর ইচ্ছামত কয়েকজনকে বা সকলকে নিমন্ত্রণ করা যায়। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=2^5-1=31.$

উদা. 2. এক ব্যক্তির 4টি 10 টাকা, 3টি 2 টাকা, ও 5টি 1 টাকার মুদ্রা আছে। সে কত প্রকারে উহা দরিদ্রভাণ্ডারে দান করিতে পারে?

এখানে 4টি 10 টাকা এক প্রকারের মুদ্রা, 2 টাকা 3টি দ্বিতীয় অন্য এক প্রকারের মুদ্রা এবং 5টি 1 টাকা তৃতীয় এক প্রকারের মুদ্রা।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=(4+1)(3+1)(5+1)-1=119.$

উদা. 3. 3 জন বালকের মধ্যে 6টি কলম কত প্রকারে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়?

মনে কর, x, y, z তিনজন বালক। এখানে প্রত্যেক বালক 2টি করিয়া কলম পাইবে।

এক্ষণে, আমরা 6টি কলম হইতে x-এর জন্য 2টি কলম ${}^6C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে বাকী থাকে 4টি কলম। ঐ 4টি কলম হইতে y-এর জন্য 2টি কলম আমরা ${}^4C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। x ও y-এর জন্য নির্বাচন করার পর যে দুইটি কলম বাকী থাকে তাহা zকে দেওয়া হইবে ${}^2C_2$ বা এক প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $={}^6C_2\times{}^4C_2\times{}^2C_2=\frac{6.5}{2.1}\times\frac{4.3}{2.1}\times 1=90.$

উদা. 4. 12টি বস্তুকে কত রকমে যথাক্রমে 3, 4 ও 5টি বস্তুবিশিষ্ট বিভাগে ভাগ করা যায় ?

12টি বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া $^{12}C_3$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। 3টি বস্তুর নির্বাচন হইলে বাকী থাকে 9টি বস্তু ; ঐগুলি হইতে 4টি করিয়া নির্বাচন করা যায় $^9C_4$ প্রকারে। এই নির্বাচনের পর অবশিষ্ট থাকে 5টি বস্তু, সুতরাং 5টি বস্তু হইতে 5টি করিয়া বস্তু লইয়া নির্বাচন করা যায় $^5C_5$ প্রকারে।

অতএব নির্ণেয় বিভাগ সংখ্যা $= {}^{12}C_3 \times {}^9C_4 \times {}^5C_5$

$$= \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times1 = 27720.$$

[সংক্ষেপে সূত্র অনুসারে, নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{\lfloor 12}{\lfloor 3 \lfloor 4 \lfloor 5} = 27720.$]

উদা. 5. 1155-এর মধ্যে কত প্রকার বিভিন্ন উৎপাদক আছে।

1155-এর 3, 5, 7, 11 এই চারিটি মৌলিক উৎপাদক। এই চারিটি উৎপাদকের প্রত্যেকটি সম্বন্ধে দুইটি প্রক্রিয়া হইবে (উহাকে লওয়া অথবা না লওয়া)। আর, এই চারিটি উৎপাদকের মধ্যে একযোগে এক বা একাধিক উৎপাদক লওয়া যাইবে। কারণ, ঐ মৌলিক উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটি এবং উহাদের একাধিকের গুণফলগুলিও প্রদত্ত সংখ্যাটির উৎপাদক।

$\therefore$ যে ক্ষেত্রে ঐ চারিটি উৎপাদকের কোনটিই থাকিবে না সেই ক্ষেত্রটি ত্যাগ করিয়া মোট নির্ণেয় উৎপাদক সংখ্যা $= 2^4 - 1 = 15.$

[অন্য প্রকারে] ঐ চারিটি মৌলিক উৎপাদকের একটিকে বা একাধিককে যত বিভিন্ন প্রকারে নির্বাচন করা যায় সংখ্যাটির ততগুলি উৎপাদক হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক সংখ্যা $= {}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4 = 15.$

উদা. 6. একটি দলে 15 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট আছে। উহাদের মধ্য হইতে 12 জন বালককে কত রকমে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে প্রতি নির্বাচনে (i) ঠিক 6 জন স্কাউট থাকে, (ii) অন্ততঃ 6 জন স্কাউট থাকে।

[C. U. '43]

এখানে 15 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট এবং 8 জন অপর বালক আছে।

(i) প্রথম পক্ষে 6 জন স্কাউটকে লইতে হইবে, সুতরাং বাকি 6 জন অন্য বালক লইলে মোট 12 জন হইবে। 7 জন স্কাউট হইতে 6 জন করিয়া লইলে সমবায় সংখ্যা হইবে $^7C_6$, এবং 8 জন অন্য বালক হইতে 6 জন করিয়া লইলে সমবায় সংখ্যা হইবে $^8C_6$.

$\therefore$ মোট নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^7C_6 \times {}^8C_6 = {}^7C_1 \times {}^8C_2$

$$= 7 \times \frac{8\times7}{2\times1} = 196$$

(ii) দ্বিতীয় পক্ষে স্কাউটের সংখ্যা 6 জনের কম হইবে না।

অতএব, এক্ষেত্রে (*a*) হয় 6টি স্কাউট ও 6টি অন্য বালক, অথবা (*b*) 7টি স্কাউট ও 5টি অন্য বালক এইভাবে নির্বাচন হওয়া সম্ভব।

(*a*) 7 জন স্কাউটের মধ্যে 6টি স্কাউট $^7C_6$ প্রকারে এবং 8 জন অপর বালকের মধ্যে 6 জন $^8C_6$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

(*b*) 7 জন স্কাউটের মধ্যে 7টি স্কাউট $^7C_7$ প্রকারে এবং 8 জন অপর বালকের মধ্যে 5 জন $^8C_5$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ মোট নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^7C_6 \times {}^8C_6 + {}^7C_7 \times {}^8C_5$

$= {}^7C_1 \times {}^8C_2 + {}^7C_7 \times {}^8C_3 = 7 \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} + 1 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$

$= 196 + 56 = 252.$

উদা. 7. দুইটি বিভাগের প্রত্যেকটিতে 7টি করিয়া প্রশ্ন আছে। একটি বালককে 8টি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে, কিন্তু কোন বিভাগ হইতে 5টির অধিক প্রশ্নের উত্তর করা যাইবে না। সে কত বিভিন্ন প্রকারে উত্তরের জন্য প্রশ্নগুলি নির্বাচন করিতে পারিবে ?

মনে কর, G_1 ও G_2 এই দুইটি বিভাগের (group) প্রত্যেকটিতে 7টি প্রশ্ন আছে। বালকটিকে মোট 8টি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে এবং কোন বিভাগ হইতে 5টির অধিক প্রশ্নের উত্তর করা চলিবে না।

অতএব, বালকটি (1) G_1 বিভাগ হইতে 3টি ও G_2 বিভাগ হইতে 5টি, অথবা (2) G_1 হইতে 4টি ও G_2 হইতে 4টি, অথবা (3) G_1 হইতে 5টি ও G_2 হইতে 3টি, কেবল এইভাবে প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে।

(1) হইতে নির্বাচন সংখ্যা $= {}^7C_3 \times {}^7C_5 = {}^7C_3 \times {}^7C_2$

$= \frac{7.6.5}{3.2.1} \times \frac{7.6}{2.1} = 735,$

(2) " " $= {}^7C_4 \times {}^7C_4 = {}^7C_3 \times {}^7C_3$

$= \frac{7.6.5}{3.2.1} \times \frac{7.6.5}{3.2.1} = 1225,$

(3) " " " $= {}^7C_5 \times {}^7C_3 = 735.$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট নির্বাচন সংখ্যা $= 735 + 1225 + 735 = 2695.$

উদা. 8. 8 জন মাঝির মধ্যে 2 জন নৌকার কেবল stroke side-এ এবং 1 জন কেবল bow side-এ কাজ করিতে পারে। উহাদিগকে দুইধারে সমভাবে কত প্রকারে সাজান যাইবে ?

মনে কর, *x* ও *y* নামক দুইজন মাঝি কেবল stroke side-এ এবং *z* নামক মাঝি কেবল bow side-এ কাজ করিতে পারে, সুতরাং বাকী 5 জন মাঝি উভয়দিকেই কাজ করিতে পারে।

এক্ষেত্রে প্রত্যেক দিকে 4 জন করিয়া মাঝি থাকিতে হইবে। অতএব, যে পার্শ্বে x ও y আছে তাহাদের দিকে দুইদিকেই কার্যক্ষম 5 জনের যে কোন 2 জনকে দিতে হইবে। ইহা করা যায় $^5C_2$ অর্থাৎ 10 প্রকারে। এই 10 প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারের পক্ষে x ও y-এর দিকে যে 4 জন মাঝি হইল তাহাদিগকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|4}$ প্রকারে সাজানো যায়। অনুরূপে অপর পার্শ্বের 4 জনকে $\underline{|4}$ প্রকারেও সাজানো যায়। অতএব, এক পার্শ্বের প্রত্যেক প্রকারের সহিত অপর পার্শ্বের প্রত্যেক প্রকার সংযুক্ত করিলে মাঝিদিগকে মোট $\underline{|4} \times \underline{|4}$ প্রকারে সাজান যাইবে।

অতএব, পূর্বোক্ত 10 প্রকারের পক্ষে অর্থাৎ মোটের উপর $10 \times \underline{|4} \times \underline{|4}$ প্রকারে অর্থাৎ 5760 প্রকারে মাঝিদিগকে সাজান যাইবে।

উদা. 9. *Successive* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া অক্ষর (a) কত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, (b) কত প্রকারে বিন্যাস করা যায়?

(a) প্রদত্ত শব্দটিতে 6 প্রকারের 10টি অক্ষর আছে; যথা (s, s, s), (c, c), (e, e), u, v, i.

চারিটি করিয়া অক্ষর লইয়া নির্বাচনের জন্য উহাদিগকে 4 শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়। যথা—

(1) তিনটি অক্ষর একই প্রকার, একটি ভিন্ন প্রকার,

(2) দুইটি একই প্রকার অক্ষর, দুইটি অন্য একই প্রকার অক্ষর,

(3) দুইটি একই প্রকার অক্ষর, অপর দুইটি বিভিন্ন অক্ষর,

(4) চারিটি অক্ষরই বিভিন্ন প্রকার।

এক্ষণে, (1) প্রথম পক্ষে 5টি নির্বাচন হইতে পারে। কারণ, এস্থলে c, i, u, v, e এই 5টি ভিন্ন অক্ষরের যে কোন একটির সহিত তিনটি একই প্রকার অক্ষর s লইয়া 4 অক্ষরের নির্বাচন হইতে পারে।

$\therefore$ এই নির্বাচন সংখ্যা $= 5$.

(2) দ্বিতীয় পক্ষে, (s, s), (c, c) ও (e, e) এই তিন জোড়া অক্ষর হইতে একযোগে দুই জোড়া নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ এই নির্বাচন সংখ্যা $= {}^3C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$.

(3) তৃতীয় পক্ষে, তিন জোড়া অক্ষরের মধ্যে এক জোড়া এবং অবশিষ্ট 5 প্রকার বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে যে কোন বিভিন্ন 2টি অক্ষর লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে। $\therefore$ এই নির্বাচন সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_2 = 3 \times \frac{5.4}{2.1} = 30$.

(4) চতুর্থ পক্ষে s, c, i, u, v, e এই ছয়টি বিভিন্ন অক্ষর হইতে যে কোন 4টি লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ এই নির্বাচন সংখ্যা $= {}^6C_4 = {}^6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.

$\therefore$ মোট নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= 5 + 3 + 30 + 15 = 53$.

(b) আবার, মোট বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উপরের 4 শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 4টি অক্ষরকে যত প্রকারে সম্ভব বিন্যস্ত করিতে হইবে।

অতএব, (1) হইতে বিন্যাস সংখ্যা $=5\times\frac{\lfloor 4}{\lfloor 3}=20$,

(2) „ „ „ $=3\times\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\lfloor 2}=18$.

[∵ এক্ষেত্রে 4 অক্ষরের মধ্যে 2টি একরূপ ও অন্য 2টি একরূপ],

(3) হইতে বিন্যাস সংখ্যা $=30\times\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}=360$,

(4) „ „ „ $=15\times\lfloor 4=360$.

∴ মোট নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=20+18+360+360=758$.

উদা. 10. forecast এবং milky এই শব্দদ্বয়ের অক্ষরগুলি হইতে কতগুলি 5 অক্ষরের বিভিন্ন বিন্যাস করা যাইবে, যদি প্রতি বিন্যাসে প্রথম শব্দটি হইতে 3টি অক্ষর এবং দ্বিতীয় শব্দটি হইতে 2টি অক্ষর লওয়া হয়। [H.S. 1976]

forecast ও milky শব্দ দুইটিতে যথাক্রমে 8টি ও 5টি অক্ষর এবং এই 13টি অক্ষর পরস্পর বিভিন্ন। forecast শব্দের 8টি অক্ষর হইতে 3টি, $^8C_3$ প্রকারে এবং milky শব্দের 5টি অক্ষর হইতে 2টি, $^5C_2$ প্রকারে লওয়া যায়। সুতরাং শব্দ দুইটি হইতে যথাক্রমে 3টি ও 2টি অক্ষর মোট 5টি অক্ষর $^8C_3\times{}^5C_2$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। এক্ষণে এই সকল নির্বাচনের প্রত্যেকটির অক্ষর 5টিকে $\lfloor 5$ প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়।

সুতরাং $^8C_3\times{}^5C_2$ নির্বাচনের জন্য মোট বিন্যাস সংখ্যা $^8C_3\times{}^5C_2\times\lfloor 5$

$$=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 5\lfloor 3}\times\frac{\lfloor 5}{\lfloor 3\lfloor 2}\times 120=\frac{8.7.6\lfloor 5}{\lfloor 5.6}\times\frac{5.4\lfloor 3}{\lfloor 3.2}\times 120$$

$=56\times 10\times 120=67200$.

উদা. 11 কোন হাসপাতালে 8টি শয্যা আছে, উহাদের মধ্যে পুরুষদের জন্য 4টি ও মহিলাদের জন্য 3টি ও বাকীটি পুরুষ বা মহিলা রোগীর জন্য সংরক্ষিত। যদি 10 জন পুরুষ ও 8 জন মহিলা রোগী ভর্তি হইতে চায়, তবে কত রকমে রোগী ভর্তি করা যাইবে ?

4টি সংরক্ষিত আসনে 10 জন পুরুষের মধ্যে 4 জনকে $^{10}C_4$ প্রকারে এবং 3টি সংরক্ষিত আসনে 8 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে 3 জনকে $^8C_3$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

সুতরাং 7টি শয্যার জন্য নির্বাচন $^{10}C_4\times{}^8C_3$ প্রকারে করা যায়।

এখানে অবশিষ্ট শয্যাটিতে বাকী 11 জনের মধ্য হইতে 1 জনকে $^{11}C_1=11$ প্রকারে ভর্তি করা যাইবে।

সুতরাং মোট $^{10}C_4\times{}^8C_3\times 11=129360$ প্রকারে রোগী ভর্তি করা যাইবে।

উদা. 12. 5টি বিভিন্ন সবুজ রংয়ের বস্তু, 4টি বিভিন্ন নীল রংয়ের বস্তু ও 3টি বিভিন্ন লাল রংয়ের বস্তুর মধ্যে অন্ততঃ একটি সবুজ রংয়ের ও একটি নীল রংয়ের বস্তু লইয়া মোট কয়টি সমবায় হইতে পারে ? [I. I. T. 1974]

প্রদত্ত বস্তুগুলির প্রত্যেক বস্তুটি লইয়া দুই প্রকার প্রক্রিয়া সম্ভব। যথা (i) ঐ বস্তুটি নির্বাচিত হইতে পারে, অথবা (ii) উহা পরিত্যক্ত হইতে পারে। অতএব 5টি সবুজ রংয়ের বস্তু সম্বন্ধে মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা 2^5. ইহার মধ্যে একটি প্রক্রিয়ায় কোন সবুজ রংয়ের বস্তুই লওয়া হইবে না। যেহেতু, অন্ততঃ একটি সবুজ রংয়ের বস্তু লইতে হইবে, সুতরাং সবুজ বস্তুগুলির মোট সম্ভাব্য সমবায় সংখ্যা 2^5-1. অনুরূপে নীল রংয়ের বস্তুগুলির মোট সম্ভাব্য সমবায় সংখ্যা 2^4-1. আবার লাল রংয়ের বস্তুগুলির মোট সমবায় সংখ্যা 2^3 (কারণ, কোন লাল রংয়ের বস্তু না লওয়া যাইতে পারে)। সুতরাং বিভিন্ন রংয়ের বস্তুগুলির মোট সম্ভাব্য সমবায় সংখ্যা

$$(2^5-1)(2^4-1).2^3=31.15.8=3720.$$

উদা. 13. পাঁচটি একই আকারের বলকে দশটি একই আকারের বাক্সে কয়প্রকারে রাখা যাইবে ? (একটি বাক্সে একাধিক বল রাখা যাইবে না।)
[Joint Entrance Test I. I. T. 1973]

যেহেতু বলগুলির একই আকার এবং বাক্সগুলিও একই আকারের, প্রশ্নটি সমবায় ঘটিত। এখানে, পাঁচটি বল দশটি বাক্সের পাঁচটি বিভিন্ন বাক্সে রাখার জন্য দশটি বাক্স হইতে পাঁচটি বাক্স নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{10}C_5=\dfrac{\underline{|10}}{\underline{|5}\,\underline{|5}}=\dfrac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}=252.$

উদা. 14. দশজন পরীক্ষার্থী $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{10}$ কয়প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে, যদি (i) A_1 ও A_2 সর্বদা পর পর স্থান অধিকার করে, (ii) A_1 সর্বদা A_2 অপেক্ষা উচ্চতর স্থান অধিকার করে ?

(i) মনে কর A_1 ও A_2 একজন প্রার্থী A ; সুতরাং এখন 9 জন প্রার্থী হইল। সুতরাং এখন 9 জন প্রার্থী $\underline{|9}=362880$ প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে। কিন্তু এই সকল বিভিন্ন প্রকারের প্রত্যেকটি প্রকারের জন্য A_1 ও A_2 পর পর থাকিলেও, তাহারা নিজেদের মধ্যে $\underline{|2}$ বা 2 প্রকারে বিন্যস্ত হইবে। সুতরাং মোট $362880\times2=725760$ প্রকারে $A_1, A_2, A_3 \cdots A_{10}$ স্থানাধিকার করিতে পারে।

(ii) মনে কর A_1 প্রথম স্থান অধিকার করে। সুতরাং বাকী 9 জন পরের 9টি স্থানে $\underline{|9}$ প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে।

এইবার মনে কর A_1 দ্বিতীয় স্থানাধিকার করে। সুতরাং বাকী 9 জন পূর্বের ন্যায় বাকী 9টি স্থান $\underline{|9}$ প্রকারে অধিকার করিতে পারে। কিন্তু এইক্ষেত্রে কয়েকটি বিন্যাসে A_2 প্রথম স্থানে আসে।

যেহেতু A_1 সর্বদা A_2 হইতে উচ্চতর স্থান অধিকার করে, সুতরাং এই সকল সম্ভাবনা ধরা চলিবে না। এই সকল সম্ভাবনার সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য মনে কর A_2 ও A_1 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান অধিকার করে। সুতরাং বাকী 8টি স্থান বাকী 8 জন $\lfloor\underline{8}$ প্রকারে অধিকার করিবে। সুতরাং যখন A_1 দ্বিতীয় স্থান অধিকার করে, তখন দশজনে $(\lfloor\underline{9}-\lfloor\underline{8})$ প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে।

এইবার মনে কর A_1 তৃতীয় স্থান অধিকার করে। এইক্ষেত্রে A_2 প্রথম বা দ্বিতীয় স্থান অধিকার করিবে না। সুতরাং এইক্ষেত্রে দশজন $\lfloor\underline{9}-2\lfloor\underline{8}$ প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে।

অনুরূপে A_1 যখন চতুর্থ, পঞ্চম,…নবম স্থান (A_1 দশম স্থান অধিকার করিতে পারে না) অধিকার করিবে তখন দশজনে যথাক্রমে

$\lfloor\underline{9}-3\lfloor\underline{8}, \lfloor\underline{9}-4\lfloor\underline{8}, \ldots\ldots, \lfloor\underline{9}-8\lfloor\underline{8}$ প্রকারে স্থানাধিকার করিতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=\lfloor\underline{9}+\lfloor\underline{9}-\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}-2\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}-3\lfloor\underline{8}$

$$+\lfloor\underline{9}-4\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}-5\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}-6\lfloor\underline{8}$$
$$+\lfloor\underline{9}-7\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}-8\lfloor\underline{8}$$
$$=9\lfloor\underline{9}-(1+2+3+4+5+6+7+8)\lfloor\underline{9}$$
$$=9.9\lfloor\underline{8}-36\lfloor\underline{8}=(81-36)\lfloor\underline{8}$$
$$=45\times 40320=1814400.$$

প্রশ্নমালা 7F

1. n সংখ্যক শূন্যস্থ বিন্দুর কোন 3টি বিন্দু একরেখীয় নহে এবং কোন 4টি বিন্দু একতলীয় নহে। n-এর মান কত হইলে ঐ বিন্দুগুলির সংযোগে সরলরেখার সংখ্যা সমতলগুলির সংখ্যার সমান হইবে?

2. আটজন রোগীর মধ্যে এক বা একাধিক রোগীকে কত প্রকারে হাসপাতালে পাঠান যায়?

3. কত প্রকারে 12টি বস্তুকে 4 জনের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়? [P. U. '46]

4. p-সংখ্যক যোগচিহ্ন ও n-সংখ্যক বিয়োগ চিহ্নকে এক সারিতে কত প্রকারে স্থাপন করা যায়, যাহাতে কোন দুইটি বিয়োগ চিহ্ন পাশাপাশি না থাকে? দেওয়া আছে $p+1 \geqslant n$,

5. 2310 সংখ্যাটির কতগুলি বিভিন্ন উৎপাদক হইতে পারে?

6. আমি 8 জন বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করিয়া 4 জনকে একটি গোলটেবিলে ও 4 জনকে অন্য একটি গোলটেবিলে বসাইলে কত রকমে তাহাদিগকে বসাইতে পারিব?

7. 7 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা দুইটি শূন্য আসনের জন্য নির্বাচনপ্রার্থী। একজন ভোটদাতা যতগুলি আসন শূন্য তাহার অনধিক যতজনকে ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন। তিনি কত প্রকারে ভোট দিতে পারিবেন? [P. U. '43]

8. যদি $4n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সমবায় সংখ্যা ও $2n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সমবায় সংখ্যার অনুপাত 257 : 1 হয়, তবে n-এর মান কত?

9. প্রমাণ কর যে, ${}^{2p}C_q$-এর চরম মান ও ${}^{2p-1}C_q$-এর চরম মানের অনুপাত 2 : 1 হইবে।

10. 68টি খেলার টিকিটকে কত প্রকারে (i) 17টি করিয়া 4টি বিভাগে ভাগ করা যায়, (ii) 4 জন খেলোয়াড়কে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়?

11. 9টি বস্তুকে যথাক্রমে 2, 3, 4 বস্তুবিশিষ্ট তিনটি বিভাগে কত প্রকারে বিভক্ত করা যায়?

12. 12টি বিভিন্ন বস্তুকে 3 বস্তুযুক্ত চারিটি বিভাগে কত রকমে বিভক্ত করা যায়?

13. '*impression*' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া অক্ষর লইয়া কতগুলি (i) সমবায়, (ii) কতগুলি বিন্যাস হইবে?

14. একটি নৌকার 12 জন মাঝির মধ্যে 4 জন নৌকার কেবল এক পার্শে ও 2 জন কেবল অপর পার্শ্বে দাঁড় টানিতে পারে। কত প্রকারে ঐ মাঝিদিগকে সমভাবে দুই পার্শ্বে সাজান যাইবে?

15. প্রমাণ কর যে $({}^{2n}n)(={}^{2n}C_n)$-এ একটি নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকিবে এরূপ সমবায়ের সংখ্যা এবং একটি নির্দিষ্ট বস্তু কখন থাকিবে না এরূপ সমবায় সংখ্যা সমান হয়।

16. *alliteration* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া অক্ষর কত রকমে (i) নির্বাচন করা যায় এবং (ii) সাজান যায়? [C. U. 1887]

17. প্রমাণ কর যে 'daddy did a deadly deed'-এর অন্তর্গত অক্ষরগুলি হইতে মোট 1919 সংখ্যক নির্বাচন করা যায়। [B. U. '10]

18. আটটি প্রশ্ন ও প্রত্যেকটির একটি করিয়া বিকল্প প্রশ্ন আছে। প্রমাণ কর যে এক বা ততোধিক প্রশ্ন মোট (3^8-1) প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

[C. U. 1928]

19. কোন নির্বাচনে তিনটি জেলায় যথাক্রমে 12, 16 ও 23 জন প্রচারক পাঠাইতে হইবে। যদি 51 জন প্রচারক থাকে, তবে কত রকমে তাহাদিগকে বিভিন্ন জেলায় পাঠান যাইবে?

20. নবম শ্রেণীর 4 জন, দশম শ্রেণীর 3 জন ও একাদশ শ্রেণীর 2 জন ছাত্র আছে। কোন সমবায়ে একই শ্রেণীর দুইজন ছাত্র থাকিবে না এরূপ ভাবে উহাদিগকে কত রকমে নির্বাচন করা যায়?

21. pr সংখ্যক বস্তুকে কত বিভিন্ন রকমে r-সংখ্যক সমান দলে বিভক্ত করা যায়?

22. 3টি আম, 4টি লেবু ও 2টি আপেল আছে। প্রত্যেক রকম ফলের অন্ততঃ একটি থাকিবে এরূপে কতগুলি ফল-সমবায় করা যায়। (এক্ষেত্রে একই প্রকার ফলগুলির আকার বিভিন্ন।)

23. দুইটি বালকের মধ্যে 5টি দ্রব্য কত প্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়?

24. 18 জন নিমন্ত্রিত ব্যক্তিকে একটি লম্বা টেবিলের দুই পার্শ্বে বসান হইবে, প্রত্যেক পার্শ্বে 9টি করিয়া চেয়ার আছে। উহাদের মধ্যে 5 জন একটি নির্দিষ্ট পার্শ্বে এবং 3 জন অপর পার্শ্বটিতে বসিতে চান: কত প্রকারে তাঁহাদিগকে বসান যাইবে?

§ 7·25. বিন্যাস ও সমবায় সম্পর্কিত প্রশ্নের সমাধান সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় সতর্কতা :

বিন্যাস ও সমবায় সম্পর্কিত বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধানে সর্বদা বিন্যাস ও সমবায়ের মূলনীতির উল্লেখ করিতে হইবে। অর্থাৎ, যদি কোন প্রকার কার্য m প্রকারে করা গেলে এবং অপর একপ্রকার কার্য n প্রকারে করা গেলে, উভয় প্রকার কাজ যে mn প্রকারে করা যায়, তাহার কারণ ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। এইক্ষেত্রে বলিতে হইবে যে প্রথম কার্যটি করিবার m প্রকারের প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় প্রকার কার্য যেহেতু n প্রকারে করা যায়, সুতরাং প্রথম প্রকার কার্য করিবার m প্রকারের জন্য উভয় প্রকার কার্য একত্রে mn বিভিন্ন প্রকারে করা যায়। বর্তমান অধ্যায়ে বিন্যাসও সমবায় সম্পর্কিত বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধানে অনেক ক্ষেত্রেই এইরূপ ব্যাখ্যা করা হয় নাই, কিন্তু তোমরা সর্বদা এই কারণ ব্যাখ্যা করিবে।

অষ্টম অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

§ 8·1. তোমরা জান $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

এবং $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে যে-কোন দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ বা ঘন নির্ণয় করা যায়। দুইটি রাশির যোগফলকে একটি **দ্বিপদ রাশি** বলে।

$a+b$, $2x+3y$, a^2-x^3 ইত্যাদি দ্বিপদ রাশির উদাহরণ। $a+b+c$, $2x-4y+z$ ত্রিপদ রাশির উদাহরণ।

$a^2+2ab+b^2$ ও $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ যথাক্রমে $(a+b)^2$ বা $(a+b)^3$-এর **বিস্তৃতি বা বিস্তার** (Expansion)। এক্ষণে $(a+b)^4$, $(2x+3y)^5$ বা $(1+x)^{100}$-এর বিস্তার কি হইবে ? $(a+b)^2$ বা $(a+b)^3$-এর বিস্তার গুণ করিয়া নির্ণয় করা হয়। কিন্তু $(1+x)^{100}$ বা সূচক যখন আরও অধিক, তখন বারবার গুণ করিয়া উহার বিস্তার নির্ণয় করা সময় সাপেক্ষ এবং বাস্তব ক্ষেত্রে সম্ভব নহে। সেজন্য কোন দ্বিপদ রাশির যে- কোন ঘাতের বিস্তৃতি নির্ণয়ের জন্য একটি সাধারণ সূত্র প্রয়োজন। Sir Issac Newton কোন দ্বিপদ রাশির যে-কোন ধনাত্মক ঘাতের বিস্তার নির্ণয়ের একটি সাধারণ সূত্র আবিষ্কার করেন। এই সূত্রকেই **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial Theorem) বলে।

§ 8·7. ধনাত্মক অখণ্ড সূচক পক্ষে দ্বিপদ উপপাদ্য।

(Binomial Theorem for a positive Integral Index)

n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $(a+x)^n$এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}a^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-r}x^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n\cdots\cdots(2)$$

প্রমাণ। আমরা জানি $(a+x)^n=(a+x)(a+x)$ n-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

ডানপক্ষের n সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেক পদটি পাওয়া যাইবে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে এক একটি অক্ষর লইয়া এবং সেই n-সংখ্যক

অক্ষর গুণ করিয়া, সুতরাং প্রত্যেকটি পদ n-মাত্রিক হইবে অর্থাৎ প্রত্যেক পদে a ও x-এর ঘাতের সমষ্টি n হইবে।

প্রথম পদে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে কেবল a লইয়া (x লওয়া হইল না), n-সংখ্যক a হইল। উহাদের গুণফল হইল a^n, সুতরাং প্রথম পদ হইল a^n.

অনুরূপে শেষ পদে n-সংখ্যক উৎপাদক হইতে কেবল x অক্ষরগুলি লওয়া হইল (সুতরাং একটিও a লওয়া হয় নাই)। n সংখ্যক x-এর গুণফল হয় x^n. সুতরাং শেষ পদ হইল x^n.

দ্বিতীয় পদও মোট n-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল হইবে।

এখন দ্বিতীয় পদে a একবার কমাইয়া লইয়া $(n-1)$ সংখ্যক a লওয়া হইল। ইহাতে a-র ঘাত হইল a^{n-1}, ইহার সহিত n-সংখ্যক x হইতে একটি করিয়া x লইতে হইবে। এই নির্বাচন যত প্রকারে করা যায় তাহাই হইবে দ্বিতীয় পদের সহগ। $\therefore$ দ্বিতীয় পদের সহগ হইল ${}^nC_1$ বা n, সুতরাং দ্বিতীয় পদটি হইল ${}^nC_1a^{n-1}x$ বা $na^{n-1}x$.

তৃতীয় পদে a-র আরও একটি কমাইয়া $(n-2)$-সংখ্যক a লওয়া হইল, সুতরাং মোট অক্ষরসংখ্যা n করিবার জন্য n-সংখ্যক x হইতে যত প্রকারে সম্ভব দুইটি করিয়া x লইতে হইবে। এই নির্বাচন করা যায় ${}^nC_2$ বা $\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}$ প্রকারে। $\therefore$ তৃতীয় পদ হইল ${}^nC_2a^{n-2}x^2$ বা $\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}.x^2$.

এইভাবে দেখা যায়, যে-কোন একটি সাধারণ পদে যদি $(n-r)$-সংখ্যক a লওয়া যায়, তবে তাহার সহিত r-সংখ্যক x লইলে তবে n সংখ্যক অক্ষর হইবে। n সংখ্যক x হইতে একযোগে r-সংখ্যক x নির্বাচন করা যায় ${}^nC_r$ প্রকারে।

অতএব, যে-কোন সাধারণ পদের আকার হইল ${}^nC_ra^{n-r}x^r$.

অতএব, সাধারণ পদে r-এর মান পর পর 0, 1, 2, 3,……, n পর্যন্ত বসাইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পর পর পদগুলি পাওয়া যাইবে।

অতএব প্রমাণিত হইল যে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n$$

$$[\because\ {}^nC_0={}^nC_n=1]$$

অথবা,

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (1) উপরের প্রমাণিত ডানপক্ষের শ্রেণীকে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি (expansion) বলা হয়।

(2) ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots, {}^nC_r \cdots, {}^nC_n$ ঐ বিস্তৃতির পদগুলির সহগ। এই সহগগুলিকে **দ্বিপদ সহগ** বা Binomial Coefficients বলা হয়।

(3) সূত্র-(1) হইতে বুঝা গেল যে, ঐ বিস্তৃতি সসীম এবং উহাতে পদসংখ্যা $(n+1)$, অর্থাৎ $(a+x)$-এর সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক।

(4) প্রত্যেক পদে a ও x-এর সূচকদ্বয়ের সমষ্টি n এবং প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদটির ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম [অর্থাৎ প্রথম পদে x-এর সূচক $(1-1)$ বা 0, দ্বিতীয় পদে x-এর সূচক $(2-1)$ বা 1, ইত্যাদি।] আবার, প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদের C-এর suffix-এর সমান।

(5) সূত্র-(2) হইতে দেখা যায় যে, প্রত্যেক পদে সহগের লব ও হরে উৎপাদক সংখ্যা ঐ পদের ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

দ্বিপদ উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ :—

(আরোহ প্রণালীতে বা Method of Induction-এ প্রমাণ)

আমরা গুণ করিয়া পাই,

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1 ax + x^2$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1 a^2x + {}^3C_2 ax^2 + x^3.$$

অতএব, দেখা যাইতেছে, $n=2$ এবং 3 হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

এখন ধরা যাউক যে, n-এর কোন একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড মানে (মনে কর, $n=m$ হইলে) উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, অর্থাৎ ধরা যাউক যে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1 a^{m-1}x + {}^mC_2 a^{m-2}x^2 + \cdots + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots + x^m \cdots \cdots (1)$$

(1)-এর উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)\{a^m + {}^mC_1 a^{m-1}x + \cdots + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots + x^m\}$$

$$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + 1)a^m x + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + \cdots + ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

এক্ষণে, $\because\ {}^mC_1 + 1 = m+1 = {}^{m+1}C_1,$

এবং সাধারণভাবে ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r,$

$$\therefore\ (a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1 a^m x + {}^{m+1}C_2 a^{m-1}x^2 + \cdots + {}^{m+1}C_r\, a^{m-1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল যে, $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও উহা সিদ্ধ হয়।

আমরা পূর্বে দেখিয়াছি যে, $n=3$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, সুতরাং $n=3+1=4$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে। আবার, $\because$ $n=4$ হইলে উহা সিদ্ধ হয়, অতএব $n=4+1=5$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে।

অনুরূপে n-এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইবে।

§ 8·3. $(1+x)^n$এর বিস্তৃতি :

দ্বিপদ উপপাদ্যের সূত্র (1) ও (2)-এ $a=1$ বসাইয়া পাই,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nc_r.x^r+\cdots+x^n\cdots(3).$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}.x^r+\cdots+x^n.\cdots\cdots(4)$$

§ 8·4. $(a-x)^n$ এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতি।

$\because$ $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি দুইটি x এবং a-এর যে-কোন মানে সিদ্ধ, $\therefore$ উভয় বিস্তৃতিতে x-এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই

(i) $$(a-x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}(-x)+{}^nC_2a^{n-2}(-x)^2+\cdots+(-x)^n$$
$$=a^n-{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2-\cdots+(-1)^nx^n.$$

(ii) $$(1-x)^n=(1)^n+{}^nC_1(-x)+{}^nC_2(-x)^2+\cdots+(-x)^n$$
$$=1-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-\cdots\cdots+(-1)^nx^n.$$

[দ্রষ্টব্য : (i) ও (ii)-এ n জোড় সংখ্যা হইলে $(-x)^n$-এর চিহ্ন (sign) ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $(-x)^n=x^n$ হইবে। আর n বিজোড় সংখ্যা হইলে $(-x)^n=-x^n$ হইবে। এখানে n জোড় বা বিজোড় কিছুই জানা না থাকায় $(-x)^n$-এর স্থানে $(-1)^nx^n$ লেখা হইল, n জোড় বা বিজোড় হইলে $(-1)^n$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।]

(i) ও (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলির সাংখ্যমান (numerical values) যথাক্রমে $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলির সাংখ্যমানের সমান, কেবল পদগুলি একান্তরক্রমে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক। উভয় বিস্তৃতিতেই প্রথম পদ ধনাত্মক। আর n জোড় বা বিজোড় হইলে শেষ পদটি যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

§ 8·5. বিস্তৃতির সাধারণ পদ বা General Term নির্ণয়।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদকে ঐ বিস্তৃতির **সাধারণ পদ** (general term) বলা হয়। কারণ, r-এর যথাযোগ্য মান বসাইয়া ঐ সাধারণ পদটি হইতে ঐ বিস্তৃতির যে কোন পদ নির্ণয় করা যায়। যথা, দশম পদের নির্ণয়ের জন্য ঐ সাধারণ পদে r-এর মান 9 ধরিলে $(9+1)$-তম বা দশম পদ পাওয়া যাইবে।

যেমন T_1 বা t_1 দ্বারা প্রথম পদ, T_2 বা t_2 দ্বারা দ্বিতীয় পদ সূচিত করা হয়, সেইরূপ $(r+1)$-তম পদ T_{r+1} বা t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতে পাই

প্রথম পদ $=(0+1)$-তম পদ $={}^nC_0a^n=a^n$.

দ্বিতীয় পদ $=(1+1)$-তম পদ $={}^nC_1a^{n-1}x$.

তৃতীয় পদ $=(2+1)$-তম পদ $={}^nC_2a^{n-2}x^2$.

চতুর্থ পদ $=(3+1)$-তম পদ $={}^nC_3a^{n-3}x^3$.

অনুরূপে, $(r+1)$-তম পদ $={}^nC_ra^{n-r}x^r$.

অতএব, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির **সাধারণপদ** $={}^nC_ra^{n-r}x^r\cdots(1)$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,a^{n-r}x^r\ldots(2)$$

আবার, অনুরূপে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির **সাধারণ পদ**

$$={}^nC_rx^r\cdots\cdots(3)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^r\cdots(4).$$

$(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_ra^{n-r}(-x)^r$

$$=(-1)^r\,{}^nC_ra^{n-r}x^r$$

এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_r(-x)^r$

$$=(-1)^n\,{}^nC_rx^r.$$

§ 8·6. বিস্তৃতির মধ্যপদ বা Middle Term নির্ণয়।

আমরা দেখিয়াছি যে, দ্বিপদ রাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা ঐ ঘাতসূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী হইয়া থাকে। অতএব, ঐ ঘাত n, জোড় বা বিজোড় সংখ্যা, তাহা দেখিতে হইবে। n জোড় সংখ্যা হইলে ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ একটি হইবে। আর n বিজোড় সংখ্যা হইলে ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটি হইবে।

মনে কর, n জোড় সংখ্যা অর্থাৎ $n=2m$. সুতরাং n-ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(2m+1)$ হইবে। অতএব কেবল $(m+1)$-তম বা $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদটি উহার মধ্যপদ হইবে।

আবার, মনে কর, n বিজোড় অর্থাৎ $n=2m+1$, সুতরাং n ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $=(n+1)=2m+2$. অতএব, এস্থলে মধ্যপদ একটি না হইয়া দুইটি হইবে, $(m+1)$-তম পদ অর্থাৎ $\frac{n+1}{2}$-তম পদ এবং $(m+2)$-তম পদ অর্থাৎ $(\frac{n+1}{2}+1)$-তম পদ ঐ বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ হইবে।

(a) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় :—

(i) n জোড় হইলে মনে কর $n=2m$, সুতরাং $m=\frac{n}{2}$.

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $n+1$ অর্থাৎ $2m+1$, সুতরাং উহার মধ্যপদ একটি হইবে এবং $(m+1)$-তম বা $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদটিই মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $= {}^nC_{\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n} = \dfrac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2}x^{\frac{1}{2}n}$.

(ii) n বিজোড় হইলে মনে কর, $n=2m+1$, সুতরাং $m=\frac{1}{2}(n-1)$.

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $n+1$ অর্থাৎ $2m+2$ (ইহা জোড় সংখ্যা)। অতএব, বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটি হইবে। $(m+1)$-তম ও $(m+2)$-তম পদ দুইটি অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম ও $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদদ্বয়, দুইটি মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ দুইটি

$= {}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}$ এবং ${}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}x^{\frac{1}{2}(n+1)}$

অর্থাৎ $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \, \lfloor \frac{1}{2}(n+1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}$

এবং $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \, . \, \lfloor \frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n+1)}$

[দ্রষ্টব্য : (ii)-এ মধ্যপদ দুইটির সহগদ্বয়ের সাংখ্যমান একই]

§8·7. বিস্তৃতির সমদূরবর্তী (Equidistant) পদসমূহ।

শ্রেণীর প্রথম দিক ও শেষ দিক হইতে যে দুইটি পদ সমান দূরে (অর্থাৎ সমান সংখ্যক পদের পর) অবস্থিত, সেই পদ দুইটিকে সমদূরবর্তী পদ বলে। যথা, প্রথম দিক হইতে পঞ্চম পদ ও শেষ দিক হইতে বামদিকের পঞ্চম পদ হইবে দুইট সমদূরবর্তী পদ। সাধারণভাবে প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদ ও শেষ দিক হইতে বামদিকের $(r+1)$-তম পদ দুইটি সমদূরবর্তী পদ।

§ 8·8. কোন বিস্তৃতির সমদূরবর্তী পদগুলির সহগসমূহ সমান হয়।

পূর্বের বিস্তৃতি দুইটিতে প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r. এখন শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ কত হয় দেখিতে হইবে। শেষ দিক হইতে যেটি $(r+1)$-তম পদ তাহার আগে প্রথম দিক হইতে ধরিলে $\{(n+1)-(r+1)\}$ অর্থাৎ $(n-r)$-সংখ্যক পদ আছে, কারণ বিস্তৃতিটির মোট পদসংখ্যা $n+1$.

অতএব, শেষদিক হইতে যেটি $(r+1)$-তম পদ, প্রথম দিক হইতে ধরিলে সেইটি $(n-r)$-তম পদের পরবর্তী পদ, অর্থাৎ $(n-r+1)$-তম পদ হইবে।

$\therefore$ শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ = প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদের সহগ $= {^nC_{n-r}} = {^nC_r}$ $\quad [\because \; {^nC_{n-r}} = {^nC_r}]$

অতএব, প্রথম ও শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইল। অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, যে-কোন দুই সমদূরবর্তী পদের সহগদ্বয় সমান।

উদাহরণমালা 8A

উদা. 1. $(a+3b)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

[8·2 নং অনুচ্ছেদের] সূত্রে x-এর স্থানে $3b$ বসাইয়া পাই

$$(a+3b)^6 = a^6 + {^6C_1}a^5(3b) + {^6C_2}a^4(3b)^2 + {^6C_3}a^3(3b)^3 + {^6C_4}a^2(3b)^4 + {^6C_5}a(3b)^5 + {^6C_6}(3b)^6$$

এক্ষণে, $^6C_1 = 6$, $^6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$, $^6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$.

$^6C_4 = {^6C_2} = 15$, $^6C_5 = {^6C_1} = 6$ এবং $^6C_6 = 1$.

$$\therefore \quad (a+3b)^6 = a^6 + 6a^5.3b + 15a^4.9b^2 + 20a^3.27b^3 + 15a^2.81b^4 + 6a.243b^5 + 729b^6$$

$$= a^6 + 18a^5b + 135a^4b^2 + 540a^3b^3 + 1215a^2b^4 + 1458ab^5 + 729b^6.$$

উদা. 2. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^7$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^7 = a^7 + {^7C_1}a^6.\left(-\frac{1}{a}\right) + {^7C_2}a^5.\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + {^7C_3}a^4.\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + {^7C_4}a^3.\left(-\frac{1}{a}\right)^4 + {^7C_5}a^2.\left(-\frac{1}{a}\right)^5 + {^7C_6}a.\left(-\frac{1}{a}\right)^6 + {^7C_7}.\left(-\frac{1}{a}\right)^7$$

$$= a^7 - 7a^5 + 21a^3 - 35a + \frac{35}{a} - \frac{21}{a^3} + \frac{7}{a^5} - \frac{1}{a^7}.$$

উদা. 3. $(\frac{1}{2}a-3b)^5$-এর বিস্তার কর।

$$(\tfrac{1}{2}a-3b)^5=\left\{\frac{a}{2}\left(1-\frac{6b}{a}\right)\right\}^5=\left(\frac{a}{2}\right)^5\left(1-\frac{6b}{a}\right)^5$$

$$=\frac{a^5}{32}\left\{1+{}^5c_1\left(-\frac{6b}{a}\right)+{}^5c_2\left(-\frac{6b}{a}\right)^2+{}^5c_3\left(-\frac{6b}{a}\right)^3\right.$$

$$\left.+{}^5c_4\left(-\frac{6b}{a}\right)^4+{}^5c_5\left(-\frac{6b}{a}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{a^5}{32}\left\{1-5\left(\frac{3b}{a}\right)+\frac{5.4}{2.1}\left(\frac{3b}{a}\right)^2-\frac{5.4.3}{3.2.1}\left(\frac{6b}{a}\right)^3+\frac{5}{1}\left(\frac{6b}{a}\right)^4-\left(\frac{6b}{a}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{a^5}{32}\left(1-\frac{30b}{a}+\frac{360b^2}{a^2}-\frac{2160b^3}{a^3}+\frac{6480b^4}{a^4}-\frac{7776b^5}{a^5}\right)$$

$$=\frac{a^5}{32}-\frac{15}{16}a^4b+\frac{45}{4}a^3b^2-\frac{135}{2}a^2b^3+\frac{405}{2}ab^4-243b^6.$$

উদা. 4. $(x^2+x+1)^4$-এর বিস্তার নির্ণয় কর।

এখানে $x+1$কে একটি পদ ধরিয়া পাই

$$(x^2+x+1)^4=\{x^2+(x+1)\}^4$$

$$=(x^2)^4+{}^4c_1(x^2)^3.(x+1)+{}^4c_2(x^2)^2(x+1)^2$$

$$+{}^4c_3x^2(x+1)^3+{}^4c_4(x+1)^4$$

$$=x^8+4x^6(x+1)+6x^4(x^2+2x+1)+4x^2(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$+x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$=x^8+4x^7+4x^6+6x^6+12x^5+6x^4+4x^5+12x^4+12x^3$$

$$+4x^2+x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$=x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1.$$

উদা. 5. $(a-\sqrt{1-a^2})^4+(a+\sqrt{1-a^2})^4$-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $\sqrt{1-a^2}$-এর স্থানে x বসাইয়া $(a-x)^4$ এবং $(a+x)^4$-এর বিস্তৃতিদ্বয়ের যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে। এই দুই বিস্তৃতিতে পদগুলির সাংখ্যমান সমান, কিন্তু প্রথম বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ ঋণাত্মক হইবে। অতএব, প্রথম বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদের সহিত দ্বিতীয় বিস্তৃতির ঐ পদ দুইটি কাটিয়া যাইবে।

অতএব, নির্ণেয় মান $=2(a^4+{}^4c_2a^2x^2+{}^4c_4x^4)$

$$=2\{a^4+6a^2(1-a^4\}+1(1-a^2)^2\}$$

$$=2(a^4+6a^2-6a^4+1-2a^2+a^4)=2+8a^2-8a^4.$$

উদা. 6. $(x-5y)^9$-এর বিস্তৃতির পঞ্চম পদ নির্ণয় কর।

$$t_5 = {}^9C_4 x^{9-4}(-5y)^4 = 126x^5 \times 625y^4 = 78750x^5y^4.$$

উদা. 7. $(x^3-3x)^{10}$-এর বিস্তৃতির x^{18} বিশিষ্ট পদটি নির্ণয় কর।

$$(x^3-3x)^{10} = \left\{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right\}^{10} = x^{30}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$$

$\because \quad x^{30} \times \frac{1}{x^{12}} = x^{18},$

$\therefore \quad \left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$-এর যে পদে $\frac{1}{x^{12}}$ থাকিবে তাহার সহিত x^{30}কে গুণ করিলে x^{18} বিশিষ্ট পদটি পাওয়া যাইবে।

এখানে, $\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$-এর যে পদে $\left(\frac{3}{x^2}\right)^6$ পাওয়া যাইবে সেই পদেই $\frac{1}{x^{12}}$ থাকিবে,

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় পদ} = x^{30} \times {}^{10}C_6\left(-\frac{3}{x^2}\right)^6$$

$$= x^{30} \times \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} \times 3^6 \times \frac{1}{x^{12}} = 153090x^{18}.$$

উদা. 8. $\left(x^3+\frac{a}{x^2}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x^{15}-এর সহগ কত ?

মনে কর, $(r+1)$-তম পদে x^{15} থাকিবে।

এখানে $t_{r+1} = {}^{10}C_r(x^3)^{10-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r = {}^{10}C_r x^{30-3r}.x^{-2r}.a^r$

$$= {}^{10}C_r x^{30-5r}.a^r$$

এক্ষণে, $\because$ $(r+1)$-তম পদে x^{15} আছে,

$\therefore \quad x^{30-5r} = x^{15}, \quad \therefore \quad 30-5r = 15, \quad \therefore \quad r = 3.$

অতএব, $(3+1)$-তম অর্থাৎ চতুর্থ পদে x^{15} আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{10}C_3 a^3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}a^3 = 120a^3.$

উদা. 9. $\left(a^3-\frac{1}{a^2}\right)^{13}$-এর বিস্তৃতিতে a^{-11}-এর সহগ নির্ণয় কর।

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে a^{-11} আছে।

ঐ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{13}C_r(a^3)^{13-r}\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r$

$= {}^{13}C_r a^{39-3r} \times \frac{(-1)^r}{a^{2r}} = (-1)^r \times {}^{13}C_r a^{39-3r} \times a^{-2r}$

$= (-1)^r \times {}^{13}C_r \times a^{39-5r},$

অতএব, যদি এই পদে a^{-11} থাকে অর্থাৎ ইহাতে যদি a-এর সূচকটি -11 হয়, তবে $39-5r=-11$, বা, $5r=50$, $\therefore\ r=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^r\times{}^{13}C_r=(-1)^{10}.{}^{13}C_{10}=1\times{}^{13}C_3$

$$=\frac{13\times12\times11}{2\times3\times1}=286.$$

উদা. 10. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতির x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

[C. U. '34 ; H. S. '65]

মনে কর $(r+1)$-তম পদটি x-বর্জিত।

এখানে $t_{r+1}={}^{12}C_r(x^2)^{12-r}.\frac{1}{x^r}={}^{12}C_rx^{24-2r}.x^{-r}$

$$={}^{12}C_rx^{24-3r}.$$

এক্ষণে এই পদটি x বর্জিত পদ হইবে যদি x-এর সূচক শূন্য হয় অর্থাৎ যদি $24-3r=0$ হয়। $\because\ 24-3r=0$, $\therefore\ r=8$,

অতএব, $(8+1)$-তম বা নবম পদটি x-বর্জিত পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $={}^{12}C_8={}^{12}C_4=\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1}=495.$

উদা. 11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

[C. U. '31]

মনে কর, $(r+1)$-তম পদটি x- বর্জিত।

এখানে $t_{r+1}={}^{2n}C_r(x)^{2n-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r={}^{2n}C_rx^{2n-r}.x^{-r}={}^{2n}C_rx^{2n-2r}.$

এই পদটি x-বর্জিত হইবে যদি x-এর সূচক $2n-2r=0$ হয় অর্থাৎ যদি $r=n$ হয়। $\therefore\ (n+1)$-তম পদটি x-বর্জিত পদ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় পদটি } ={}^{2n}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor 2n-n}=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}.$$

উদা. 12. $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^8$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা 9, সুতরাং পঞ্চম পদটি উহার মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $={}^8C_4(3x)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$

$$=\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}\times3^4x^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$=\frac{2835}{8}.x^4.\ \frac{1}{x^4}=\frac{2835}{8}.$$

উদা. 13. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^7$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 8, সুতরাং উহার মধ্যপদ দুইটি হইবে এবং ঐ পদ দুইটি বিস্তৃতির ($\frac{1}{2}\times 8$) বা চতুর্থ পদ এবং ($\frac{1}{2}\times 8+1$) বা পঞ্চম পদ।

চতুর্থ পদটি $= {}^7C_3(a)^4\left(-\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{7.6.5}{3.2.1}a^4\times -\frac{1}{a^3} = -35a.$

পঞ্চম পদটি $= {}^7C_4 a^3\left(-\frac{1}{a}\right)^4 = \frac{7.6.5}{3.2.1}a^3\cdot\frac{1}{a^4} = \frac{35}{a}.$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ দুইটি $= -35a$ এবং $\frac{35}{a}$.

উদা. 14. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতি এবং উহার সাধারণ পদটি ও মধ্যপদ দুইটি নির্ণয় কর। [C. H. '32]

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} + {}^{2n+1}C_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\left(\frac{b}{a}\right) + {}^{2n+1}C_2\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} + (2n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-1} + \frac{(2n+1)2n}{2.1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-3} + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$$ ইহাই নির্ণেয় বিস্তৃতি।

নির্ণেয় সাধারণ পদ $= (r+1)$-তম পদ

$$= {}^{2n+1}C_r\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-r+1}\left(\frac{b}{a}\right)^r = {}^{2n+1}C_r\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-r+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{-r}$$

$$= \frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(2n+1-r+1)}{\lfloor r}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-r+1-r}$$

$$= \frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(2n+2-r)}{\lfloor r}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-2r}$$

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $2n+2$, সুতরাং উহার $(n+1)$-তম ও $(n+2)$-তম পদদ্বয় উহার দুইটি মধ্যপদ হইবে।

অতএব, একটি মধ্যপদ $= (n+1)$-তম পদ

$$= \frac{(2n+1).2n\,(2n-1)\cdots(2n+1-n+1)}{\lfloor n}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-n}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$= \frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(n+2)}{\lfloor n}\cdot\frac{a}{b} \quad \left[\because \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}\right]$$

অপর মধ্যপদটি $=(n+2)$-তম পদ

$$=\frac{(2n+1)\cdot 2n.(2n-1)\cdots(2n+1-n)}{\lfloor n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+1)}{\lfloor n+1}\frac{b}{a}\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}\right]$$

উদা. 15. $(1-2a^3+3a^5)\left(1+\frac{1}{a}\right)^8$-এর বিস্তৃতিতে a-র সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(1-2a^3+3a^5)\times$

$$\left(1+{}^8c_1\frac{1}{a}+{}^8c_2\frac{1}{a^2}+{}^8c_3\frac{1}{a^3}+{}^8c_4\frac{1}{a^4}+\cdots+\frac{1}{a^8}\right)$$

$$=\left(1-2a^3+3a^5\right)\left(1+\frac{8}{a}+\frac{28}{a^2}+\frac{56}{a^3}+\frac{70}{a^4}+\cdots\right)$$

এক্ষণে, ঐ গুণনে $-2a^3\times\frac{28}{a^2}=-56a$, এবং $3a^5\times\frac{70}{a^4}=210a$,

এবং গুণফলে আর a-এর কোন সহগ নাই।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=-56+210=154$.

উদা. 16. প্রমাণ কর যে, n-এর 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানে $3^{2n}-8n-1$ রাশিটি 64 দ্বারা বিভাজ্য।

$$3^{2n}-8n-1=9^n-8n-1=(1+8)^n-8n-1$$

$$=(1+n.8+{}^nc_2.8^2+{}^nc_3.8^3+\cdots)-8n-1$$

$$={}^nc_2.8^2+{}^nc_3.8^3+\cdots$$

এক্ষণে, $\because$ দক্ষিণ পক্ষের প্রত্যেক পদ 8^2-এর গুণিতক অর্থাৎ 8^2 বা 64 দ্বারা বিভাজ্য, $\therefore$ প্রদত্ত $3^{2n}-8n-1$ রাশিটিও 64 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 17. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(\cdot 999)^4$-এর 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় কর।

$$(\cdot 999)^4=(1-\cdot 001)^4=1-{}^4c_1\times\cdot 001+{}^4c_2\times(\cdot 001)^2-\cdots$$

$$=1-4\times\cdot 001+6\times\cdot 000001-\cdots$$

$=1-\cdot 004=\cdot 996$ (3 অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)।

উদা. 18. দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^p-এর সহগ $\frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{1}{2}(n+p)\lfloor\frac{1}{2}(n-p)}$.

মনে কর, $(r+1)$-তম পদে x^p আছে।

এক্ষণে, $t_{r+1}={}^nC_r x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}^nC_r x^{n-r}x^{-r}={}^nC_r x^{n-2r}$.

ঐ পদে x^p থাকিবে যদি $n-2r=p$ হয়, $\therefore\ r=\frac{1}{2}(n-p)$,

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $={}^nC_r={}^nC_{\frac{1}{2}(n-p)}=\frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{1}{2}(n-p)\ \lfloor\frac{1}{2}(n+p)}$.

উদা. 19. যদি $(1+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^r ও x^{r+1}-এর সহগ সমান হয়, তবে r-এর মান কত হইবে? [C. U. '30]

এখানে x^r-এর সহগ $={}^{2n+1}C_r$ এবং x^{r+1} এর সহগ $={}^{2n+1}C_{r+1}$.

$\because$ এখানে ${}^{2n+1}C_r={}^{2n+1}C_{r+1}$ (স্বীকার),

$\therefore$ হয় $r=r+1$ অথবা $r+(r+1)=2n+1$;

কিন্তু r কখনও $r+1$-এর সমান হইতে পারে না,

অতএব, এখানে $r+(r+1)=2n+1$,

বা, $2r+1=2n+1$, $\therefore\ r=n$.

উদা. 20. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে দেখাও যে

$$(1+a)^n-2na(1+a)^{n-1}+\frac{2n(2n-2)}{2}a^2(1+a)^{n-2}-\cdots=(1-a)^n$$

বামপক্ষ $=(1+a)^n-n(1+a)^{n-1}(2a)^1$

$$+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(1+a)^{n-2}.(2a)^2-\cdots$$

$=(1+a)^n-{}^nC_1(1+a)^{n-1}.(2a)^1+{}^nC_2(1+a)^{n-2}.(2a)^2-\cdots$

$=\{(1+a)-2a\}^n=(1-a)^n$.

প্রশ্নমালা 8A

দ্বিপদ রাশিগুলিকে বিস্তার কর :—

1. $(a+3)^5$ 2. $(x-y)^6$ 3. $(2x+3y)^5$ 4. $\left(x-\frac{3}{y}\right)^7$

5. বিস্তার করিয়া সরল কর : $(\sqrt{3}+1)^6-(\sqrt{3}-1)^6$.

6. $(1+\sqrt{1-a^2})^5+(1-\sqrt{1-a^2})^5$-এর মান নির্ণয় কর।

7. $(a^2-a-2)^3$ ত্রিপদ রাশির বিস্তার নির্ণয় কর।

8. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{17}$, $(x-5y)^8$, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2n}$-এর বিস্তারের যথাক্রমে সপ্তদশ, অষ্টম ও n-তম পদ নির্ণয় কর।

9. $(1+3x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত হইতে p-তম পদদ্বয় নির্ণয় কর।

মধ্যপদ বা পদদ্বয় নির্ণয় কর :

10. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{12}$ 11. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ 12. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ [C. U. '10]

13. $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^8$ 14. (i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ (ii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$

15. দেখাও যে $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{\lfloor n}\cdot 2^n$.

16. $(x-x^2)^{10}$-এর বিস্তারে x^{15}-এর সহগ নির্ণয় কর।

17. $(2x^2-x)^{10}$-এর বিস্তারে x^{16}-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U. '47]

18. $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^{14}$-এর বিস্তৃতিতে x^{-10} এর সহগ নির্ণয় কর।

19. $(1+x+x^2)(1-x)^{15}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর। [M. U. '20]

20. $(1-2x^2+3x^4)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x-এর এবং $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

21. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{2r+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

22. প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগের দ্বিগুণ। [C. U. '47]

নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে x-বর্জিত পদ নির্ণয় কর :

23. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ [C. U, '34] 24. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ [C. U. '36]

25. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ [P. U. '48] 26. $(1-x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$.

27. $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

28. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। [C. U. '10, '21]

29. $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। [U. U. '47]

30. যদি m ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{m+n}$-এর বিস্তৃতিতে x^m ও x^n-এর সহগদ্বয় সমান। [H. S. '68 ; C. U. '35]

31. $(x+1)^{20}$-এর বিস্তৃতিতে r-তম ও $(r+1)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইলে, r-এর মান কত ? [C. U. '46]

32. $(1+x)^{10}$-এর বিস্তৃতির $(4r+5)$-তম ও $(2r+1)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইলে r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

33. প্রমাণ কর যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগটি $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটির সহগদ্বয়ের সমষ্টির সমান। [C. U. '18]

34. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(99)^3$ ও $(\cdot 99)^4$-এর দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

35. প্রমাণ কর যে r-এর 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানে $2^{3r}-3r-1$ রাশিটি 9 দ্বারা বিভাজ্য।

36. প্রমাণ কর যে n এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে 1225 দ্বারা $6^{2n}-35^n-1$ বিভাজ্য হইবে।

37. n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $a-{}^nc_1(a+b)+{}^nc_2(a+2b)+\cdots+(-1)^n(a+nb)=0.$

(ii) $(1+a)^n+{}^nc_1(1+a)^{n-1}.(2-a)+{}^nc_2(1+a)^{n-2}(2-a)^2+\cdots+(2-a)^n=3.$

(iii) $a^n(a-1)^n+{}^nc_1a^{n-1}(a-1)^{n-1}(a+1)+{}^nc_2a^{n-2}(a-1)^{n-2}(a+1)^2+\cdots+(a+1)^n=(a^2+1).$

(iv) $$\left\{1+2n+\frac{2n(2n-1)}{\lfloor 2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}^2$$
$$=1+4n+\frac{4n(4n-1)}{\lfloor 2}+\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

§ 8·9. দ্বিপদ সহগের ধর্ম (Properties of Binomial Coefficients) :

অনেক সময়ে ${}^nc_0, {}^nc_1, {}^nc_2, \cdots {}^nc_r, \cdots, {}^nc_n$ এই দ্বিপদ সহগগুলিকে (Binomial Coefficients) সংক্ষেপে যথাক্রমে $c_0, c_1, c_2, \cdots c_r, \cdots, c_n$ আকারে লেখা হয়।

অতএব, $(1+x)^n=1+{}^nc_1x+{}^nc_2x^2+\cdots+x^n.$ $\cdots(1)$

$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$ $\cdots(2)$

$[\because\ {}^nc_0={}^nc_n=1]$

I. এক্ষণে, (2) এ $x=1$ বসাইয়া পাই

$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n$ [$\because$ 1-এর যে-কোন ঘাত $=1$]

$=$ সহগগুলির সমষ্টি।

(i) অতএব পাওয়া গেল যে, দ্বিপদ বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি $=2^n$.

II. আবার, (2)-এ $x=-1$ বসাইয়া পাই,

$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-\cdots+(-1)^nc_n$

বা, $0 = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^n c_n$

$\therefore$ $c_0 + c_2 + c_4 + \ldots = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots$ [পক্ষান্তর করিয়া]

(ii) অতএব, প্রমাণিত হইল যে, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির **বিজোড়-স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি = জোড়স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি।**

III. $\because$ সমস্ত সহগগুলির সমষ্টি $= 2^n$.

$\therefore$ বিজোড়স্থানীয় পদগুলির সহগসমূহের সমষ্টি = জোড়স্থানীয় পদগুলির সহগসমূহের সমষ্টি $= \frac{1}{2} \times$ সবগুলি সহগের সমষ্টি

$$= \tfrac{1}{2} \times 2^n = 2^{-1} \times 2^n = 2^{n-1}.$$

IV. $\because$ $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 2^n$,

$\therefore$ $1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 2^n$,

$\therefore$ $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 2^n - 1$.

এক্ষণে বামপক্ষের পদগুলি দ্বারা n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 1, 2, 3,$\cdots$, n-সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মোট সংখ্যা বুঝায়।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, ঐ সমবায় সংখ্যা $= 2^n - 1$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতে সহগগুলির সম্বন্ধে যে তথ্যগুলি পাওয়া গিয়াছে, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতেও $a = x = 1$ এবং $a = x = -1$ বসাইয়া ঐ তথ্যগুলি পাওয়া যায়।]

§ 8·10. বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ বা Greatest Coefficient নির্ণয়।

$(1+x)^n$ ও $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদের সহগ উভয় ক্ষেত্রেই c_r হয়। পূর্বে সমবায়ের আলোচনায় প্রমাণ করা হইয়াছে যে, (i) n জোড় হইলে ${}^nc_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r = \frac{1}{2}n$ হয়; এবং (ii) n বিজোড় হইলে ${}^nc_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r = \frac{1}{2}(n-1)$ অথবা $\frac{1}{2}(n+1)$ হয়।

অতএব, প্রমাণিত হইতেছে যে, n **জোড় হইলে** $(r+1)$-তম অর্থাৎ $(\frac{1}{2}n+1)$-তম পদটির অর্থাৎ ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদটির সহগ বৃহত্তম হইবে।

আবার n **বিজোড় হইলে** ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটির অর্থাৎ উহার $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম পদের ও $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদের সহগ দুইটি বৃহত্তম হইবে এবং ঐ সহগদ্বয় সমান হইবে।

§ 8·11. বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ বা Greatest Term নির্ণয়।

মনে কর, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে।

r-তম পদকে t_r দ্বারা সূচিত করা হইল।

ঐ বিস্তৃতির $t_r = {}^nc_{r-1}\, a^{n-r+1} x^{r-1}$...(1)

এবং $t_{r+1} = {}^nc_r a^{n-r} x^r$...(2)

(2)-কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r}\,\frac{x}{a}. \quad \therefore \quad t_{r+1} = t_r \times \left(\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}\right).$$

এক্ষণে, $t_{r+1} >=$ অথবা $< t_r$ হইবে,

যদি $(n-r+1)x >, =$ বা $< ra$ হয়,

অর্থাৎ যদি $(n+1)x >, =$ বা $< ra + rx$ হয়,

" " $(n+1)x >, =$ বা $< (a+x)r$ হয়,

" " $r < =$ বা $> \frac{n+1}{a+x} \cdot x$ হয়।

(i) এক্ষণে, মনে কর $\frac{n+1}{a+x}x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং উহা m-এর সমান। অতএব, যতক্ষণ $r < m$ থাকিবে ততক্ষণ $t_{r+1} > t_r$ হইবে অর্থাৎ ততক্ষণ প্রত্যেক পদ তাহার পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। এইভাবে t_m পর্যন্ত পর পর পদগুলি বাড়িতে থাকিবে। যখন $r = m$ হইবে, তখন $t_{r+1} = t_r$ অর্থাৎ $t_{m+1} = t_m$ হইবে।

আবার, $r > m$ হইলে (অর্থাৎ $m+1$ বা তদধিক হইলে) $t_{r+1} < t_r$ হইবে এবং পরবর্তী পদগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

অতএব, t_{m+1} এবং t_m পদ দুইটিই বৃহত্তম পদ হইবে এবং $t_{m+1} = t_m$.

(ii) এক্ষণে, যদি $\frac{n+1}{a+x}x$ পূর্ণসংখ্যা না হয়, তবে মনে কর, উহা = পূর্ণসংখ্যা p + কোন ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

অতএব, যতক্ষণ p পর্যন্ত r-এর মান থাকিবে ততক্ষণ $\frac{n+1}{a+x}x$ অপেক্ষা r ছোট থাকিবে, সুতরাং ততক্ষণ $t_{r+1} > t_r$ হইবে। আর, r-এর মান $(p+1)$ বা ততোধিক হইলে $t_{r+1} < t_r$ হইবে এবং পরবর্তী পদগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

অতএব, এক্ষেত্রে t_{p+1} পদটি বৃহত্তম হইবে।

[দ্রষ্টব্য : (1) উপরের প্রণালীতেই $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যাইবে। সেস্থলে কেবল a-র স্থানে 1 বসাইতে হইবে।

(2) বৃহত্তম পদের মান বলিতে পদটির পরম মান (absolute value) অর্থাৎ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নবর্জিত সাংখ্যমান বুঝায়। অতএব, $(a+x)^n$-এর এবং $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদের মান একই হইবে। অতএব, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের প্রণালীতে $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতিরও বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে, কেবল ঋণাত্মক চিহ্নগুলি ধর্তব্য হইবে না। $(1+x)^n$-এর এবং $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের প্রণালীও অনুরূপ হইবে।]

উদাহরণমালা 8B

উদা. 1. $a=\frac{1}{3}$ হইলে $(1-2a)^9$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{9-r+1}{r}\cdot 2a$ (সাংখ্যমানে)

$$=\frac{10-r}{r}\times 2\times\frac{1}{3} \quad (\because \quad a=\tfrac{1}{3})=\frac{2(10-r)}{3r}$$

$\therefore$ $t_{r+1}>=$বা $<t_r$ হইবে যদি $2(10-r)>=$বা$<3r$ হয়

অর্থাৎ যদি $20>=$বা$<5r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r<=$বা>4 হয়।

$\therefore$ $t_4>t_3>t_2\cdots\cdots$, $t_5=t_4$ এবং $t_5>t_6>t_7\cdots$,

এখানে চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দুইটি সমান এবং ঐ দুইটিই বৃহত্তম পদ।

উদা. 2. যদি $n=13$, $a=9$, $x=4$ হয়, তবে $(2a+3x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের মান কত হইবে ?

এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{3x}{2a}=\frac{14-r}{r}\cdot\frac{12}{18}=\frac{28-2r}{3r}$

$\therefore$ $t_{r+1}>=$বা$<t_r$, যদি $28-2r>=$বা$<5r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $5r<=$বা>28 হয়, অর্থাৎ যদি $r<=$বা$>5\frac{3}{5}$ হয়।

$\therefore$ $t_6>t_5>t_4\ldots$এবং $t_{14}<t_{13}<t_{12}\ldots<t_6$.

$\therefore$ এখানে t_6 বৃহত্তম পদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $={}^{13}C_5(2a)^8(3x)^5={}^{13}C_5.2^8.3^5.a^8.x^5$.

এক্ষণে, $a=9$ ও $x=4$ ধরিয়া ঐ পদের মান নির্ণয় কর।

উদা. 3. (i) $(1+a)^{11}$, (ii) $(3-5x)^8$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য সহগ নির্ণয় কর।

(i) এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{1-r+11}{r}$

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে, যদি $\frac{12-r}{r}>1$ হয়, অর্থাৎ যদি $r<6$.

অতএব, ষষ্ঠ ও সপ্তম পদদ্বয়ের সহগ বৃহত্তম এবং সমান হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $={}^{11}C_5=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$.

(ii) এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{8-r+1}{r}\cdot\frac{5}{3}$ [কেবল সাংখ্যমান প্রয়োজন, ঋণাত্মক চিহ্ন ধরিতে হইবে না]

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে, যদি $(9-r).5>3r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $45>8r$ হয়, অর্থাৎ যদি $r<5\frac{5}{8}$ হয়।

$\therefore$ t_6-এর সহগ বৃহত্তম হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $= {}^8C_5\,(3)^3(5)^5 = \frac{8\times7\times6}{3\times2}\times27\times3125$
$= 4725000.$

উদা. 4. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পর পর তিনটি সহগ 252, 210 ও 120 হয়, তবে, n-এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রদত্ত সহগ তিনটি যথাক্রমে $(r+1)$-তম, $(r+2)$-তম ও $(r+3)$-তম পদের সহগ।

অতএব, এখানে ${}^nC_r=252$, ${}^nC_{r+1}=210$, ${}^nC_{r+2}=120.$

$$\therefore\ \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}=\frac{252}{210},\ \text{বা,}\ \frac{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r+1\,\lfloor n-r-1}}=\frac{252}{210},\ \text{বা,}\ \frac{r+1}{n-r}=\frac{6}{5}$$

বা, $6n-6r=5r+5$, বা, $6n-11r=5\cdots(1)$

আবার, $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}}=\frac{210}{120}$, বা, $\frac{r+2}{n-r-1}=\frac{210}{120}=\frac{7}{4}$,

বা, $7n-7r-7=4r+8$, বা, $7n-11r=15\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $n=10.$

উদা. 5. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ হইলে

প্রমাণ কর যে, $c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+\cdots+c_n^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

[C. U. '41]

$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n\cdots(1)$

এবং $(x+1)^n=c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) গুণ করিয়া পাই

$$(1+x)^{2n}=(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)\times$$
$$(c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n)$$

ইহা একটি অভেদ, সুতরাং বামপক্ষের x^n-এর সহগ ডানপক্ষের x^n-এর সহগের সমান হইবে।

এক্ষণে, বামপক্ষের x^n-এর সহগ $= {}^{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$,

আবার ডানপক্ষের x^n-এর সহগ,

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+\cdots+c_n^2.$$

সুতরাং $c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+\cdots+c_n^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, n যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, x-এর যে-কোন মানের জন্য,

$$\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}=\frac{\lfloor n}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdots(A)$$

মনে কর n-এর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড মান m এর জন্য,

$$\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\cdots+(-1)^n\frac{c_m}{x+m}=\frac{\lfloor m}{x(x+1)\cdots(x+m)}\cdots(1)$$

x-এর স্থলে $x+1$ লিখিয়া [যেহেতু x-এর সকল মানের জন্য (1) সত্য]

$$\frac{c_0}{x+1}-\frac{c_1}{x+2}+\frac{c_2}{x+3}-\cdots+(-1)^m\frac{c_m}{x+1+m}=\frac{\lfloor m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+1+m)}\cdots(2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{x}-\frac{{}^mc_1+1}{x+1}+\frac{{}^mc_2+{}^mc_1}{x+2}-\cdots+\frac{(-1)^r\ {}^mc_r+{}^mc_{r-1}}{x+r}+\cdots(-1)^{m+1}\frac{1}{x+m+1}$$
$$=\frac{(x+m+1-m)\lfloor m}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m+1)}$$

এক্ষণে, ${}^mc_r+{}^mc_{r-1}={}^{m+1}c_r$ এবং $1={}^{m+1}c_0={}^{m+1}c_{m+1}$

$$\therefore\ \frac{1}{x}-\frac{{}^{m+1}c_1}{x+1}+\frac{{}^{m+1}c_2}{x+2}-\ldots\frac{(-1)^{m+1}\ {}^{m+1}c_{m+1}}{x+m+1}=\frac{\lfloor m+1}{x(x+1)\cdots(x+m+1)}$$

সুতরাং $n=m$-এর জন্য (A) সত্য হইলে, $n=m+1$-এর জন্য (A) সত্য হয়। স্পষ্টতঃ $n=1$-এর জন্য (A) সত্য। সুতরাং (A), n-এর সকল ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য সত্য।

উদা. 6. n একটি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর অখণ্ড সংখ্যা হইলে দেখাও যে,
$a-{}^nc_1(a-1)+{}^nc_2(a-2)-\cdots+(-1)^n(a-n)=0.$

[I. I. T. 1972]

এখানে, $a-{}^nc_1(a-1)+{}^nc_2(a-2)-\cdots+(-1)^n(a-n)$

$$=a\{1-{}^nc_1+{}^nc_2-\cdots+(-1)^n\}+\{{}^nc_1-2\,{}^nc_2+3\,{}^nc_3-4\,{}^nc_4+\cdots+(-1)^{n+1}n\}$$

$$=a\{{}^nC_0-{}^nC_1+{}^nC_2-\cdots+(-1)^n{}^nC_n\}$$
$$+\{n-\frac{2n(n-1)}{\lfloor 2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}$$
$$-\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}+\cdots+(-1)^{n-1}.n\}$$
$$[\because\ (-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}]$$
$$=a\times 0+n[1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 3}$$
$$+\cdots(-1)^{n-1}1]$$
$$=0+n\{{}^{n-1}C_0-{}^{n-1}C_1+{}^{n-1}C_2-{}^{n-1}C_3+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\,{}^{n-1}C_{n-1}\}$$
$$=0+n.0=0.$$

উদা. 7. n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং P_n -এর অর্থ $(1+x)^n$-এর বিস্তারে সকল দ্বিপদ সহগের গুণফল হইলে, প্রমাণ কর যে

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$

আমরা জানি,

$${}^{n+1}C_r=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor r\,\lfloor n+1-r} \text{ এবং } {}^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$$

$$\therefore\quad \frac{{}^{n+1}C_r}{{}^nC_r}=\frac{n+1}{n+1-r}\;\cdots\cdots(1)$$

এক্ষণে (1)-এ $r=1, 2, 3,\cdots\cdots, n$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{{}^{n+1}C_1}{{}^nC_1}=\frac{n+1}{n}$$
$$\frac{{}^{n+1}C_2}{{}^nC_2}=\frac{n+1}{n-1}$$
$$\frac{{}^{n+1}C_3}{{}^nC_3}=\frac{n+1}{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{{}^{n+1}C_n}{{}^nC_n}=\frac{n+1}{1}$$

$$\therefore\ (\text{গুণ করিয়া})\ \frac{{}^{n+1}C_1\times{}^{n+1}C_2\times{}^{n+1}C_3\times\cdots\times{}^{n+1}C_n}{{}^nC_1\times{}^nC_2\times{}^nC_3\times\cdots\times{}^nC_n}$$
$$=\frac{(n+1)^n}{n(n-1)\cdots 3.2.1},$$

বা, $$\frac{{}^{n+1}C_1\times{}^{n+1}C_2\times{}^{n+1}C_3\times\ldots\times{}^{n+1}C_n\times{}^{n+1}C_{n+1}}{{}^nC_1\times{}^nC_2\times{}^nC_3\times\cdots\times{}^nC_n}$$
$$=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}\quad[\because\ {}^{n+1}C_{n+1}=1]$$

বা, $$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$

প্রশ্নমালা 8B

1. $x=\frac{1}{2}$ ও $y=\frac{1}{3}$ হইলে, $(x-4y)^8$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

2. $n=13$, $x=9$ ও $y=4$ হইলে $(2x-3y)^n$-এর বিস্তৃতির কোন্‌টি বৃহত্তম পদ ?

3. $a=\frac{1}{3}$ হইলে $(1+2a)^9$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের মান কত ?

4. $(1+\frac{2}{3}a)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সাংখ্যসহগটি নির্ণয় কর।

5. $(1-2x)^5$-এর বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

6. $(2x-3y)^7$-এর বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি কত ?

7. প্রমাণ কর যে $(a+b)^n$-এর বিস্তৃতির দুইটি প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ দুইটি সমান।

8. $(x+a)^n$কে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে বিস্তৃত করিলে তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম পদগুলি যথাক্রমে 84, 280 ও 560 হয়। x, a ও n-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '55]

9. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পর পর তিনটি সহগ যদি 28, 56 ও 70 হয়, তবে n-এর মান কত ?

10. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পর পর তিনটি সহগ 165, 330 ও 462 ; n-এর মান নির্ণয় কর। [P.U. '45]

11. প্রমাণ কর যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির বিজোড় স্থানীয় পদগুলির সহগ সমষ্টি 2^{2n-1}. [C. U. '16]

12. যদি a, b, c, d যথাক্রমে $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ এবং n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}$. [C. U.'37]

13. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ হয় তবে দেখাও যে $c_1+2.c_2+3.c_3+\cdots+n.c_n=n.2^{n-1}$. [C. U.'38]

14. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ হইলে প্রমাণ কর যে, $c_1-2c_2+3c_3-\cdots+(-1)^{n-1}.n.c_n=0$. [C. U. '42]

15. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পর পর সহগগুলি $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ হইলে প্রমাণ কর যে $a_0+2a_1+3a_2+\cdots+(n+1)a_n=2^n+n.2^{n-1}$. [C. U. 29]

$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, হইলে প্রমাণ কর যে,

16. $\frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \cdots + \frac{c_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. [C. U. '45]

17. $c_0 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{c^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. [P. U. '44]

18. $c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \cdots + (n+1)\ c_n = (n+2)2^{n-1}$.
[Rangoon '50 ; B. U. E. '63 ; H. S. '66]

19. $c_k = c_{n-k}$.

20. $c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \cdots + c_nc_0 = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$.

21. যদি $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ হয়,
তবে প্রমাণ কর যে, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \frac{1}{2}(3^n+1)$.

22. $(c_0+c_1)(c_1+c_2)\cdots(c_{n-1}+c_n) = c_1c_2\cdots c_n \cdot \frac{(n+1)^n}{\lfloor n}$.

23. $c_0c_r + c_1c_{r-1} + \cdots + c_{n-r}c_r = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r \lfloor n+r}$.

24. $(c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n)^3 = {}^{3n}c_0 + {}^{3n}c_1 + {}^{3n}c_2 + \cdots + {}^{3n}c_{3n}$.

25. $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, হইলে নিম্নলিখিত গুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $2c_0 - 3c_1 + 4c_2 - 5c_3 + \cdots (n+1)$তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $c_0c_1 + c_1c_2 + c_2c_3 + \cdots + c_{n-1}c_n$.

(iii) $\frac{c_1}{c_0} + \frac{2c_2}{c_1} + \frac{3c_3}{c_2} + \cdots + \frac{nc_n}{c_{n-1}}$.

26. $(1+x)$-এর কোন ঘাতের বিস্তৃতিতে যদি a, b, c পর পর তিনটি সহগ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ ঘাতের সূচক $\frac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ হইবে এবং a যে পদের সহগ তাহার পদসংখ্যা $\frac{a(b+c)}{b^2-ac}$ হইবে। [P. U. '41]

27. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে যদি a_1, a_2, a_3, a_4 পর পর যে কোন চারিটি সহগ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}$.
[P. U. '50]

28. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পঞ্চম, ষষ্ঠ ও সপ্তম পদগুলি সমান্তর প্রগতি হইলে n-এর মান নির্ণয় কর।

অসীম শ্রেণী এবং ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য (Infinite series and Binomial Theorem for negative and fractional index)

§ 9·1. যদি কতকগুলি পদ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ এইরূপ হয় যে, উহাদের যে কোন একটিকে উহার পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তবে $a_1+a_2+\cdots+a_n$-কে একটি শ্রেণী বলে। যেমন $1+2+3+\cdots+15$. বা $1^2+3^2+\cdots+33^2$, ইত্যাদি এক একটি শ্রেণী। শ্রেণীগুলিতে যতগুলি পদ থাকে তাহাকে শ্রেণীর পদসংখ্যা বলে। পূর্বে সমান্তর শ্রেণী, গুণোত্তর শ্রেণী ইত্যাদি শ্রেণীর যোগফল সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। ঐসব শ্রেণীগুলির পদসংখ্যা সসীম (finite) ছিল। যেমন সমান্তর শ্রেণী $a+(a+d)+\cdots+(a+\overline{n-1}d)$-এর পদসংখ্যা n।

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{29}$, একটি 30-সংখ্যক পদযুক্ত গুণোত্তর শ্রেণী।

সাধারণভাবে $a_1+a_2+\cdots+a_n$ একটি n-সংখ্যক পদযুক্ত শ্রেণী। a_n এই শ্রেণীর শেষ পদ।

এখন যদি কোন শ্রেণীর শেষপদ না থাকে, তবে তাহাকে অসীম শ্রেণী (infinite series) বলে। সুতরাং অসীম শ্রেণী হইতেছে $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ ইত্যাদি পদসমূহের $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$আকারে প্রকাশিত রাশিমালা। অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা অসীম।

$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$(অসীম পর্যন্ত), একটি অসীম শ্রেণী।

যেমন একটি সসীম শ্রেণীকে.

$a_1+a_2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত, এইভাবে লেখা হয়, অনুরূপে একটি অসীম শ্রেণীকে

$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\infty$ পর্যন্ত, এইভাবে লেখা হয়, বা সংক্ষেপে

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ বা, $\sum a_n$ এইভাবেও লেখা হয়।

সসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা নির্দিষ্ট বলিয়া পদগুলিকে পর পর যোগ করিয়া ইহার যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব ; কিন্তু অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যার শেষ নাই বলিয়া পদগুলিকে পর পর যোগ করিলে এই যোগ প্রক্রিয়া কখনই শেষ হইবে না। অতএব, অসীম শ্রেণীর যোগ শুধুমাত্র সাধারণ যোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে বাহির করা যাইবে না। অসীম শ্রেণীর যোগের সংজ্ঞা দিতে হইলে সীমাস্থ মানের (limiting value এর) ধারণা সম্বন্ধে আলোচনা করিতে হইবে।

§ 9·2. সীমাস্থ মান (Limiting value) :—

কোন একটি রাশি n যদি এমনভাবে বর্ধিত হয় যে উক্ত রাশির মান শেষ পর্যন্ত যে কোন রাশির মানের চেয়ে বড় হয়, তবে আমরা বলি রাশিটি অনন্ত বা অসীমের দিকে অগ্রসরমান এবং সাংকেতিকভাবে $n\to\infty$ এইরূপে প্রকাশ

করা হয়। অনন্ত বা অসীমের ধারণা কল্পিত নহে। অখণ্ড ধনসংখ্যার সংখ্যা অনন্ত বা অসীম বলা যায়।

মনে কর, a_n পদটি n-এর উপর নির্ভরশীল এবং n-এর প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য a_n-এর সংজ্ঞা আছে। এখন n অসীমের দিকে অগ্রসরমান হইলে, যদি a_n-এর মান কোন একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি a-এর দিকে অগ্রসর হয়, তবে আমরা বলি যখন $n \to \infty$, তখন a_n-এর সীমাস্থ মান a, এবং ইহাকে সাংকেতিকভাবে $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ বা $\lim a_n = a$ এইভাবে প্রকাশ করি। এখানে a_n-এর মান a-এর দিকে অগ্রসরমান-এর অর্থ a_n এবং a-এর মানের অন্তর ক্রমশঃ যে কোন সংখ্যা হইতে ছোট হইবে। ধারণাটি নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইল।

উদা. 1. মনে কর, $a_n = \dfrac{1}{10^n}$

এখন $a_1 = \dfrac{1}{10} = \cdot 1$, $a_2 = \dfrac{1}{10^2} = \cdot 01$,

$a_3 = \dfrac{1}{10^3} = \cdot 001$, $a_4 = \cdot 0001$ ইত্যাদি।

স্পষ্টতঃ n-এর মান যত বৃদ্ধি পাইতেছে a_n-এর মান ক্রমশ ছোট হইতেছে, অর্থাৎ $a_n - 0$ এর মান ক্রমশঃ ছোট হইতেছে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যখন $n \to \infty$, তখন a_n-এর মান 0এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। ইহাকে সাংকেতিক রূপে লিখিতে পারি $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

উদা. 2. যদি $a_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}$ হয়, তবে দেখাও যে $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

এখানে যখন $n = 1$, তখন $a_n - 2 = \frac{1}{2} = \cdot 5$
,, $n = 2$, ,, $a_n - 2 = \frac{1}{4} = \cdot 25$
,, $n = 3$, ,, $a_n - 2 = \frac{1}{8} = \cdot 125$
,, $n = 4$, ,, $a_n - 2 = \frac{1}{16} = \cdot 0625$
,, $n = 5$, ,, $a_n - 2 = \frac{1}{32} = \cdot 03125$ ইত্যাদি।

অতএব লক্ষ্য করা যাইতেছে যে n-এর মান যত বৃদ্ধি পাইতেছে, $a_n - 2$ এর মান তত ক্ষুদ্র হইতেছে, এবং n-এর মান যথেষ্ট বড় হইলে, $a_n - 2$ এর মানকে যে কোন সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্র করা যাইবে।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

উদা. 3. যদি $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ হয়, তবে n-এর কোন্ ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $2 - s_n < \dfrac{1}{100}$ হইবে? [B. U. Ent. '61]

এখানে, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $= 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2}$.

সুতরাং গুণোত্তর শ্রেণীর যোগের সূত্রানুসারে,

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \; 2 - S_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

এখন $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ইত্যাদি বসাইয়া পাই,

$2-S_1=1$, $2-S_2=\frac{1}{2}$, $2-S_3=\frac{1}{4}$, $2-S_4=\frac{1}{8}$, $2-S_5=\frac{1}{16}$, $2-S_6=\frac{1}{32}$, $2-S_7=\frac{1}{64}$, $2-S_8=\frac{1}{128}$, $2-S_9=\frac{1}{256}$ ইত্যাদি।

সুতরাং n-এর ক্ষুদ্রতম মান যাহার জন্য $2-S_n<\frac{1}{100}$ হইবে তাহা হইল $n=8$.

উপরোক্ত উদাহরণে লক্ষ্য কর n-এর মনে যত বৃদ্ধি পাইতেছে, $2-S_n$ এর মান তত ক্ষুদ্র হইতেছে, এবং n-এর মান যথেষ্ট পরিমাণ বড় লইলে, $2-S_n$এর মান যে কোন সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

$\therefore$ আমরা বলিতে পারি $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$.

সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ হয়, যদি 'r'-এর পরম মান 1 হইতে ছোট হয়, অর্থাৎ যদি $|r|<1$ হয়।

$|r|<1$ এর অর্থ $-1<r<1$, অর্থাৎ r একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

যদি $n\to\infty$ হইলে a^n-এর মান ক্রমশঃ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হইতে বড় হইয়া যায়, তবে আমরা বলি $a_n\to\infty$, যখন $n\to\infty$. ইহাকে প্রতীকের সাহায্যে $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ এইরূপে প্রকাশ করি।

যেমন $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)=\infty$ ইত্যাদি।

যদি $n\to\infty$ হইলে, a_n-এর মান দুইটি নির্দিষ্ট মানের মধ্যে ক্রমান্বয়ে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে, তবে আমরা বলি a_n ঐ দুইটি নির্দিষ্ট মানের মধ্যে দোলায়মান (oscillatory)।

যেমন $a_n=1+(-1)^n$ হইলে,
$a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=0$, $a_4=2$, $a_5=0$, $a_6=2$, $a_{2n}=2$, $a_{2n+1}=0$, ইত্যাদি।

সুতরাং যখন $n\to\infty$ হয়, তখন a_n-এর মান পর্যায়ক্রমে 0 এবং 2 হয়। অতএব এখানে a_n কোন নির্দিষ্ট মানের দিকে অগ্রসর হইতেছে না। a_n-এর মান 0 এবং 2-এর মধ্যে দোলায়মান।

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ বা a_n-এর মান দোলায়মান হইলে আমরা বলি, যখন $n\to\infty$ তখন a_n-এর কোন সীমাস্থ মান নাই।

§ 9·3. অসীম শ্রেণীর যোগফল (Sum of infinite series) :

মনে কর, $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত একটি অসীম শ্রেণী। শ্রেণীটির যোগফল বাহির করিতে হইলে প্রথমে n-সংখ্যক পদ-এর যোগফল বাহির করিতে হয়।

মনে কর, s_n হইতেছে n-সংখ্যক পদের যোগফল। অর্থাৎ

$s_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ (যেমন $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+a_3$ ইত্যাদি)। এখন n-এর মানকে যদি অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি করা হয়, তখন যদি s_n-এর মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি s-এর দিকে অগ্রসর হয় তবে ঐ রাশি 's'কে অসীম শ্রেণীর যোগফল হিসাবে লওয়া হয়। অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ হইলে আমরা বলি

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots=s.$

উদাহরণ স্বরূপ

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$, এই শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে n-সংখ্যক পদ-এর যোগফল s_n বাহির করিতে হইবে।

$$\text{এখানে } s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\ 2-s_n=\frac{1}{2^{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0 \text{ যখন } n\to\infty$$

(ইহা পূর্বে দেখান হইয়াছে)

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} s_n=2, \text{ বা, শ্রেণীটির যোগফল}=2.$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots=2.$$

$s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$-এর মান সসীম হইলে, ঐ মানটিকে শ্রেণীটির যোগফল বলা হয় এবং শ্রেণীটিকে **অভিসারী** বা **Convergent** বলা হয়। অতএব কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী হইলে উহার সসীম যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব এবং বিপরীতক্রমে শ্রেণীটির সসীম যোগফল থাকিলে উহাকে অভিসারী শ্রেণী বলে।

$n\to\infty$ হইলে যদি s_n-এর কোন সীমাস্থ মান না থাকে, অর্থাৎ যদি $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$-এর মান না থাকে, তবে শ্রেণীটিকে **অপসারী** বা **Divergent** শ্রেণী বলে। এইক্ষেত্রে শ্রেণীটির কোন যোগফল থাকে না।

উদাহরণস্বরূপ $1+2+3+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n পদের যোগফল s_n হইতেছে $s_n=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

স্পষ্টতঃ n-এর মান যত বৃদ্ধি পাইবে, s_n-এর মানও তত বাড়িবে এবং n-এর মানকে যথেষ্ট বড় লইয়া s_n-এর মানকে যে কোন সংখ্যা অপেক্ষা বড় করা যাইবে।

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n=\infty$. অতএব শ্রেণীটি অপসারী এবং ইহার যোগফল বাহির করা যাইবে না। এইরূপ শ্রেণীকে বলা হয় **অসীমের দিকে অপসারী শ্রেণী (Series Divergent to ∞)**।

$1-1+1-1+1-1+\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n পদের যোগফল

$s_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^n$

$=0$ যখন n একটি যুগ্ম সংখ্যা

$=1$ যখন n একটি অযুগ্ম সংখ্যা

(কারণ, $s_1=1$, $s_2=1-1=0$, $s_3=1-1+1=1$ ইত্যাদি)

$\therefore$ s_n-এর মান 0 এবং 1-এর মধ্যে দোলায়মান।

অতএব $\lim_{n\to\infty} s_n$-এর মান নাই। সুতরাং শ্রেণীটি অপসারী। এইরূপ শ্রেণীকে **দোলায়মান (oscillatory) অসীম শ্রেণী** বলে।

দ্রষ্টব্য : (1) s_nকে অসীম শ্রেণীর n-তম আংশিক যোগফল (n-th partial sum) বলে।

(2) যদি শ্রেণীটির পদগুলি অর্থাৎ a_1, a_2, a_3 ইত্যাদি ধনাত্মক হয়, তবে s_n ক্রমান্বয়ে বর্ধিত (monotonic increasing) হইবে।

অর্থাৎ $s_1<s_2<s_3<\cdots\cdots$ ইত্যাদি হইবে।

(3) যদি n-এর যে কোন মানের জন্য s_n-এর মান একটি নির্দিষ্ট মান অপেক্ষা সর্বদা ছোট হয় তবে, s_nকে উপরের দিকে বদ্ধ (bounded above) বলা হয়।

যেমন $s_n=1+\dfrac{1}{2n}$ হইলে, n-এর যে কোন মানের জন্য $s_n<2$ হইবে।

সুতরাং s_n উপরের দিকে সীমাবদ্ধ।

যদি $s_n=n+3$ হয়, তবে s_n-এর মান উপরের দিকে বদ্ধ নহে।

(4) প্রমাণ করা যায় যদি s_n ক্রমান্বয়ে বর্ধিত প্রগতি হয় এবং s_n-এর মান উপরের দিকে বদ্ধ হয়, তবে $\lim_{n\to\infty} s_n$-এর সসীম মান পাওয়া যায়।

এই উপপাদ্যটির প্রমাণ পাঠ্য বিষয় বহির্ভূত।

(5) অনেক সময় অসীম শ্রেণীর n-তম আংশিক যোগফল s_n বাহির করা সম্ভব হয় না, সেইহেতু $\lim_{n\to\infty} s_n$-এর মান বাহির করিয়া শ্রেণীটির অভিসারিত্ব (convergence) নির্ণয় করা যায় না। কিন্তু অন্য উপায়ে শ্রেণীটি অভিসারী কিনা তাহা পরীক্ষা করা যায়। নিম্নে একটি পরীক্ষার বিবরণ দেওয়া হইল।

অসীম শ্রেণী $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$এর পদগুলি

অর্থাৎ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ইত্যাদি যদি ধনাত্মক হয়, এবং যদি $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$

হয়, তবে (i) $l<1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হইবে।

(ii) $l>1$ হইলে শ্রেণীটি অপসারী হইবে।

$l=1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী কি অপসারী তাহা সঠিকভাবে নির্ণয় করা যাইবে না।

এই উপপাদ্যটির প্রমাণও পাঠ্য বিষয় বহির্ভূত।

উদাহরণ : নিম্নলিখিত শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$$

এখানে n-তম আংশিক যোগফল $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=1$; কারণ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$\therefore$ শ্রেণীটির যোগফল 1, অর্থাৎ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\cdots=1.$$

উদা. $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots\text{to}\,\infty$ যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $S_n=1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{(10)^{n-1}}=\dfrac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}-\frac{1}{9}.\frac{1}{10^{n-1}}$

$\therefore\ S_\infty=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{10}{9}$. অতএব শ্রেণীটির যোগফল $=\frac{10}{9}$.

উদা. $1^2+2^2+3^2+\cdots\infty$ পর্যন্ত শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা কর।

এখানে $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore\ S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\infty.$

অতএব শ্রেণীটি অসীমের দিকে অপসারী। সুতরাং শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নহে।

উদা. $1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}$ অসীম পর্যন্ত শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা কর।

এখানে $S_n=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}$-এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নহে।

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n$-এর মান কত হইবে তাহা বলা যাইতেছে না। এখানে দ্রষ্টব্য (4)-এর পরীক্ষাটি প্রয়োগ করিতে হইবে।

এখানে, $a_n=\frac{1}{\lfloor n-1}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\lfloor n}$.

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n}=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

অতএব শ্রেণীটি অভিসারী। কিন্তু ইহার যোগফল কত তাহা আমরা বাহির করিতে পারিতেছি না।

§ 9·4. **অসীম গুণোত্তর শ্রেণী :**

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ হইতেছে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী। ইহার প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$. এখানে n-তম আংশিক যোগফল,

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ (পূর্বে দেখান হইয়াছে)}$$

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}, r\neq 1.$$

মনে কর $|r|<1$. পূর্বে বলা হইয়াছে, যখন $|r|<1$, তখন $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ হয়।

সুতরাং এইক্ষেত্রে $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{0}{1-r}=\frac{a}{1-r}$

$\therefore$ শ্রেণীটি অভিসারী

অতএব অসীম গুণোত্তর শ্রেণী অভিসারী হইবে (অর্থাৎ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব হইবে) যদি সাধারণ অন্তর r-এর মান -1 এবং $+1$-এর মধ্যে থাকে, অর্থাৎ যদি $-1<r<1$ হয়।

দ্রষ্টব্য : (1). $|r|>1$ হইলে, যখন $n\to\infty$ তখন $|r^n|\to\infty$ হয়, এবং সেইহেতু $\frac{a-ar^n}{1-r}\to\pm\infty$ হয়। অতএব $|r|>1$ হইলে শ্রেণীটি অপসারী হইবে।

$r=1$ হইলে, $S_n=a+a+a+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=na$.

$\therefore \quad S_\infty=\infty$, অতএব শ্রেণীটি অপসারী।

$r=-1$ হইলে, শ্রেণীটি হইবে $a-a+a-a+\cdots$আকারে

এখানে $S_n=0$, যখন n যুগ্ম সংখ্যা

$=a$, যখন n অযুগ্ম সংখ্যা ;

অতএব শ্রেণীটি দোলায়মান এবং অপসারী।

$\therefore \quad |r|<1$-এর জন্যই অসীম গুণোত্তর শ্রেণী অভিসারী হয়, r-এর অন্য কোন মানের জন্য শ্রেণীটি অপসারী হয়।

(2) অসীম সমান্তর শ্রেণী সর্বদাই অপসারী। কারণ, মনে কর $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\cdots$একটি অসীম সমান্তর শ্রেণী।

এখানে, $S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)$

$$=\frac{n}{2}\times\{2a+(n-1)d\}\to\infty, \text{ যখন } d\to\infty$$

$\therefore$ শ্রেণীটি অপসারী। অসীম বিপরীত শ্রেণীও সর্বদা অপসারী।

§ 9·5. ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক-সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য :

n-এর যে-কোন মানের জন্য অসীম শ্রেণী

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots+\cdots+\cdots$$

অভিসারী হইবে যদি $|x|<1$ হয় এবং তখন শ্রেণীটির যোগফল হইবে $(1+x)^n$।

অর্থাৎ $1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots+\cdots$

$$=(1+x)^n, \text{ যখন } |x|<1 \text{ (বা } -1<x<1\text{)}.$$

শ্রেণীটির অভিসারিত্বের প্রমাণ সহজেই নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

উপরোক্ত শ্রেণীর r-তম পদ $=a_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1}x^{r-1}$

$$(r+1)\text{-তম পদ}=a_{r+1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$\therefore \quad \frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{\lfloor r}\times\frac{\lfloor r}{n(n-1)\cdots(n-r+2)}\cdot\frac{x^r}{x^{r-1}}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}\cdot x$$

$$\therefore \quad \left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|=\left|\frac{\frac{n+1}{r}-1}{1}\right|\,|x|\to|x|, \text{ যখন } r\to\infty$$

কারণ, $\frac{n+1}{r}\to 0$ হয়, যখন $r\to\infty$

$$\therefore \quad \lim_{r\to\infty}\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|=|x|$$

এখন আমরা জানি যদি $\lim_{r\to\infty}\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|<1$ হয়, তবে শ্রেণীটি অভিসারী হয়।

$\therefore$ এখানে $\lim_{r\to\infty}\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}\right|=|x|<1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী,

>1 হইলে শ্রেণীটি অপসারী।

$|x|=1$ হইলে শ্রেণীটির অভিসারিত্ব সম্বন্ধে কোন সিদ্ধান্তে পৌছান যায় না।

প্রমাণ করা যায় শ্রেণীটির যোগফল $(1+x)^n$।

প্রমাণ পাঠ্য বিষয় বহির্ভূত।

[দ্রষ্টব্য : (1) উপপাদ্যটিকে অনেক সময় সাধারণ দ্বিপদ উপপাদ্য (general binomial theorem) বলে।]

(2) n যখন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা তখন উপরোক্ত শ্রেণীর পদসংখ্যা সসীম হইবে, কারণ $(n+1)$-তম পদ $=\frac{n(n-1)\cdots(n-n)}{\lfloor n}x^n=0$, এবং পরবর্তী পদ সমূহে $(n-n)$ উৎপাদকটি থাকার জন্যে শূন্য হইবে।

(3) সাধারণ দ্বিপদ উপপাদ্যের সহগগুলি, যথা

$n, \frac{n(n-1)}{r}, \ldots\ldots \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}, \cdots$ গুলিকে $^nC_1, {}^nC_2, \cdots, {}^nC_r$ আকারে লেখা যায় না। কারণ, $^nC_1$, $^nC_2, \cdots, {}^nC_r$ ইত্যাদির সংজ্ঞা n-এর অখণ্ড ধনাত্মক মানের জন্য দেওয়া হইয়াছে।

$x=1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি (if and only if) $n>-1$ এবং $x=-1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি $n>0$ হয়।

§ 9·6. সাধারণ পদ নির্ণয় :

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে $(r+1)$-তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয় এবং উহা সংক্ষেপে t_{r+1} দ্বারা সূচিত হয়।

$$\because \quad (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\ \ldots\ldots,$$

$$\therefore \quad t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

অতএব, (i) $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}.(-x)^r$$
$$=(-1)^r.\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

(ii) $(1+x)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$
$$=(-1)^r.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

[এখানে লবের মোট উৎপাদক সংখ্যা r এবং $-n=-1\times n$, $(-n-1)=-1\times(n+1)\cdots$; অতএব r সংখ্যক (-1) গুণ করিয়া হইল $(-1)^r$.]

(iii) $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)$$
$$=(-1)^r.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r x$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$[\because (-1)^r\times(-1)^r=(-1)^{2r}=1\ ]$$

$(1-x)^{-n}$-এর সাধারণ পদ দেখিয়া বুঝা যাইতেছে যে এই বিস্তৃতির প্রত্যেক পদই ধনাত্মক।

§ 9·7. বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

§ 8·11এ প্রদর্শিত প্রণালীতে যে কোন বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যাইবে। উদাহরণমালা 9 (A) দেখ।

§ 9·8. n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সংখ্যা হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

n যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা না হয়, এবং যদি $x<a$ হয়, তবে $(a+x)^n$কে $\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$ এই আকারে লিখিবে ; আর যদি $x>a$ হয়, তবে $(a+x)^n$ কে $\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$ এই আকারে লিখিবে।

(i) মনে কর, $x<a$, সুতরাং $\frac{x}{a}<1$.

$$\text{অতএব, } (a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$
$$=a^n\left\{1+n\cdot\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$
$$=a^n+n.a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}x^2+\cdots$$

(ii) মনে কর, $x>a$, সুতরাং $\frac{a}{x}<1$.

$$\text{অতএব, } (a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$
$$=x^n\left\{1+n\cdot\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$=x^n+n.x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}a^2+\cdots$$

§ 9·9. নিম্নের দ্বিপদ উপপাদ্যগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি মনে রাখিতে হইবে।

(1). $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2-\cdots$
$$+(-1)^r\frac{n(n-1)(-2)\cdots n(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots$$

(2). $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2-\cdots$
$$+(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r}x^r+\cdots$$

(3). $(1-x)^{-n}=1+nx+\dfrac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots$

$+\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$

(4). $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^r x^r+\cdots$

(5). $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots\cdots$

(6). $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots$

[দ্রষ্টব্য : এখানে দেখা গেল যে x ধনাত্মক এবং n ঋণাত্মক হইলে বিস্তৃতির পদগুলি একান্তরভাবে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয়। আর, x ও n উভয়েই ঋণাত্মক হইলে বিস্তৃতির সকল পদই ধনাত্মক হয়।]

উদাহরণমালা 9A

উদা. 1. চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তার কর :

(i) $(1+3a)^{-2}$, (ii) $(1-x)^{\frac{3}{4}}$, (iii) $(4-3a)^{\frac{3}{2}}$, (iv) $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$

(i) $(1+3a)^{-2}=1+(-2)(3a)+\dfrac{-2(-2-1)}{\lfloor 2}(3a)^2$

$+\dfrac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3}(3a)^3+\cdots\cdots$

$=1-6a+\dfrac{2.3}{2.1}.9a^2-\dfrac{2.3.4}{1.2.3}\cdot 27a^3+\cdots\cdots$

$=1-6a+27a^2-108a^3+\cdots\cdots$

(ii) $(1-x)^{\frac{3}{4}}=1+\frac{3}{4}(-x)+\dfrac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)}{\lfloor 2}(-x)^2$

$+\dfrac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)(\frac{3}{4}-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$

$=1-\frac{3}{4}x-\dfrac{3.1}{4.4.2.1}x^2-\dfrac{3.1.5}{4.4.4.3.2}x^3-\cdots$

$=1-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2-\frac{5}{128}x^3-\cdots\cdots$

(iii) $(4-3a)^{\frac{3}{2}}=\{4(1-\frac{3}{4}a\}^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}(1-\frac{3}{4}a)^{\frac{3}{2}}$

$=8(1-\frac{3}{4}a)^{\frac{3}{2}}$ $[\because\ 4^{\frac{3}{2}}=8]$

$=8\left\{1+\frac{3}{2}(-\frac{3}{4}a)+\dfrac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{\lfloor 2}(-\frac{3}{4}a)^2+\dfrac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{\lfloor 3}\left(-\dfrac{3a}{4}\right)^3+\cdots\right\}$

$=8\left\{1-\dfrac{9}{8}a+\dfrac{3.1}{2.2.2.1}\cdot\dfrac{9}{16}a^2+\dfrac{3.1.1}{2.2.2.3.2}\cdot\dfrac{27}{64}a^3+\cdots\cdots\right\}$

$=8-9a+\frac{27}{16}a^2+\frac{27}{128}a^3+\cdots\cdots$

(iv) $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=1+(-\frac{3}{2})(-2x)+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{\lfloor 2}(-2x)^2$

$+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{\lfloor 3}(-2x)^3+\cdots\cdots$

$=1+3x+\frac{3.5}{2.2.2}\cdot 4x^2+\frac{3.5.7}{2.2.2.3.2}.8x^3+\cdots\cdots$

$=1+3x+\frac{15}{2}x^2+\frac{35}{2}x^3+\cdots\cdots$

উদা. 2. $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তার কর :

$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}=\frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$

$=1+\left(-\frac{2}{3}\right)(-3x)+\frac{-\frac{2}{3}(-\frac{2}{3}-1)}{\lfloor 2}(-3x)^2$

$+\frac{-\frac{2}{3}-(\frac{2}{3}-1)(-\frac{2}{3}-2)}{\lfloor 3}(-3x)^3+\cdots\cdots$

$=1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots\cdots$

উদা. 3. $(1-x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির সপ্তম ও $(r+1)$-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।

এখানে নির্ণেয় $t_7=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)(\frac{1}{2}-5)}{\lfloor 6}(-x)^6$

$=-\frac{1.1.3.5.7.9}{2^6\lfloor 6}.x^6=-\frac{21}{2^{10}}x^6=-\frac{21}{1024}x^6$;

এবং নির্ণেয় $t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$

$=(-1)^r.\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}x^r$

$=(-1)^r(-1)^{r-1}\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r.\lfloor r}x^r=-\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r.\lfloor r}x^r.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে প্রথমে t_{r+1} নির্ণেয় করিয়া r-এর স্থানে 6 বসাইলে t_7 পাওয়া যাইত।]

উদা. 4. দেখাও যে, $(p-q)^n$

$=p^n\left\{1-n\left(\frac{q}{p-q}\right)+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{q}{p-q}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$

$(p-q)^n=\frac{1}{(p-q)^{-n}}=\frac{p^n\times p^{-n}}{(p-q)^{-n}}\left[\because\ p^n\times p^{-n}=p^0=1\right]$

$=p^n\left(\frac{p}{p-q}\right)^{-n}=p^n\left(1+\frac{q}{p-q}\right)^{-n}$

$=p^n\left\{1-n\left(\frac{q}{p-q}\right)+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{q}{p-q}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$

উদা. 5. $\frac{1}{(1+x^2)^3}$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদটি নির্ণয় কর।

$\frac{1}{(1+x^2)^3}=(1+x^2)^{-3}$. $\therefore$ এখানে $(1+x^2)^{-3}$-এর সাধারণ পদ

বা, $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ পদ

$$=t_{r+1}=\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-r+1)}{\lfloor r}(x^2)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{3.4.5\cdots(r+2)}{\lfloor r}x^{2r}$$

$$=(-1)^r.\frac{2.3.4.5\cdots r(r+1)(r+2)}{2\lfloor r}x^{2r}$$

$$=(-1)^r.\frac{\lfloor r(r+1)(r+2)}{2\lfloor r}x^{2r}=(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^{2r}.$$

উদা. 6. $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$ এর বিস্তৃতিতে x^rএর সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদে x^r থাকিবে।

$$\text{এখানে } t_{r+1}=\frac{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)\left(-\frac{1}{n}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}-r+1\right)}{\lfloor r}(-nx)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{n^r\lfloor r}(-1)^r n^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r$$

$$\therefore\ x^r\text{-এর নির্ণেয় সহগ}=\frac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}$$

$[\because\ (-1)^{2r}=1]$

উদা. 7. $\frac{1-x}{(1+x)^2}$-এর বিস্তৃতিতে x^{20}-এর সহগ নির্ণয় কর :

$$\frac{1-x}{(1+x)}=(1-x)(1+x)^{-2}=(1+x)^{-2}-x(1+x)^{-2},$$

এখানে $x(1+x)^{-2}$ হইতে দেখা যায় যে, $(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে যে পদে x^{19} আছে, তাহার সহিত x-এর গুণ হইলে গুণফলে x^{20} থাকিবে।

অতএব, $(1+x)^{-2}$ বিস্তৃতির x^{20}-এর সহগ হইতে $(1+x)^{-2}$ বিস্তৃতির x^{19}-এর সহগ বিয়োগ করিলে প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতিতে x^{20}-এর সহগ পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে $(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে x^{20}-এর সহগ

$$=(-1)^{20}\frac{2.3.4\cdots(2+20-1)}{\lfloor 20}=21$$

এবং $(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে x^{19}এর সহগ

$$=(-1)^{19}\frac{2.3.4\cdots(2+19-1)}{\lfloor 19}=-20.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=21-(-20)=21+20=41.$

উদা. 8. x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে x^5 পর্যন্ত $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$-এর বিস্তার নির্ণয় কর।

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1-x^2)}}=(1-x)\times\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(1-x)(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots)$$

$$=1-x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{3}{8}x^4-\tfrac{3}{8}x^5.$$

উদা. 9. x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে $\dfrac{2x-5}{9-6x+x^2}$এর বিস্তৃতিতে x^r ও x^3-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\frac{2x-5}{9-6x+x^2}=\frac{2x-5}{(3-x)^2}=\frac{2x-5}{9\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\left(2x-5\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{9}\left(2x-5\right)\left(1+2\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{3^2}+4\cdot\frac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+r.\frac{x^{r-1}}{3^{r-1}}+(r+1).\frac{x^r}{3^r}+\cdots\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় x^rএর সহগ $=\dfrac{1}{9}\cdot\left(2\cdot\dfrac{r}{3^{r-1}}-5\cdot\dfrac{r+1}{3^r}\right)$

$$=\frac{1}{3^2}\left(\frac{2r}{3^{r-1}}-\frac{5r+5}{3^r}\right)=\frac{2r}{3^{r+1}}-\frac{5r+5}{3^{r+2}}=\frac{6r-5r-5}{3^{r+2}}=\frac{r-5}{3^{r+2}}.$$

এক্ষণে r-এর মান 3 ধরিয়া পাই x^3-এর সহগ $=\dfrac{3-5}{3^5}=\dfrac{-2}{243}=-\dfrac{2}{243}.$

উদা. 10. $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\infty$ পর্যন্ত$)^{\frac{1}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^8-এর সহগ নির্ণয় কর :

$$(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots)^{\frac{1}{3}}=\{(1+x)^{-3}\}^{\frac{1}{3}}=(1+x)^{-1}.$$

এস্থলে, $(1+x)^{-1}$এর $(r+1)$-তমপদ $=(-1)^r.\frac{1.2.3\cdots r}{\lfloor r}x^r$

$$=(-1)^r\frac{\lfloor r}{\lfloor r}x^r=(-1)^r x^r.$$

$\therefore$ x^r-এর নির্ণেয় সহগ $=(-1)^r$;

আবার, $r=8$ ধরিলে x^8-এর সহগ $=(-1)^8=1$.

উদা. 11. $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$এর বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ কোনটি এবং তাহার সহগ কত ?

$(1+x)^n$এর $(r+1)$-তমপদ $=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$

এই সাধারণ পদ হইতে দেখা যাইতেছে যে, যে পর্যন্ত $r<n+1$ থাকিবে সে পর্যন্ত ঐ বিস্তৃতির পদগুলি ধনাত্মক হইবে।

অতএব, এখানে পদগুলি ধনাত্মক থাকিবে যে পর্যন্ত $r<\frac{7}{2}+1$ অর্থাৎ $r<4\frac{1}{2}$ থাকিবে।

$\because$ r অখণ্ড সংখ্যা, $\therefore$ প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে যখন $r>4\frac{1}{2}$ হইবে, অর্থাৎ যখন $r=5$ হইবে।

অতএব, এখানে ষষ্ঠ পদটিই প্রথম ঋণাত্মক পদ।

উহার নির্ণেয় সহগ $=\frac{\frac{7}{2}(\frac{7}{2}-1)(\frac{7}{2}-2)(\frac{7}{2}-3)(\frac{7}{2}-4)}{\lfloor 5}.2^5$

$$=\frac{7.5.3.1(-1)}{2^5\lfloor 5}.2^5=-\frac{7.5.3}{5.4.3.2}=-\frac{7}{8}.$$

উদা. 12. $x=\frac{3}{5}$ হইলে, $(1+x)^{\frac{13}{2}}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{\frac{13}{2}-r+1}{r}.x=\frac{\frac{15}{2}-r}{r}.\frac{3}{5}=\frac{45-6r}{10r}.$

অতএব, $t_{r+1}>t_r$ যতক্ষণ $45-6r>10r$ বা $45>16r$,

অর্থাৎ যতক্ষণ $r<2\frac{13}{16}$. অতএব, এখানে r-এর বৃহত্তম মান 2 হইতে পারে। $\therefore$ t_3 বা তৃতীয় পদটি বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $=\frac{\frac{13}{2}(\frac{13}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2=\frac{13.11}{2.2.2}x^2=\frac{143}{8}x^2.$

উদা. 13. $x=\frac{5}{7}$ ও $n=\frac{8}{5}$ হইলে $(1-x)^{-n}$এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ কোনটি।

$(1-x)^{-n}$এর $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n+r-1}{r}.x$ (সাংখ্যমান)

$$=\frac{\frac{5}{3}+r-1}{r}\cdot\frac{6}{7}=\frac{\frac{2}{3}+r}{r}\cdot\frac{6}{7}=\frac{4+6r}{7r}.$$

অতএব, $t_{r+1}>t_r$ যতক্ষণ $4+6r>7r$ হয়, অর্থাৎ যতক্ষণ $r<4$ হয়। এখানে r-এর মান 3 পর্যন্ত হইলে $t_{r+1}>t_r$ হইবে এবং $r=4$ হইলে $4+6r=7r$ হয় বলিয়া $t_{r+1}=t_r$ হইবে।

∴ এখানে t_4 ও t_5 অর্থাৎ চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দুইটি বৃহত্তম পদ।

উদা. 14. প্রমাণ কর : $(1+x+x^2+\cdots\infty$ পর্যন্ত$)(1-x+x^2-\cdots\infty$ পর্যন্ত$)=1+x^2+x^4+\cdots\infty$ পর্যন্ত.

প্রদত্ত বামপক্ষ $=(1-x)^{-1}\times(1+x)^{-1}$

$=(1-x^2)^{-1}=1+x^2+x^4+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

উদা. 15. দেখাও যে, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1+\frac{x}{1+x}+\frac{2}{x}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{(1+x)-2x}{1+x}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

উদা. 16. যদি $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots$হয়, তবে x-কে তৃতীয় পদ পর্যন্ত y-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতবিশিষ্ট শ্রেণীতে প্রকাশ কর। [C. U. '31]

$\because\ y=2x+3x^2+4x^3+\cdots$

$\therefore\ 1+y=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=(1-x)^{-2}$

$\therefore\ (1-x)=(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\frac{1}{2})y+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}.y^2$

$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}y^3+\cdots$

বা, $1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\cdots$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\cdots$

প্রশ্নমালা 9A

প্রথম চারিটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

1. $(1+x)^{-4}$ 2. $(1-x)^{-3}, |x|<1$

3. $(1+2x)^{-5}$ 4. $(1-x)^{\frac{3}{5}}$ 5. $(1+3x)^{-\frac{1}{2}}$

6. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$ 7. $(2+a)^{-3}$ 8. $\sqrt[3]{1-x}$ [C.U. '11]

9. $(a-2x)^{-\frac{5}{2}}$ 10. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3a)^2}}$ 11. $\dfrac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}$ [C.U.]

12. x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতযুক্ত $\sqrt{1+x}$এর বিস্তৃতির প্রথম 4টি পদ নির্ণয় কর।

13. $\sqrt{(1+x+x^2+x^3+\cdots\infty)}$কে x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

নিম্নের নির্দিষ্ট পদগুলি নির্ণয় কর :

14. $(1+a)^{-2}$-এর চতুর্থ এবং $(r+1)$-তম পদ।

15. $(8+12x)^{\frac{2}{3}}$-এর চতুর্থ পদ।

16. $(1-x)^{-3}$-এর অষ্টম ও $(r+1)$-তম পদ।

17. $(a-bx)^{-1}$ এর $(r+1)$-তম পদ।

18. $(a-x)^{-\frac{1}{n}}$-এর r-তম পদ। [C.U.]

19. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ এর r-তম পদ। [C.U.]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বিস্তারের সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

20. $(1+a^2)^{-3}$. 21. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. 22. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2a}}$, (ii) $\dfrac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$

23. $(1-x)^{-2}$কে বিস্তৃত কর ও উহার সাধারণ পদ নির্ণয় কর। [C.U. '13]

24. $(1-x)^{-4}$এর প্রথম পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি ও $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় কর। [C.U. '16]

25. $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$এর 4টি পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর। [C.U. '31]

সহগ নির্ণয় কর :

26. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^3-এর সহগ।

27. $\frac{1-a}{(1+a)^3}$ এর বিস্তৃতিতে a^{50} এর সহগ।

28. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ। [C U. '37]

29. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ।

30. $\frac{1-2x}{3+2x-x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ। [C. U. 1909]

31. $\frac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ। [C. U. '39]

32. $\frac{4x-9}{4-4x+x^2}$ এর x-এর উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতিতে x^r ও x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

33. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\infty$ পর্যন্ত$)^2$ এর বিস্তৃতিতে xএর সহগ নির্ণয় কর।

34. $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{-n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

নিম্নের বিস্তৃতিতে কোন্‌টি বৃহত্তম পদ তাহা নির্ণয় কর।

35. $(1+x)^{-5}$ যখন $x=\frac{5}{8}$. 36. $(1+x)^{\frac{9}{2}}$ যখন $x=\frac{2}{3}$.

37. $(2+3x)^{-n}$ যখন $x=\frac{1}{2}$ এবং $n=3\frac{2}{3}$.

38. $(3-4a)^{-\frac{11}{4}}$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সহগটি নির্ণয় কর।

39. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ কোন্‌টি :

(i) $(1+2x)^{\frac{15}{2}}$, (ii) $(1-x)^{\frac{2}{3}}$ এবং (iii) $(1+\frac{7x}{2})^{-\frac{13}{2}}$

[P. U. '47]

40. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে প্রথম ঋণাত্মক পদটি নির্ণয় কর :

(i) $(1+2a)^{\frac{5}{2}}$ এবং (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, দেওয়া আছে $x>1$.

41. $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদের সহগ নির্ণয় কর।

[C. U. '38]

42. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ এর কোন্ পদটি $(1-x^{\frac{1}{2}}$ এর সেই পদের 15 গুণ ?

43. যদি সাংখ্যমানে $x<1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(1+x+x^2+\cdots\infty)^2=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

[G. U. '49 ; C. U. '22]

44. প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{-n}$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{1+n\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\cdots\right\}$$ [C. U. '14]

45. প্রমাণ কর যে, $$\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^n=1+n\cdot\left(\frac{x}{1+2x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2+\cdots$$

46. দেখাও যে, $$\sqrt{x}-1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1.3}{2^2\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots$$

47. যদি $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতিতে P বিযুগ্ম স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি এবং Q যুগ্ম স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P^2-Q^2=(a^2-b^2)^n$.

48. যদি c এরূপ একটি ক্ষুদ্র রাশি হয় যে l^3 এর তুলনায় c^3কে উপেক্ষা করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে $\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}$ প্রায় $2+\frac{3c^2}{4l^2}$ এর সমান। [C. U. 1888]

§ 9·10. দ্বিপদ উপপাদ্যের বিবিধ প্রয়োগ

আসন্ন মান, অসীম রাশির যোগফল, ভগ্নাংশের বিস্তৃতি প্রভৃতি নির্ণয়ে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ প্রয়োজনীয়।

§ 9·11. **আবৃত্ত দশমিক** (recurring decimal) : আবৃত্ত দশমিক একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী। যথা,

(i) $\dot{\cdot 7}=\cdot 777\cdots\infty$ পর্যন্ত $=\cdot 7+\cdot 07+\cdot 007+\cdots\infty$ পর্যন্ত

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী, যাহার প্রথম পদ $a=\frac{7}{10}$, এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{1}{10}$.

(ii) $\cdot 2\dot{1}\dot{3}=\cdot 2131313\cdots\infty$ পর্যন্ত

$$=\cdot 2+\cdot 013+\cdot 00013+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=\frac{2}{10}+\left(\frac{13}{10^3}+\frac{13}{10^5}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}\right),$$ ইহার দ্বিতীয় পদ হইতে বাকী পদগুলি একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $=\frac{13}{10^3}$ এবং $r=\frac{1}{10}$.

অতএব, অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়ের প্রণালীতে আবৃত্ত দশমিককে ভগ্নাংশে প্রকাশ বা তাহার মান নির্ণয় করা যায়।

§ 9·12. **আসন্ন মান নির্ণয়** (approximate value)—কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের ঘাত যত বাড়ে তাহার মান তত ক্ষুদ্রতর হয়। যথা, $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা $(\frac{1}{2})^2$ ক্ষুদ্রতর, $(\frac{1}{2})^3$ আবার $(\frac{1}{2})^2$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ইত্যাদি।

অতএব, $x<1$ হইলে অর্থাৎ প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে $x^2, x^3, x^4, \cdots$ প্রভৃতির মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইয়া থাকে।

এক্ষণে দেখ, x কোন অতি ক্ষুদ্র প্রকৃত ভগ্নাংশ সংখ্যা হইলে $1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots$এর পর পর পদগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। অতএব, যদি x^3, x^4, x^5 প্রভৃতির মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ার জন্য $\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3$ প্রভৃতি পদগুলি উপেক্ষা করা চলে, তবে ঐ অসীম রাশিটির অর্থাৎ $(1+x)^n$ বিস্তৃতির মান প্রথম তিনটি পদের সমষ্টির প্রায় সমান হইবে। উহাকে ঐ বিস্তৃতির আসন্ন মান ধরা যায়।

এইরূপে যদি x-এর দ্বিঘাত ও তাহার বৃহত্তর ঘাতগুলি অতি ক্ষুদ্র বলিয়া বাদ দেওয়া চলে, তবে $(1+x)^n$ এর আসন্ন মান $1+nx$ হইবে। এই নিয়ম অনুসারে কোন সংখ্যার যে কোন মূল (আসন্ন) প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

অতএব, a, b, c যদি এরূপ ক্ষুদ্র হয় যে উহাদের বর্গ বা উহাদের যে কোন দুইটির গুণফল উপেক্ষা করা যায়, তবে আসন্ন মানে ধরা যায় :

(i) $(1+a)(1+b)=1+a+b$ (ii) $(1+a)(1-b)=1+a-b$

(iii) $(1+a)^2=1+2a$ (iv) $(1-a)^2=1-2a$

(v) $(1+a)^3=1+3a$ (vi) $\sqrt{1+a}=1+\frac{1}{2}a.$

(vii) $\sqrt{1-a}=1-\frac{1}{2}a$ (viii) $\frac{1}{1+a}=1-a$

(ix) $(1+a)(1+b)(1+c)=1+a+b+c$, ইত্যাদি।

উপরের আলোচিত বিষয়গুলির প্রয়োগ পরবর্তী উদাহরণমালায় দেখ।

উদাহরণমালা 9B

উদা. 1. যোগফল নির্ণয় কর $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

এখানে সূত্র অনুসারে, $a=1$, $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$.

$$\therefore\ S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 2. যোগফল নির্ণয় কর $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

[C. U. '22]

মনে কর, যোগফল S.

$$\therefore\ S=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\cdots\right)+\left(\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}+\frac{3}{25}\times\frac{25}{24}=\frac{5}{12}+\frac{1}{8}=\frac{13}{24}.$$

উদা. 3. যোগফল নির্ণয় কর $(\sqrt{2}+1)+(1)+(\sqrt{2}-1)+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

এখানে $a=\sqrt{2}+1$ এবং $r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{2}-1$

$$\therefore\ S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}=2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\ldots\ldots\infty$ পর্যন্ত $=a$.
[C. U. ; G. U.]

এখানে $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$

এক্ষণে, $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\cdots\infty$ পর্যন্ত $=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\infty\text{ পর্যন্ত}}=a^1=a.$

দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগে অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় :

উদা. 5. যোগফল নির্ণয় কর :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{4}{8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\infty\text{ পর্যন্ত।}$$

[**দ্রষ্টব্য :** দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিতে হইলে প্রথমে শ্রেণীটিকে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির আকারে পরিণত করিতে হইবে।]

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী $=1+\frac{1}{3}.\frac{3}{4}+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{1.2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots$

$$=(1-\tfrac{3}{4})^{-\frac{1}{3}}=(\tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}.$$

[সংকেত : দ্বিপদ বিস্তৃতির সহগগুলির লবে পর পর উৎপাদকগুলি এমন একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, যাহার সাধারণ অন্তর সূচকের হরের সমান।]

উদা. 6. যোগফল নির্ণয় কর : $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{8}+\ldots\infty$ পর্যন্ত।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$$

$$=(1+\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{3}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

উদা. 7. $1-\frac{1}{6}+\frac{1.3}{6.12}-\frac{1.3.5}{6.12.18}\cdots$,কে একটি দ্বিপদ রাশির ঘাতরূপে প্রকাশ করিয়া যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী,

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$$

$=(1+\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, ইহা একটি দ্বিপদ রাশি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=(1+\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{4}{3})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদা. 8. দেখাও যে, $\sqrt{3}=1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

$$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$=1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

উদা. 9. দেখাও যে, $\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$

[Annamalai '41]

বামপক্ষের প্রত্যেক পদকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া এবং তৎপরে সমগ্র গুণফলকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1}{3}\left\{\frac{3.5}{3.6}+\frac{3.5.7}{3.6.9}+\frac{3.5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{1+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right\}-1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{3}[\{(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{3}{2}}\}-2]=\tfrac{1}{3}\{(\tfrac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}-2\}=\tfrac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-2)=\tfrac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$$

উদা. 10. যদি x এত ক্ষুদ্র হয় যে x-এর ত্রিঘাত ও ঊর্ধ্বতর ঘাতগুলি উপেক্ষা করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{(1+3x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}=3x^2.$$

$$\frac{1}{(1+3x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}=(1+3x)^{-2}-(1+2x)^{-3}$$

$$=\left\{1-2.3x+\frac{2.3}{\lfloor 2}(3x)^2+\cdots\right\}-\left\{1-3.2x+\frac{3.4}{\lfloor 2}(2x)^2+\cdots\cdots\right\}$$

[x^3 উপেক্ষণীয় বলিয়া বিস্তৃতির পরবর্তী পদগুলি আর ধরিতে হইবে না।]

$$=(1-6x+27x^2+\cdots)-(1-6x+24x^2+\cdots)=3x^2.$$

উদা. 11. $(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$ সংখ্যক পদের সহগ গুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, $(1-x)^{-4}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots$ .. (1)

অতএব এখানে $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_r$ এর মান নির্ণয় করিলেই নির্ণেয় সমষ্টি পাওয়া যাইবে।

আমরা জানি $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r+\cdots$ ...(2)

এক্ষণে, নির্ণেয় সমষ্টি $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_r$

= (1) ও (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r এর সহগ

$=(1-x)^{-4}\times(1-x)^{-1}$এর x^r এর সহগ

$=(1-x)^{-5}$এর x^r এর সহগ

$$=\frac{5.6.7\ldots(5+r-1)}{\lfloor r}=\frac{5.6.7\ \ (4+r)}{\lfloor r}=\frac{1.2.3.4.5.6.7\ldots(r+4)}{1.2.3\ 4\lfloor r}$$

$$=\frac{\lfloor r.(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2\ 3.4\lfloor r}=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{24}$$

[আবৃত্ত দশমিক]

উদা. 12, $\dot{5}$কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীরূপে প্রকাশ কর এবং তাহা হইতে ভগ্নাংশে উহার মান নির্ণয় কর।

$\cdot\dot{5}=\cdot555\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=\cdot5+\cdot05+\cdot005+\cdots\cdots\infty$পর্যন্ত

$=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\cdots\infty$ পর্যন্ত ; ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী

ইহার প্রথম পদ $\frac{5}{10}$ এবং সাধারণ অনুপাত $=\frac{1}{10}$.

$$\therefore\ \cdot\dot{5}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}.$$

উদা. 13. দেখাও যে $\cdot1\dot{6}$ একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমান এবং তাহা হইতে উহার মান নির্ণয় কর।

$\cdot 1\dot{6} = \cdot 1666 \cdots \infty$ পর্যন্ত $= \cdot 1 + \cdot 06 + \cdot 006 + \cdot 0006 + \cdots \infty$ পর্যন্ত

$= \frac{1}{10} + \left(\frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত}\right)$ বন্ধনীর মধ্যবর্তী শ্রেণীটি একটি গুণোত্তর শ্রেণী যাহার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{10}$ এবং প্রথম পদ $\frac{6}{10^2}$.

$$\therefore \quad \cdot 1\dot{6} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

[আসন্ন মান]

উদা. 14. দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগে $(1\cdot 02)^5$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

$$(1\cdot 02)^5 = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^5 = \left(1 + \frac{2}{10^2}\right)^5$$

$$= 1 + 5 \cdot \frac{2}{10^2} + \frac{5.4}{\lfloor 2} \cdot \frac{2^2}{10^4} + \frac{5.4.3}{\lfloor 3} \cdot \frac{2^3}{10^6} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^3} + \frac{8}{10^5} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \cdot 1 + \cdot 004 + \cdot 00008 + \cdots$$

$= 1\cdot 104$ (আসন্ন 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)।

দ্রষ্টব্য : এখানে 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণেয় বলিয়া বিস্তৃতির অবশিষ্ট পদগুলি বাদ দেওয়া হইল।

উদা. 15. দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত 122 এর আসন্ন ঘনমূল নির্ণয় কর।

122-এর নিকটতম তৃতীয় ঘাত $= 125 = 5^3$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{122} = (122)^{\frac{1}{3}} = (125 - 3)^{\frac{1}{3}} = (5^3 - 3)^{\frac{1}{3}} = \left\{5^3\left(1 - \frac{3}{5^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5\left(1 - \frac{3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left\{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5^3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3^2}{5^6} - \frac{5}{81} \cdot \frac{3^3}{5^9} - \cdots\cdots\right\}$$

$$= 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3^2}{5^5} - \frac{1}{81} \frac{3^3}{5^7} - \cdots\cdots$$

$$= 5 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^7} - \cdots\cdots$$

$$= 5 - \frac{2^2}{10^2} - \frac{2^5}{10^5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^7}{10^7} - \cdots\cdots$$

$$= =5-{}^{\cdot}04-{}^{\cdot}00032-\frac{{}^{\cdot}0000128}{3}-\ldots\ldots$$

$$=5-{}^{\cdot}04={}^{\cdot}00032-{}^{\cdot}0000042-\ldots\ldots$$

$$=5-{}^{\cdot}0403242=4{}^{\cdot}9597$$ (আসন্ন 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)।

উদা. 16. (*i*) আসন্ন 5 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{465}{10003}$-এর এবং (*ii*) আসন্ন 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{(1{}^{\cdot}0002)^3}{({}^{\cdot}9993)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

(i). $$\frac{465}{10003}=\frac{465}{(10000+3)}=\frac{465}{10^4(1+{}^{\cdot}0003)}=\frac{{}^{\cdot}0465}{(1+{}^{\cdot}0003)}$$

$$={}^{\cdot}0465(1+{}^{\cdot}0003)^{-1}={}^{\cdot}0465(1-{}^{\cdot}0003)$$ [আসন্ন]

$$={}^{\cdot}0465-{}^{\cdot}00001395={}^{\cdot}04649$$ [আসন্ন]

(ii). $(1{}^{\cdot}0002)^3=(1+{}^{\cdot}0002)^3=1+3\times{}^{\cdot}0002=1+{}^{\cdot}0006$ [আসন্ন]

$({}^{\cdot}9993)^2=(1-{}^{\cdot}0007)^2=1-2\times{}^{\cdot}0007=1-{}^{\cdot}0014$ [আসন্ন]

∴ নির্ণেয় ভাগফল $=\frac{1+{}^{\cdot}0006}{1+{}^{\cdot}0014}=(1+{}^{\cdot}0006)(1-{}^{\cdot}0014)^{-1}$

$$=(1+{}^{\cdot}0006)(1+{}^{\cdot}0014)$$

$$=(1+{}^{\cdot}0006+{}^{\cdot}0014)$$ [আসন্ন]

$$=1{}^{\cdot}0020$$ [দশমিক 4 অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ]

[দ্রষ্টব্য : উপরের সমাধানে § 9·12-র যুক্তি প্রয়োগ করা হইয়াছে (*i*)-এ $(1+{}^{\cdot}0003)^{-1}$ এর বিস্তৃতির মাত্র প্রথম দুইটি পদ এবং (ii)-এ লব ও হরের বিস্তৃতির প্রথম দুইটি করিয়া পদ লওয়া হইয়াছে ; কারণ, আসন্ন মানের জন্য পরবর্তী পদগুলি উপেক্ষা করা চলে। অতএব, ঐগুলিতে $(1+x)^n=1+nx$ ধরা হইয়াছে। আর (ii)-এ $(1+{}^{\cdot}0006)(1+{}^{\cdot}0014)$ এর গুণফলে ${}^{\cdot}0006\times{}^{\cdot}0014$টি ধরা হয় নাই, কারণ, ঐ গুণফল ${}^{\cdot}00000084$ এর প্রথম ছয় অঙ্ক শূন্য হইবে বলিয়া চার অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মানে উহা উপেক্ষা করা যায়।]

প্রশ্নমালা 9B

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর :—

1. $(1{}^{\cdot}04)^5$ 2. $\sqrt[4]{621}$ 3. $(9996)^{\frac{1}{4}}$ 4. $\sqrt{99}$

5. $(47)^{-\frac{1}{2}}$ 6. $\sqrt[3]{\frac{501}{500}}$ 7. $\sqrt[3]{2}$ 8. $(630)^{-\frac{1}{4}}$

9. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে 5 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\sqrt{24}$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U.]

আসন্ন মান নির্ণয় কর :

10. $1·0036 \times ·996$ **11.** (*a*) $\frac{638}{10005}$ **11.** (*b*) $\frac{1}{·9997}$

12. $\frac{(1·00013)^3}{(·9992)^2}$,

যদি a এত ক্ষুদ্র হয় যে উহার বর্গ ও উর্ধ্বতর ঘাতগুলি উপেক্ষা করা চলে, তবে নিম্নগুলির মান নির্ণয় কর :

13. $\frac{\sqrt{1+3a}}{(1-2a)^{\frac{1}{3}}}$ **14.** $\frac{\sqrt[3]{8+3a}-(1-a)^{\frac{1}{5}}}{(1+5a)^{\frac{3}{5}}}$

15. x যদি এত ক্ষুদ্র হয় যে ইহার ত্রিঘাত ও উর্ধ্বতর ঘাতগুলি উপেক্ষা করা চলে, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{(1+5x)^3}-\frac{1}{(1+3x)^5}=15x^2$.

16. যদি x এত বৃহৎ হয় যে $\frac{1}{x^9}$কে উপেক্ষা করা চলে, তবে প্রমাণ কর যে $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}$ প্রায় $\frac{2}{3x^2}$ এর সমান।

17. বর্গ নির্ণয় কর :

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

যোগফল নির্ণয় কর :

18. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots\cdots$ **19.** $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots$

20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots\cdots$

21. $1+3x+5x^2+7x^2+\cdots\cdots$(যখন $-1<x<1$)

22. $1-5x+9x^2-13x^3+\cdots\cdots$(যদি $-1<x<1$)

23. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4·8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [C. U. '50]

24, $1-\frac{1}{4}+\frac{1·3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$

25. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{3^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

26. $1-\frac{1}{8}+\frac{1,5}{8,16}-\frac{1.5,9}{8.16.24}+\cdots\cdots$

27. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.4}{3.6}.\frac{1}{4}+\frac{1.4.7}{3.6.9}.\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

28. $1+\frac{3}{2.4}+\frac{1.3.3^2}{2^2.4^2.\lfloor 2}+\frac{1.3.5.3^3}{2^3.4^3.\lfloor 3}+\cdots\cdots$

29. $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.18}+\frac{2.5.8}{9.18.27}+\cdots\cdots$ [B. U. '52]

30. $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\cdots\cdots$ [Annamali '49]

31. $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [G. U. '52]

32. $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\cdots\cdots$ [A. U. '54]

33. $2+\frac{5}{2!\,3}+\frac{5.7}{3!\,3^2}+\frac{5.7.9}{4!\,3^3}+\cdots\cdots$ [A. U. '45]

34. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1.3}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10}+\cdots\cdots$

35. $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{2^2}+\cdots$, ইহা যে দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতি তাহা দেখাও এবং ইহার সমষ্টি নির্ণয় কর।

36. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত।

37. দেখাও যে, $\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{3^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{3^3}+\cdots$

নিম্নের সংখ্যাগুলিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত গুণোত্তর রাশিরূপে প্রকাশ কর দেখাও এবং তাহা হইতে উহাদের মান নির্ণয় কর :

38. $\cdot 0\dot{9}$ 39. $\cdot 0\dot{5}$ 40. $\cdot 0\dot{8}\dot{1}$ 41. $1\cdot\dot{5}$

42. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়ের প্রণালীতে দেখাও যে $\sqrt{\cdot 44\dot{4}}=\cdot 666\cdots\cdots$

43. $(1-x)^{-3}$এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$ সংখ্যক পদের সহগগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

44. $(1-x)^{-p}$এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$ সংখ্যক পদের সহগগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

45. দেখাও যে, $\frac{1}{2}n+\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{1}{2^2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$
$=2^n-1.$

46. দেখাও যে $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{4n}$ এর মধ্যপদটি $(1-4x)^{-n-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^nএর সহগের সমান। [P. U. '54] ;

47. যদি x এত ক্ষুদ্র হয় যে x^3 ও x-এর উর্ধ্বতর ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করা চলে, তবে দেখাও যে $(1+x)$এর n-তম মূল প্রায় $\frac{2n+(n+1)x}{2n+(n-1)x}$এর সমান। [Travancore '53]

48. $x>-\frac{1}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে;

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x)}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4+\cdots$$

[Karnatak '54]

49. যদি n কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(3+\sqrt{7})^n$এর অখণ্ডাংশ একটি বিজোড় সংখ্যা। [B. U. '48]

[Hints : বিস্তৃতি হইতে পাওয়া যায় $(3+\sqrt{7})^n+(3-\sqrt{7})^n$ জোড় সংখ্যা।]

50. প্রমাণ কর যে $1=\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.4}{4.6.8}+\cdots\cdots$ [Agra '41]

51. নীচের রাশিমালাকে একটি দ্বিপদ রাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতিরূপে প্রকাশ কর এবং প্রমাণ কর যে,

$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots=0\cdot4$ (প্রায়) [Rajputana '50]

52. যদি nএর রূপ $3m$, $3m-1$ অথবা $3m+1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+x+x^2}$এর বিস্তৃতিতে x^nএর সহগ যথাক্রমে 1, 0 অথবা -1 হইবে।

[P. U. '53]

দশম অধ্যায়

লগারিদম্ (Logarithm)

§ 10·1. আমরা জানি, $2^3=8$, এখানে 2-কে বলা হয় নিধান (base) এবং 3-কে বলা হয় 2-এর ঘাতের (powerএর) সূচক (index)। তাহা হইলে 3-এর সহিত 8-এর কি সম্পর্ক ? আমরা বলিব 3, 8-এর লগারিদম্ যখন নিধান 2 ; ইহা ইংরাজীতে বলা হয় 3 is the logarithm of 8 to the base 2. ইহা সংক্ষেপে লেখা হয় এইভাবে $3=\log_2 8$. সেইরূপে যেহেতু $3^2=9$, $\therefore$ $2=\log_3 9$. সাধারণতঃ, যদি $a^x=M$ হয়, তবে $x=\log_a M$ হয়।

বিপরীতক্রমে যদি $x=\log_a M$ হয়, তবে $a^x=M$ হয়।

সংজ্ঞা : কোন নিধানকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদম্ বলে।

যেমন :—

সূচক-সম্বলিত ফল	$3^4=81$	$5^{-2}=\frac{1}{25}$	$8^{\frac{2}{3}}=4$	$9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$
লগারিদম্-সম্বলিত ফল	$4=\log_3 81$	$-2=\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$	$\frac{2}{3}=\log_8 4$	$-\frac{3}{2}=\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$

সুতরাং, যদি a, x ও N এমন তিনটি সংখ্যা হয় যে,

$a^x=N$ এখানে $a>0$, এবং $a\neq 1$,

তখন আমরা লিখিব $xl=og_a N$.

[দ্রষ্টব্য : a ও N বাস্তব ধনরাশি হইলে $a^x=-N$ সমীকরণটি x-এর কোন বাস্তব মানের সাহায্যে সমাধান করা যায় না, সুতরাং একটি ঋণরাশির লগারিদম্ (নিধান যখন বাস্তব ধনরাশি) অবশ্যই অবাস্তব হইবে]

আবার দেখা যায় যে, $2^6=64$, $4^3=64$ ও $8^2=64$

অর্থাৎ, $\log_2 64=6$, $\log_4 64=3$ ও $\log_8 64=2$.

সুতরাং একই সংখ্যার নিধান ভিন্ন ভিন্ন হইলে উহাদের লগের মানও বিভিন্ন হইবে। অতএব, নিধানের সঠিক উল্লেখ না থাকিলে কোন সংখ্যার লগারিদম্ সম্পূর্ণ অর্থহীন। তবে সংক্ষেপে লিখিবার জন্য অনেক সময় নিধানের উল্লেখ করা হয় না, সেখানে হয় নিধান জানা আছে, না হয় যে কোনো নিধানের জন্য প্রশ্নটি সত্য।

§ 10·2. কতিপয় সূত্র :

(a) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(b) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

(c) $\log_a M^n=n\log_a M$

(d) $\log_a M=\log_b M\times\log_a b.$

সূত্রগুলির প্রমাণ :

(a) মনে করা যাক, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_a N$

$\therefore\ a^x=M\cdots\cdots(1)$
এবং $a^y=N\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^x.a^y=MN$, বা, $a^{x+y}=MN.$

$\therefore\ \log_a(MN)=x+y=\log_a M+\log_a N.$

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a(xyz\cdots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots$

(b) মনে করা যাক, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_a N.$

অতএব, $a^x=M$ এবং $a^y=N.$

এখন ভাগ করিয়া $\frac{a^x}{a^y}=\frac{M}{N}$, বা, $a^{x-y}=\frac{M}{N}$

$\therefore\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a\frac{xyz\cdots}{mnp\cdots}=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots$
$-\log_a m-\log_a n-\log_a p-\cdots$

(c) মনে করা যাক,

$x=\log_a M^n$ এবং $y=\log_a M$, $\therefore\ a^x=M^n$ এবং $a^y=M.$

$\therefore\ a^x=M^n=(a^y)^n=a^{ny}$, সুতরাং $x=ny.$

অতএব, $\log_a M^n=n\log_a M.$

[**দ্রষ্টব্য :** এই সূত্রটি nএর যে কোন মানের জন্য সত্য।]

(d) মনে কর যে, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_b M.$

$\therefore\ a^x=M$ এবং $b^y=M$, $\therefore\ a^x=b^y$ বা, $a^{\frac{x}{y}}=b.$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\log_a b$, $\therefore\ x=y\log_a b.$

$\therefore\ \log_a M=\log_b M\times\log_a b.$

[**দ্রষ্টব্য :** এই সূত্র দ্বারা নিধান পরিবর্তন করা হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত : এই সূত্রে $M=a$ ধরিলে $\log_b a\times\log_a b=1$,

অর্থাৎ $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}\cdots(1)$

অতএব, নিধান পরিবর্তনের সূত্রটি অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে নিম্নলিখিত রূপে লিখা যায়—

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}\cdots(2)$$

সুতরাং M ও a উভয়ের b-নিধানযুক্ত লগারিদম্ জানা থাকিলে M-এর a নিধানযুক্ত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।

§ 10·3. কয়েকটি বিশেষ সংখ্যার লগারিদম্ :

(i) আমরা জানি, $a^0=1$।
শূন্য ব্যতীত a যে-কোন সসীম বাস্তব রাশি হইলেই ইহা সত্য হইবে।

$$\therefore\ \log_a 1=0$$

অতএব, শূন্য ব্যতীত যে কোন সসীম বাস্তব রাশি নিধান হইলে এককের (1এর) লগারিদম্ শূন্য হইবে।

(ii) $a^1=a,\ \therefore\ \log_a a=1.$

$\therefore$ যাহা নিধান তাহারই লগারিদম্ সর্বদা 1 হইবে।

(iii) $a^{-1}=\frac{1}{a},\ \therefore\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right)=-1.$

$\therefore$ 1 ভিন্ন নিধানের অন্যোন্যকের লগ $=-1$.

উদাহরণমালা 10A

উদা. 1. নিধান $2\sqrt{3}$ হইলে 1728-এর লগারিদম্ কত হয়?

মনে কর, x নির্ণেয় লগারিদম্। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে পাওয়া যায়,

$$(2\sqrt{3})^x=1728=2^6.3^3=(2\sqrt{3})^6$$

$$x=6$$

অতএব, নির্ণেয় লগারিদম্ $=6$.

উদা. 2. 324-এর লগারিদম্ 4 হইলে উহার নিধান কত?

মনে কর, নির্ণেয় নিধান $=x$. সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে পাওয়া যায়,

$$(x)^4=324=3^4.4=3^4\times(\sqrt{2})^4=(3\sqrt{2})^4$$

$$\therefore\ x=3\sqrt{2}.$$

অতএব, নির্ণেয় নিধান $=3\sqrt{2}$.

উদা. 3. মান নির্ণয় কর : $\log_a \log_a \log_a a^{a^{a^{a}}}$

$\log_a \log_a \log_a a^{a^{a^{a}}} = \log_a \log_a a^{a^{a}} = \log_a a^{a} = a.$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2.$ [C. U. '51]

প্রদত্ত বামপক্ষ $= \log 75 - \log 16 - 2 (\log 5 - \log 9) + \log 32 - \log 243$

$= \log (3 \times 5^2) - \log 2^4 - 2 (\log 5 - \log 3^2) + \log 2^5 - \log 3^5$

$= \log 3 + 2 \log 5 - 4 \log 2 - 2 \log 5 + 4 \log 3 + 5 \log 2 - 5 \log 3.$

$= 5 \log 3 - 5 \log 3 + 2 \log 5 - 2 \log 5 + 5 \log 2 - 4 \log 2 = \log 2.$

উদা. 5. দেখাও যে $\log_7 \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7 \ldots \text{to} \infty}}} = 1$, দেওয়া আছে বাম পক্ষের মান থাকা সম্ভব।

মনে কর, $x = \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7 \cdots \text{to} \infty}}}$, $\therefore x^2 = 7\sqrt{7\sqrt{7 \cdots \text{to} \infty}} = 7x$

$\therefore \; x^2 - 7x = 0$, বা, $x(x-7) = 0$, $\therefore \; x = 7 \; (\because \; x \neq 0)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \log_7 x = \log_7 7 = 1.$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$ [C. U. '39]

মনে কর, বাম পক্ষ $= u$. এখন উভয় পক্ষের লগ্ লইয়া পাই, (প্রদত্ত নিধানের সাপেক্ষে)

$\log u = \log[x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y}]$

$= \log x^{\log y - \log z} + \log y^{\log z - \log x} + \log z^{\log x - \log y}$

$= (\log y - \log z) \log x + (\log z - \log x) \log y + (\log x - \log y) \log z$

$= 0 = \log 1.$

$\therefore \; u = 1$, অর্থাৎ প্রদত্ত বামপক্ষ $= 1.$

উদা. 7. যদি $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $x^x y^y z^z=1$.

মনে কর, $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}=k$.

$\therefore\ \log x=k(y-z),\ \log y=k(z-x)$ এবং $\log z=k(x-y)$.

বা, $x\log x=kx(y-z),\ y\log y=ky(z-x)$ এবং $z\log z=kz(x-y)$.

$\therefore\ x\log x+y\log y+z\log z=kx(y-z)+ky(z-x)+kz(x-y)$,

বা, $\log x^x y^y z^z=k\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}=k\times 0=0=\log 1$.

$\therefore\ x^x y^y z^z=1$.

উদা. 8. যদি x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, $\log_a x, \log_a y, \log_a z$ একটি সমান্তর প্রগতি।

যেহেতু x, y, z গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত, সুতরাং $y^2=zx$. ইহার উভয় পক্ষের a নিধানের জন্য লগ্ লইয়া পাওয়া যায়,

$$\log_a y^2=\log_a zx,\ \text{বা, } 2\log_a y=\log_a z+\log_a x.$$

অতএব, $\log_a x, \log_a y, \log_a z$ একটি সমান্তর প্রগতি।

উদা. 9. যদি $\log(x^3y^2)=3a+2b$ এবং $\log(x^2y^3)=2a+3b$ হয়, তবে a ও b দ্বারা $\log x$ $\log y$ নির্ণয় কর। [C.U '48]

$\because\ \log(x^3y^2)=3a+2b,\ \therefore\ 3\log x+2\log y=3a+2b\ldots$(i)

আবার, $\log(x^2y^3)=2a+3b,\ \therefore\ 2\log x+3\log y=2a+3b\ldots$(ii)

এক্ষণে, সমীকরণ (i) ও (ii) সমাধান করিয়া পাওয়া যায়,

$\log x=a$ এবং $\log y=b$.

উদা. 10. যদি $a^2+b^2=7ab$ হয়, তবে দেখাও যে $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

$\because\ a^2+b^2=7ab,\ \therefore\ (a+b)^2=9ab$ [উভয় পক্ষে $2ab$ যোগ করিয়া]

বা, $\{\frac{1}{3}(a+b)\}^2=ab$, বা, $\{\frac{1}{3}(a+b)\}=(ab)^{\frac{1}{2}}$. এখন উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাওয়া যায়, $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\}=\log(ab)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

উদা. 11. যদি $y=a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=a^{\frac{1}{1-\log y}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x=a^{\frac{1}{1-\log z}}$, প্রতিটি লগেরই নিধান a.

যেহেতু, $y=a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $\therefore\ \log_a y=\frac{1}{1-\log_a x}$ ...(i)

আবার যেহেতু $z=a^{\frac{1}{1-\log y}}$, $\therefore\ \log_a z=\frac{1}{1-\log_a y}$ ...(ii)

এখন (ii) হইতে পাওয়া যায়,

$1-\log_a y=\frac{1}{\log_a z}$, বা, $\log_a y=1-\frac{1}{\log_a z}=\frac{\log_a z-1}{\log_a z}$.

$\therefore$ (i) হইতে পাওয়া যায়,

$1-\log_a x=\frac{1}{\log_a y}=\frac{\log_a z}{\log_a z-1}$,

বা, $\log_a x=1-\frac{\log_a z}{\log_a z-1}=\frac{-1}{\log_a z-1}=\frac{1}{1-\log_a z}$

অতএব, $x=a^{\frac{1}{1-\log z}}$.

উদা. 12. প্রমাণ কর $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1$; [C.U. '34]
এবং ইহা হইতে $\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a$-এর মান নির্ণয় কর।

$\log_b a\times\log_c b\times\log_a c$

$=\log_c a\times\log_b c\times\log_c b\times\log_a c$

$=(\log_c a\times\log_a c)\times(\log_b c\times\log_c b)$

$=1\times 1=1.$

$\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a$

$=\frac{1}{\log_b\sqrt{a}}\times\frac{1}{\log_c\sqrt{b}}\times\frac{1}{\log_a\sqrt{c}}$ $\left[\because\ \log_b a=\frac{1}{\log_a b}\right]$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}\log_b a}\times\frac{1}{\frac{1}{2}\log_c b}\times\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a c}$

$=\frac{8}{\log_b a\times\log_c b\times\log_a c}=\frac{8}{1}=8.$

উদা. 13. যদি $\log_a b=10$ এবং $\log_{6a}(32b)=5$ হয়, তবে aএর মান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

যেহেতু $\log_a b=10$, $\therefore\ a^{10}=b\cdots\cdots$(i)

আবার, যেহেতু $\log_{6a}(32b)=5$, $\therefore\ (6a)^5=32b,\cdots\cdots$(ii)

(i)-কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{a^{10}}{(6a)^5}=\frac{b}{32b},\ \text{বা,}\ \frac{a^{10}}{6^5a^5}=\frac{1}{32}\ \text{বা,}\ a^5=\frac{6^5}{32}=\frac{6^5}{2^5}=3^5.$$

অতএব, $a=3$.

উদা. 14. প্রমাণ কর: $\dfrac{1}{\log_a(abc)}+\dfrac{1}{\log_b(abc)}+\dfrac{1}{\log_c(abc)}=1$

মনে কর, $\log_a(abc)=x$, $\log_b(abc)=y$, $\log_c(abc)=z$;

অতএব, $a^x=abc$, $b^y=abc$, $c^z=abc$.

$\therefore\ a=(abc)^{\frac{1}{x}}\cdots(1)$, $b=(abc)^{\frac{1}{y}}\cdots(2)$, $c=(abc)^{\frac{1}{z}}\cdots(3)$

(1), (2), (3) গুণ করিয়া পাই $abc=(abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$

$$\therefore\ \frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}=1.$$

উদা. 15. $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ $(x\neq 1)$ একটি সমান্তর প্রগতি হইলে, দেখাও যে $n^2=(kn)^{\log_k m}$. [S. C. W. B. 1976]

মনে কর $\log_k x=a$, $\log_m x=b$, $\log_n x=c$.

$\therefore\ x=k^a=m^b=n^c$ এবং a, b, c একটি সমান্তর প্রগতি অর্থাৎ $a+c=2b$.

এক্ষণে, $\because\ x=m^b$, $\therefore\ m=x^{\frac{1}{b}}=(k^a)^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{a}{b}}$

$$\therefore\ \log_k^m=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\ (kn)^{\log_k^m}=(kn)^{\frac{a}{b}}=k^{\frac{a}{b}}\cdot n^{\frac{a}{b}}=\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}\left(x^{\frac{1}{c}}\right)^{\frac{a}{b}}$$

$$=x^{\frac{1}{b}}\cdot x^{\frac{a}{bc}}=x^{\frac{c+a}{bc}}=x^{\frac{2b}{bc}}=x^{\frac{2}{c}}=\left(x^{\frac{1}{c}}\right)^2=(n)^2=n^2.$$

$\therefore\ n^2=(kn)^{\log_k m}$.

প্রশ্নমালা 10 A

1. নিম্নলিখিত লগারিদ্‌ম্‌গুলি নির্ণয় কর :

(i) 320-এর, যখন নিধান $3\sqrt{2}$ [H. S. Exom. '60 Compl.]

(ii) 144-এর, যখন নিধান $2\sqrt{3}$

(iii) ·1-এর, যখন নিধান $9\sqrt{3}$ [H. S. Exam. '60 Compl.

(iv) ·3-এর, যখন নিধান $3\sqrt{3}$

(v) ·0001-এর, যখন নিধান ·1

(vi) $\cos^2\alpha$-এর, যখন নিধান $\sec\alpha$.

(vii) $\log_a\log_a\log_a\log_a\log_a a^{a^{a^{a^{a^{a}}}}}$

2. নিধান বাহির কর, যখন

(i) 1728-এর লগ 6, (ii) 4·00-এর লগ 4, (iii) $\sqrt{5}$-এর লগ $-\frac{1}{6}$

(iv) $\frac{1}{a}$-এর লগ -1 (v) $\frac{1}{8}$-এর লগ $-\frac{1}{3}$.

3. নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

(a) $\log_a a^x = x$; (b) $a^{\log_a x} = x$; (c) $\log_b\left(\frac{1}{b^n}\right) = -n$.

(d) $\log_{b^n} a^n = \log_b a$; (e) $a^{\log b} = b^{\log a}$. (উভয় লগের একই নিধানের জন্য)

4. নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

(a) $\log 2 + 16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} = 1$ [C. U. '40]

(b) $7\log\frac{10}{9} - 2\log\frac{25}{24} + 3\log\frac{81}{80} = \log 2$ [C. U. '29]

(c) $7\log\frac{16}{15} + 5\log\frac{25}{24} + 3\log\frac{81}{80} = \log 2$ [C. U. '39]

(d) $7\log\frac{15}{16} + 6\log\frac{8}{3} + 5\log\frac{2}{5} + \log\frac{32}{25} = \log 3$.

(e) $3\log\frac{36}{25} + \log\left(\frac{6}{27}\right)^2 - 2\log\frac{16}{125} = \log 2$.

5. (i) যদি $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে $xyz = 1$.

(ii) যদি $\dfrac{\log a}{y-z} = \dfrac{\log b}{z-x} = \dfrac{\log c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে $a^x b^y c^z = 1$.

6. $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b}$ হইলে, নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :—

(i) $x^a y^b z^c = 1$; (ii) $x^{b+c}.y^{c+a}.z^{a+b} = 1$,

(iii) $x^{b^2+bc+c^2}.y^{c^2+ca+a^2}.z^{a^2+ab+b^2} = 1$.

7. যদি $\log_e m+\log_e n=\log_e(m+n)$ হয়, তবে n দিয়া mএর মান নির্ণয় কর। [C.U. '13]

8. যদি কতকগুলি সংখ্যা গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে যথাক্রমে উহাদের লগারিদম্গুলি একটি সমান্তর প্রগতি হইবে।

9. প্রমাণ কর:

(i) $\log_2 \log_2 \log_2 16=1$; (ii) $\log_3 \log_2 \log_{\sqrt{3}} 81=1$.

10. দেখাও যে $\log_{10} 2$ এর মান $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$এর মধ্যে আছে।

[C. U. '26]

11. (i) যদি $a^2+b^2=14ab$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\log\{\frac{1}{4}(a+b)\} =\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. [C. U. '59 Compl.]

(ii) যদি $a^2+b^2=23ab$, হয়, তবে প্রমাণ কর $\log\{\frac{1}{5}(a+b)\} =\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

12. (a) যদি $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x\log\frac{b}{a}=\log a$. [C. U. '37]

(b) $\log(x^2y^2)=a$ ও $\log\frac{x}{y}=b$ হইলে, a ও b দ্বারা $\log x$ ও $\log y$ নির্ণয় কর। [C. U. '19]

(c) যদি $\log_a b=6$ এবং $\log_{14a}(8b)=3$ হয়, তবে aএর মান নির্ণয় কর।

(d) $\log_{10}x-\log_{10}\sqrt{x}=\dfrac{2}{\log_{10}x}$ হইলে, xএর মান নির্ণয় কর।

13. (a) দেখাও যে $\log\dfrac{b^n}{c^n}+\log\dfrac{c^n}{a^n}+\log\dfrac{a^n}{b^n}=0$. [C. U. '44]

(b) সরল কর:

(i) $\log\dfrac{a^3b^3}{c^3}+\log\dfrac{b^3c^3}{d^3}+\log\dfrac{c^3d^3}{a^3}-3\log b^2c$.

(ii) $\log\frac{14}{15}+\log\frac{28}{27}+\log\frac{405}{196}$.

14. নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর:

(a) $(yz)^{\log y-\log z}\times(zx)^{\log z-\log x}\times(xy)^{\log x-\log y}=1$. [G. U. '49]

(b) $2\log a+2\log a^2+2\log a^3+\cdots+2\log a^n=n(n+1)\log a$.

15. $xy^{a-1}=l$, $xy^{b-1}=m$ এবং $xy^{c-1}=n$, হইলে, প্রমাণ কর:

(i) $(b-c)\log l+(c-a)\log m+(a-b)\log n=0$.

(ii) $a\log\frac{m}{n}+b\log\frac{n}{l}+c\log\frac{l}{m}=0$.

16. নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

(a) $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = \log_a a$.

(b) $a^{\log_a b \times \log_b c \times \log_c d} = d$.

(c) $\log_a x \times \log_b y = \log_b x \times \log_a y$.

(d) $\log_{b^3} a \times \log_{c^3} b \times \log_{a^3} c = \frac{1}{27}$.

17. যদি x ধনাত্মক এবং 1 হইতে ছোট হয়, তবে দেখাও যে

$\log(1+x)+\log(1+x^2)+\log(1+x^4)+\log(1+x^8)+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=-\log(1-x)$.

18. $a=\log_x(yz)$, $b=\log_y(zx)$ এবং $c=\log_z(xy)$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=1$.

19. $x=\log_{2a}a$, $y=\log_{3a}2a$ এবং $z=\log_{4a}3a$, হইলে প্রমাণ কর $xyz+1=2yz$. [All. '49]

20. যদি P, Q, R কোন গুণোত্তর প্রগতির যথাক্রমে p-তম, q-তম ও r-তম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0$. [C.U. '62]

21. a, b, c গুণোত্তর প্রগতি হইলে প্রমাণ কর যে

$\log_a x, \log_b x, \log_c x$ বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে।

(b) যদি একটি গুণোত্তর প্রগতি ও একটি বিপরীত প্রগতির উভয়েরই একই p-তম, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0$.

(c) x, y, z বিপরীত প্রগতির ক্রমিক তিনটি পদ হইলে প্রমাণ কর যে

$\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$.

22. (a). $\log_p x=a$, $\log_q x=b$ হইলে, প্রমাণ কর যে

$\log_{\frac{p}{q}} x=\dfrac{ab}{b-a}$.

(b). $p=\log_a(bc)$, $q=\log_b(ca)$ এবং $r=\log_c(ab)$ হইলে, দেখাও যে $pqr=p+q+r+2$.

(c). $x=\log_c b+\log_b c$, $y=\log_a c+\log_c a$ এবং $z=\log_b a+\log_a b$ হইলে প্রমাণ কর $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

23. $\dfrac{pq\log(pq)}{p+q}=\dfrac{qr\log(qr)}{q+r}=\dfrac{rp\log(rp)}{r+p}$ হইলে, প্রমাণ কর যে $p^p=q^q=r^r$.

24. $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a}=\dfrac{b(c+a-b)}{\log b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে $b^c c^b=c^a a^c=a^b b^a$.

25. $\log\ (a+b+c)=\log\ a+\log\ b+\log\ c$ হইলে, দেখাও যে
$$\log\left(\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}\right)=\log\frac{2a}{1-a^2}+\log\frac{2b}{1-b^2}+\log\frac{2c}{1-c^2}.$$

26. $\dfrac{\log p}{m}=\dfrac{\log q}{n}=\dfrac{\log r}{l}=\log x$ হইলে, $\dfrac{p^2}{qr}$কে xএর ঘাত দ্বারা প্রকাশ কর।

§ 10·4. সাধারণ লগারিদম্ (Common logarithm)

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদম্‌কে সাধারণ লগারিদম্ বলে।

কোন লগারিদমে নিধানটি লেখা না থাকিলে বুঝিতে হইবে যে নিধান 10 আছে। অর্থাৎ $\log 285$ বলিলে $\log_{10} 285$ বুঝিতে হইবে।

তোমরা জান $10^1=10$ এবং $10^2=100$.

$\therefore\ \log_{10}10=1$ এবং $\log_{10}100=2$.

এক্ষণে, $x>y$ হইলে $\log_a x>\log_a y$ (a যে-কোন ধনাত্মক নিধান)

$\therefore$ 10 হইতে বৃহত্তর এবং 100 হইতে ক্ষুদ্রতর যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ 1 হইতে বৃহত্তর এবং 2 হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে। সুতরাং যদি $10<Z<100$ হয়, তবে $\log_{10} Z$ এর মান 1 হইতে বৃহত্তর এবং 2 হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে। অর্থাৎ $\log_{10}Z$ এর লগারিদম্ 1 এবং একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হইবে। অনুরূপে প্রত্যেক সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হয়। সংখ্যাটি 10এর কোন অখণ্ড ঘাত হইলে এই দশমিকাংশ শূন্য হয়। লগারিদমের অখণ্ড অংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং দশমিক অংশকে **অংশক** (Mantissa) বলে। **দশমিকাংশ বা অংশক সর্বদাই ধনাত্মক ধরা হয়।** কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ ঐ লগারিদমের **পূর্ণক+অংশক**। পূর্ণক নির্ণয় করা হয় পর্যবেক্ষণের সাহায্যে (by inspection)। অংশক নির্ণয় করা হয় লগ-তালিকা হইতে।

§ 10·5. পূর্ণক নির্ণয়ের প্রণালী

1 বা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক

§ 10·4এ তোমরা দেখিলে যে 10 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোন রাশির লগারিদ্‌ম 1+একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ। আবার 10-এর লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1. সুতরাং 10 অথবা 10 হইতে বৃহত্তর কিন্তু 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর পূর্ণক 1, অর্থাৎ **যে সকল সংখ্যার অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের তাহাদের লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1.** সুতরাং

log 10এর পূর্ণক 1 ; log 15এর পূর্ণক 1 ;

log 75·34এর পূর্ণক 1 ; log 90·00573এর পূর্ণক 1.

আবার যেহেতু $10^2=100$ এবং $10^3=1000$;

$\therefore$ $\log_{10}100=2$ এবং $\log_{10} 1000=3$, সুতরাং পূর্বের ন্যায় যুক্তি দিয়া বলা যায় যে, 100 অথবা 100 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2, অর্থাৎ **যে সকল সংখ্যার অখণ্ড অংশ তিন অঙ্কের তাহাদের লগারিদ্‌ম্-এর পূর্ণক 2.**

অনুরূপে, 1 বা 1 হইতে বৃহত্তর কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশে অঙ্ক সংখ্যা যত, তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক।

$\therefore$ log 1, log 1·0002, log 9·99999 প্রত্যেকের পূর্ণক 0.

log 15, log 78·3 প্রত্যেকের পূর্ণক 1।

log 100, log 325, log 729·003 প্রত্যেকের পূর্ণক 2.

log 2000, log 5078, log 8570·3456 প্রত্যেকের পূর্ণক 3

ইত্যাদি।

(ii) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক।

আবার $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1$, $\therefore \log \cdot1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01$, $\therefore \log \cdot01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot001$, $\therefore \log \cdot0001=-3$

মনে কর যে, log ·03 নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন যেহেতু $\cdot01<\cdot03<\cdot1$, $\therefore \log \cdot01<\log \cdot03<\log \cdot1$

অর্থাৎ log ·03, −2 অপেক্ষা বড় এবং −1 অপেক্ষা ছোট হইবে,

$\therefore$ log ·03 = −2+দশমিকাংশ,

ইহার পূর্ণক ঋণাত্মক অর্থাৎ −2 এবং অংশক ধনাত্মক।

এখানে দেখ, দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী পূর্ণক হইবে এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. (i) log ·234 = −1+একটি দশমিক ভগ্নাংশ, এখানে পূর্ণক −1

(ii) log ·0234 = −2+ ,, ,, ,, , এখানে পূর্ণক −2

(iii) log ·00234 = −3+ ,, ,, ,, , এখানে পূর্ণক −3

সুতরাং পূর্ণক বাহির করিবার নিয়ম

(i) যদি রাশিটি 1 অথবা 1 অপেক্ষা বড় হয়, তবে

রাশির পূর্ণ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে উহার লগারিদমের পূর্ণক।

(ii) যদি রাশিটি 1 অপেক্ষা ছোট হয়, তবে

দশমিক বিন্দু হইতে প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে, তাহা অপেক্ষা 1 বেশী হইবে লগারিদমের পূর্ণক এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

§ 10·6. যে সকল সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি সমান এবং একই ভাবে সাজান আছে শুধু দশমিক বিন্দুর স্থান পৃথক্, তাহাদের সকলেরই লগের অংশক সমান।

মনে কর, আমরা জানি $\log 3746 = 3{\cdot}5736$,

এখন $\log 374{\cdot}6 = \log \frac{3746}{10}$

$= \log 3746 - \log 10 = 3{\cdot}5736 - 1 = 2{\cdot}5736$;

$\log 37{\cdot}46 = \log \frac{3746}{100}$

$= \log 3746 - \log 100 = 3{\cdot}5736 - 2 = 1{\cdot}5736$;

$\log 3{\cdot}746 = \log \frac{3746}{1000}$

$= \log 3746 - \log 1000 = 3{\cdot}5736 - 3 = {\cdot}5736$;

$\log {\cdot}3746 = \frac{3746}{10000}$

$= \log 3746 - \log 10000 = 3{\cdot}5736 - 4$

$= 3 + {\cdot}5736 - 4 = {\cdot}5736 - 1 = \bar{1}{\cdot}5736$

দ্রষ্টব্য : log ·3746এর পূর্ণক −1 এবং অংশক ·5736.

ইহাকে −1·5736 লিখিলে বোঝা যায় যে 1·5736 সমস্তটাই ঋণাত্মক। কিন্তু অংশক ঋণাত্মক নয়, শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক। শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক ইহা বুঝাইবার জন্য 1এর মাথার উপর একটি রেখা টানিয়া দিয়া পরে দশমিক বিন্দু এবং অংশক লেখা হয়। এই রেখাকে বলা হয় Bar অর্থাৎ $\bar{1}$ হইল bar 1. $\bar{2}$ হইলে bar 2 ইত্যাদি এবং ইহাতে ঐ 1 ও 2 ঋণাত্মক বুঝায়।

§ 10·7. অংশক (Mantissa) বাহির করিবার নিয়ম

পুস্তকের শেষে লগ তালিকাটি (log table-টি) দেখ: উহাতে দশমিক 5 অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে।

ঐ তালিকায় প্রথম স্তম্ভে নীচে নীচে মোটা অক্ষরে লেখা আছে 10 হইতে 99 পর্যন্ত। তালিকার মাথার উপরে মাঝারি অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত এবং তারও পরে ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত লেখা আছে। এই মাথার সারির নীচে এবং বামের মোটা সংখ্যার ডান দিকের সারিতে প্রতি ঘরে যে সব সংখ্যা আছে তাহা মোটেই পূর্ণ সংখ্যা নহে। প্রতিটি সংখ্যার আগে দশমিক বিন্দু আছে ধরিয়া লইতে হইবে, অর্থাৎ যদি লেখা থাকে 00435, তবে বুঝিবে উহা ·00435, ইত্যাদি।

এখন লগ তালিকা হইতে কি প্রকারে কোন সংখ্যার লগের অংশক বাহির করা যায় তাহা বোঝান যাইতেছে।

(i) মনে করা যাক 37এর লগের অংশক বাহির করিতে হইবে :—

প্রথম স্তম্ভের 37এর পরই মাথার উপরে 0-এর স্তম্ভের নীচে আছে 56820. অতএব, 37এর লগের অংশক হইবে ·56820.

(ii) 374এর লগের অংশক দেখিতে হইলে 37এর পর সোজা ডান দিকের সারিতে আঙ্গুল লইয়া গিয়া থামাইতে হইবে সেই ঘরে যে ঘরের মাথার উপরে আছে 4, ঐ ঘরে সংখ্যা লেখা আছে 57287, সুতরাং 374-এর লগের অংশক হইবে ·57287.

(iii) 3746 অর্থাৎ 4 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগের অংশক।

প্রথম তিনটি অঙ্ক 374এর লগের উপরোক্ত নিয়মে অংশক ·57287 ; সংখ্যাটির চতুর্থ অঙ্ক 6, সেইজন্য 37এর পর সোজা ডান দিকের শেষে যে ছোট হরফে 1 হইতে 9 পর্যন্ত আছে তাহার 6-এর স্তম্ভের নীচে লেখা আছে 73 অর্থাৎ ·00073, এখন ·00073 এবং ·57287 যোগ করিলে পাওয়া যায় ·57360, ইহাই 3746এর লগের অংশক।

[দ্রষ্টব্য : 3746এর লগের পূর্ণক 3 এবং অংশক ·57360.

$\therefore \log 3746 = 3{\cdot}57360.$

তদ্রূপ $\log 37 = 1{\cdot}56820$ এবং $\log 374 = 2{\cdot}57287.$]

§ 10·8. সমানুপাতী অংশের তত্ত্ব (Principle of proportional parts).

উপরে লগ তালিকা হইতে কোন সংখ্যার লগারিদমের অংশক নির্ণয়ের যে

পদ্ধতি শেখান হইল, তাহা চারিটি অঙ্ক পর্যন্ত কোন সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয়ের জন্য প্রযোজ্য। এখন, যদি কোন সংখ্যার সার্থক অঙ্কের সংখ্যা চার অপেক্ষা অধিক হয়, তবে কিরূপে এই তালিকা ব্যবহার করা যাইতে পারে, তাহা নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

উদা. 1. log 52309এর লগারিদম্ নির্ণয়। যেহেতু সংখ্যাটিকে 52309·0 রূপে লেখা যায়, অর্থাৎ সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর বামে পাঁচটি সার্থক অঙ্ক আছে, অতএব উহার পূর্ণক 4. এক্ষণে 52309 এবং 52310 সংখ্যা দুইটির পার্থক্য 1 এবং 52310 সংখ্যাটিতে সার্থক অঙ্ক সংখ্যা 4. সুতরাং সংখ্যা দুইটির মান অনুযায়ী উহাদের অন্তর ক্ষুদ্র হওয়ায় উহাদের লগারিদমের অংশক দুইটির অন্তর ক্ষুদ্র হইবে, অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যার চারিটি সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা পর্যন্ত আসন্নমান লইয়া অংশকের আসন্নমান নির্ণয় করা যাইতে পারে। অংশক নির্ণয়ের ত্রুটি আরও কমাইবার জন্য **"সমানুপাতী অংশের তত্ত্ব"** ব্যবহার করা যাইতে পারে। এই তত্ত্ব অনুযায়ী **"কোন সংখ্যার লগারিদমের মানের পরিবর্তন ঐ সংখ্যার ক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হয়।"** এই তত্ত্ব অনুযায়ী এইবার log 52309-এর অংশক নির্ণয় করা যাক।

তালিকা হইতে,

$$\text{log } 52310\text{এর অংশক} = \cdot 71858$$
$$\text{এবং log } 52300\text{এর অংশক} = \cdot 71850$$
$$\text{সুতরাং} \quad 10\text{এর জন্য অন্তর} = \cdot 00008$$
$$\text{এক্ষণে} \quad 52310 \text{ ও } 52309 \text{ এর অন্তর } 1$$
$$\therefore \quad 1\text{এর জন্য অন্তর} \quad \cdot 000008$$

যেহেতু সংখ্যার মান বৃদ্ধি হইলে লগারিদমের মান বৃদ্ধি হয়,

$$\therefore \text{ log } 52309\text{এর অংশক} = \text{log } 52310\text{এর অংশ} - \cdot 000008$$
$$= \cdot 71858 - \cdot 000008$$
$$= \cdot 718572$$

সুতরাং log 52309 = 4·718572 (আসন্ন)।

মনে রাখিবে উভয় পদ্ধতিতেই লগারিদমের আসন্নমান পাওয়া যায় এবং সমানুপাতী অংশের তত্ত্ব ব্যবহারে অপেক্ষাকৃত আসন্নমান পাওয়া যাইবে।

কোন সংখ্যায় পাঁচ অঙ্ক অপেক্ষা বেশী সংখ্যক সার্থক অঙ্ক থাকিলেও উপরে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসরণ করিবে। মনে রাখিবে সার্থক অঙ্ক সংখ্যা যত বেশী হইবে, ত্রুটি ততই বেশী হইবে।

§ **10·9. য়্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বা য়্যান্টিলগ** (Antilogarithm বা Antilog)

কোন সংখ্যা *m*-এর যদি লগারিদ্‌ম্ *n* হয়, তবে *m*-কে *n*-এর য়্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বা য়্যান্টিলগ বলে। যথা,

log 37·46 = 1·5736, ∴ 1·5736এর য়্যান্টিলগারিদ্‌ম্ হইবে 37·46,

§ **10·10.** Antilogarithm বাহির করিবার নিয়ম।

Antilog তালিকার প্রথম সারিতে দশমিক বিন্দুর পরে দুইটি অঙ্ক দেওয়া আছে। ইহা লগারিদমের অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক।

(i) মনে কর, 1·5736এর Antilogarithm বাহির করিতে হইবে। ইহার অংশক ·5736, কাজেই ·57এর ডান দিকে এবং যে ঘরের মাথার উপরে 3 আছে সেই ঘরে সংখ্যা আছে 3741, এই রেখার আরও ডানদিকে 6এর নীচে আছে 5 ; এই 5, 3741এর সহিত যোগ করিলে পাওয়া যায় 3746.

∴ ·5736 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল 3746, যেহেতু 1·5736এর পূর্ণক 1, ∴ ইহা যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ তাহার পূর্ণ সংখ্যায় দুইটি অঙ্ক আছে।

∴ 1·5736এর Antilogarithm 37·46 হইল।

তদ্রূপ 2·5736এর Antilogarithm 374·6

এবং $\bar{2}$·5736এর Antilogarithm ·03746.

(ii) − ·5378এর য়্যান্টিলগ কত ?

যেহেতু, $-\cdot5378 = -1 + 1 - \cdot5378$

$= -1 + \cdot4622 = \bar{1}\cdot4622$

∴ − ·5378এর য়্যান্টিলগ = $\bar{1}$·4622এর য়্যান্টিলগ = ·2898.

উদাহরণমালা 10 B

উদা. 1. লগ বাহির কর : (*a*) 7, (*b*) 324, (*c*) 1·362 এবং (*d*) ·035.

(*a*) 7 সংখ্যাটি এক অঙ্কের বলিয়া উহার লগের পূর্ণক হইবে 0. এক্ষণে লগ তালিকা হইতে লগ 7এর অংশক নির্ণয়ের জন্য লগ 7 = লগ 700 ধরিবে। ঐ তালিকায় 70এর পর মাথায় 0র স্তম্ভের নীচে 84510 সংখ্যাটি আছে, সুতরাং অংশকটি হইল ·84510.

∴ log 7 = 0·84510.

(*b*) 324এর অঙ্ক সংখ্যা তিন, সুতরাং উহার লগের পূর্ণক হইবে 2, এক্ষণে লগ তালিকায় 32এর ডান দিকে মাথায় 4এর স্তম্ভের নীচে সংখ্যা লেখা আছে 51055. $\therefore$ $\log 324 = 2{\cdot}51055$.

(*c*) 1·362এর পূর্ণ সংখ্যায় একটি অঙ্ক থাকায় উহার লগের পূর্ণক হইবে 0. লগ তালিকায় 13এর ডানদিকে মাথার প্রথম 6এর স্তম্ভের নীচে 13354 সংখ্যাটি পাইলাম, ঐ লাইনে আরও ডানদিকে 2এর স্তম্ভের নীচে আছে 65 ; $13354 + 65 = 13419$. $\therefore$ $\log 1{\cdot}362 = {\cdot}13419$.

(*d*) ·035 সংখ্যাটিতে প্রথমেই দশমিকের পর একটি শূন্য থাকায় উহার লগের পূর্ণকটি ঋণাত্মক 2 অর্থাৎ $\bar{2}$ হইবে। এক্ষণে লগ তালিকা হইতে দেখা যায় log 35এর অংশক = ·54407. $\therefore$ $\log {\cdot}035 = \bar{2}{\cdot}54407$.

উদা. 2. লগ তালিকার সাহায্যে য়্যান্টিলগ বাহির কর।

(*a*) $\bar{1}{\cdot}2463$ এবং (*b*) $-2{\cdot}8254$.

(*a*) $\bar{1}{\cdot}2463$এর অংশক ·2463 ; য়্যান্টিলগ তালিকায় ·24এর ডানদিকে যে ঘরে স্তম্ভের মাথার উপরে 6 আছে সেখানে লেখা আছে 1762, এই লাইনের আরও ডান দিকে 3এর স্তম্ভের নীচে আছে 1 ; 1762এর সহিত ঐ 1 যোগ করিয়া হইল 1763.

$\therefore$ 2463 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল ·1763 ;

$\because$ $\bar{1}{\cdot}2463$এর পূর্ণক $\bar{1}$,

$\therefore$ ইহা যে সংখ্যার লগ তাহাতে পূর্ণ সংখ্যা নাই এবং তাহার দশমিকের পর প্রথম অঙ্কটি সার্থক অঙ্ক।

$\therefore$ $\bar{1}{\cdot}2463$এর নির্ণেয় য়্যান্টিলগ = ·1763.

(*b*) $-2{\cdot}8254 = -3 + 1 - {\cdot}8254 = -3 + {\cdot}1746 = \bar{3}{\cdot}1746$.

য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে দেখা যায় ·1746এর য়্যান্টিলগ = ·1495 ;

এখানে পূর্ণক -3, সুতরাং নির্ণেয় য়্যান্টিলগ-এ দশমিক বিন্দুর পর দুইটি শূন্য দিয়া সংখ্যাটি আরম্ভ হইল।

$\therefore$ নির্ণেয় য়্যান্টিলগ = ·001495.

উদা. 3. লগ তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর : $\dfrac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$.

[P. U. '55]

মনে কর, $x=\frac{1}{(1\cdot045)^{20}}$,

$\therefore \log x=\log\frac{1}{(1\cdot045)^{20}}=\log 1-\log(1\cdot045)^{20}$

$=\log 1-20\log 1\cdot045=0-20\times\cdot0191=-\cdot382$

$=-1+1-\cdot382=-1+\cdot618=\bar{1}\cdot618=\log\cdot4150$

(য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

$\therefore x=\cdot415$. অতএব, নির্ণেয় মান $=\cdot415$.

উদা. 4. লগ তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর : $\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$.

[P. U. 1948]

মনে কর, $x=\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$ $\therefore \log x=\log\frac{\sqrt[5]{2\cdot415}}{(0\cdot824)^4}$

$=\log(2\cdot415)^{\frac{1}{5}}-\log(\cdot824)^4$

$=\frac{1}{5}\log 2\cdot415-4\log\cdot824$

$=\frac{1}{5}\times0\cdot3829-4\times\bar{1}\cdot9159$

$=\cdot0765+4-3\cdot6636=\cdot4129$

$=\log 2\cdot587$ (য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

$\therefore x=2\cdot587$, $\therefore$ নির্ণেয় মান $=2\cdot587$.

উদা. 5. লগ তালিকা হইতে $(1\cdot035)^{-16}$ এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর $x=(1\cdot035)^{-16}$

$\therefore \log x=\log(1\cdot035)^{-16}=-16\log 1\cdot035=-16\times\cdot0149$

$=-\cdot2384=-1+1-\cdot2384$

$=-1+\cdot7616=\bar{1}\cdot7616$

$=\log\cdot5776$ (য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

$\therefore x=\cdot5776$, $\therefore$ নির্ণেয় মান $=\cdot5776$.

উদা. 6. লগ তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

$$\frac{3\cdot78\times\cdot032\times109\cdot2\times19\cdot895}{\cdot00078\times981}$$

লগ তালিকার সাহায্যে লবগুলির লগ		হরগুলির লগ	
লগ	$3\cdot78=\cdot5775$	লগ	$\cdot00078=\bar{4}\cdot8921$
লগ	$\cdot032=\bar{2}\cdot5051$	লগ	$981=2\cdot9917$
লগ	$109\cdot2=2\cdot0382$		$\bar{1}\cdot8838$
লগ	$19\cdot895=1\cdot2987$		
	$2\cdot4195$		

এক্ষণে $2{\cdot}4195-(\bar{1}{\cdot}8838)=2{\cdot}4195+1-{\cdot}8838=2{\cdot}5357$.

$\because$ য়্যান্টিলগ $2{\cdot}5357=343{\cdot}4$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=343{\cdot}4$.

উদা. 7. ${\cdot}0265$ এর বর্গমূল বাহির কর :

$\sqrt{{\cdot}0265}=({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}$. এক্ষণে $\log\,({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log{\cdot}0265$

$=\frac{1}{2}\times\bar{2}{\cdot}4232=\bar{1}{\cdot}2116=\log{\cdot}1628$.

$\therefore$ $({\cdot}0265)^{\frac{1}{2}}={\cdot}1628$. $\therefore$ নির্ণয় বর্গমূল $={\cdot}1628$.

উদা. 8. $(6)^{25}$ সংখ্যাটির অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর, দেওয়া আছে

$\log 2={\cdot}3010$ এবং $\log 3={\cdot}4771$.

$\log\,(6)^{25}=25\,\log 6=25\,\log\,(2\times3)=25\,(\log 2+\log 3)$

$=25\,({\cdot}3010+{\cdot}4771)=25\times{\cdot}7781=19{\cdot}4525$.

যেহেতু $\log\,(6)^{25}$এর পূর্ণক $=19$, সুতরাং $(6)^{25}$ রাশিটিতে মোট 20টি অঙ্ক আছে।

উদা. 9. 2^{-30}এর মানে প্রথম সার্থক অঙ্ক কোন্‌টি? দেওয়া আছে $\log 2={\cdot}3010$।

মনে কর, $x=2^{-30}$.

$\therefore$ $\log x=\log 2^{-30}=-30\times\log 2=-30\times{\cdot}3010$

$=-9{\cdot}03=-10\times1-{\cdot}03=\bar{10}{\cdot}97$.

এখানে $\log x$ অর্থাৎ $\log 2^{-30}$এর পূর্ণক $=\bar{10}$.

সুতরাং প্রথমেই দশমিকের পর শূন্য সংখ্যা $=10-1=9$.

অতএব, 2^{-30} রাশিটির প্রথম সার্থক অঙ্ক হইবে দশম অঙ্ক।

উদা. 10. দেওয়া আছে $\log 6337{\cdot}4=3{\cdot}8019111$ এবং $\log 6337{\cdot}5=3{\cdot}8019180$; $\log 63{\cdot}3743$ বাহির কর এবং একটি সংখ্যা বাহির কর যাহার লগারিদম্ $\bar{3}{\cdot}8019136$.

$\log 6337{\cdot}4=3{\cdot}8019111$

$\therefore$ $\log 63374=4{\cdot}8019111\cdots$(i)

অনুরূপে, $\log 63375=4{\cdot}8019180\cdots$(ii)

(ii) হইতে, (i) বিয়োগ করিয়া

$\log 63375=4{\cdot}8019180$

$\log 63374=4{\cdot}8019111$

$\therefore$ 1এর জন্য অন্তর $={\cdot}0000069$

সুতরাং, সংখ্যাটি 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পায় ${\cdot}0000069$.

[সাধারণতঃ ইহা প্রকাশ করা হয় "1-এর জন্য অন্তর 69" এইভাবে।]

log 63·3743-এর মান বাহির করিতে হইবে।

প্রথমতঃ log 63374·3 লও। ইহা (i) অপেক্ষা ·3 বেশী।

$\because$ 1-এর জন্য অন্তর $=69$

$\therefore$ ·3 " " " $= \cdot 3\times 69 = 20\cdot 7 = 21.$

$\therefore$ $\log 63374\cdot 3 = 4\cdot 8019111 + \cdot 0000021 = 4\cdot 8019132.$

অতএব, $\log 63\cdot 3743 = 1\cdot 8019132.$

আবার, 4·8019136 সংখ্যাটি 4·8019111 এবং 4·8019180এর মধ্যবর্তী এবং (i)-এর সহিত অন্তর 25.

69 অন্তর হয় 1-এর জন্য

$\therefore$ 25 " " $\frac{25}{69}$ বা ·36···এর জন্য

$\therefore$ $\log 63374\cdot 36 = 4\cdot 8019136.$

$\bar{3}\cdot 8019136$-এর পূর্ণক $\bar{3}$, কিন্তু অংশক $=\log 63374\cdot 36$-এর অংশক।

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা $= \cdot 006337436.$

উদা. 11. $6^{3-4x}.4^{x+5}=8$ সমীকরণ হইতে x-এর দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$ ও $\log 3 = \cdot 4771213.$

[C. U. '38]

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাওয়া যায়,

$\log (6^{3-4x}\times 4^{x+5}) = \log 8,$

বা, $\log 6^{3-4x} + \log 4^{x+5} = \log 2^3,$

বা, $(3-4x)\log (2\times 3) + (x+5)\log 2^2 = 3\log 2,$

বা, $(3-4x)\log 2 + \log 3) + 2(x+5)\log 2 = 3\log 2,$

বা, $x(-4\log 2 - 4\log 3 + 2\log 2)$

$$= -3\log 2 - 3\log 3 - 10\log 2 + 3\log 2,$$

বা, $$x = \frac{10\log 2 + 3\log 3}{4\log 3 + 2\log 2} = \frac{10\times \cdot 3010300 + 3\times \cdot 4771213}{4\times \cdot 4771213 + 2\times \cdot 3010300}$$

$$= \frac{3\cdot 010300 + 1\cdot 4313639}{1\cdot 9084852 + \cdot 6020600} = \frac{4\cdot 4416639}{2\cdot 5105452} = 1\cdot 769\cdots$$

$= 1\cdot 77$ (দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান)।

উদা. 12. নিম্নলিখিত সমীকরণটি সমাধান কর :

$2^x = 3^y$ এবং $2^{y+1} = 3^{x-1}$.

দেওয়া আছে $\log 2 = {\cdot}3010$, $\log 3 = {\cdot}4771$. [C. U. '42]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিতে উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাওয়া যায়,

$\log 2^x = \log 3^y$, বা, $x \log 2 = y \log 3 \cdots$(i)

এবং $\log 3^{x-1} = \log 2^{y+1}$, বা, $(x-1)\log 3 = (y+1)\log 2$,

বা, $x \log 3 - y \log 2 = \log 2 + \log 3 \cdots$(ii)

(i) হইতে পাওয়া যায়, $x = \dfrac{y \log 3}{\log 2}$.

x-এর এই মান (ii)-এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{y \log 3}{\log 2} \times \log 3 - y \log 2 = \log 3 + \log 2,$$

বা, $y \dfrac{\{(\log 3)^2 - (\log 2)^2\}}{\log 2} = \log 3 + \log 2$,

বা, $y = \dfrac{\log 2}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{{\cdot}3010}{{\cdot}4771 - {\cdot}3010} = \dfrac{{\cdot}3010}{{\cdot}1761} = 1{\cdot}7$ (প্রায়) ।

আবার, $x = \dfrac{y \log 3}{\log 2} = \dfrac{\log 3}{\log 2} \times \dfrac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$

$= \dfrac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{{\cdot}4771}{{\cdot}1761} = 2{\cdot}7$ (প্রায়) ।

∴ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l} x = 2{\cdot}7 \\ y = 1{\cdot}7 \end{array}\right\}$.

প্রশ্নমালা 10B

[প্রয়োজনমত নিম্নলিখিত মানগুলি ব্যবহার করিবে :

$\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$,

$\log 7 = {\cdot}8450980$, $\log 11 = 1{\cdot}0413927$]

1. অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর :—

(i) 3^{17} (ii) 2^{25} (iii) 5^{25} [C. U. '47]

(iv) 18^{30} (v) 875^{16}.

2. দশমিক বিন্দু ও প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে কতগুলি 0 আছে নির্ণয় কর :—

(i) $({\cdot}0012)^{20}$ (ii) $({\cdot}024)^{15}$ (iii) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$. (iv) $\left(\dfrac{1}{4{\cdot}05}\right)^{8}$.

(v) $(16{\cdot}8)^{-12}$ (vi) $({\cdot}0\dot{2}5\dot{9})^{50}$.

3. নিম্নলিখিতগুলির লগারিদম বাহির কর :—

(i) 45 [C. U. '51] (ii) $37\frac{5}{7}$ (iii) '015 [H. S. '61]

(iv) '04312 (v) $('405)^{\frac{1}{6}}$ [H.S. '64 Compl.] (vi) $\left(\frac{5}{72}\right)^{-\frac{1}{8}}$

4. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :—

(a) $\log\left\{\frac{(10\cdot8)^{\frac{1}{2}}\times('24)^{\frac{5}{8}}}{(90)^2}\right\}$ [H. S. '65]

(b) $\log\left\{\frac{(7\cdot2)^3\times('016)^4}{\left(\frac{6}{5}\right)^{15}}\right\}$, [H. S. '65 Compl.]

দেওয়া আছে log 2 = '3010300 এবং lok 3 = '4771213.

5. সরল কর : $\log\sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-\frac{4}{3}}}}$.

6. মান নির্ণয় কর :—

(a) $\sqrt[5]{'00000165}$, দেওয়া আছে $\log_{10}165 = 2\cdot2175$
এবং $\log_{10}6974 = 3\cdot8435$. [H. S. '64]

(b) $\left\{\frac{('32)^8\times(625)^4}{('00432)^2\times('3125)^3\times25}\right\}^{\frac{1}{5}}$

দেওয়া আছে log 2 = '3010300, log 3 = '4771213
এবং log 259569 = 5'4142524 (আসন্ন সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত)। [H. S. '67]

7. 3'528-এর সপ্তম মূল বাহির কর ; দেওয়া আছে,
log 1197'342 = 3'0782184.

8. $\log [(2\cdot7)^3\times('81)^{\frac{4}{5}}\div('90)^{\frac{5}{4}}]$-এর মান বাহির কর।
দেওয়া আছে log 3 = '4771213
[C. U. '46 ; H. S. '67 Compl.]

9. দেওয়া আছে log 69714 = 4'8433200
এবং log 69715 = 4'8433262, $\log('000697145)^{\frac{1}{5}}$-এর মান নির্ণয় কর।

10. log 8'6717 = '9381042 এবং log 8'6718 = '9381093 হইলে, log 86717'6-এর মান বাহির কর।

11. (*a*) $\log 7{\cdot}7215 = {\cdot}8877017$ এবং $\log 7{\cdot}7216 = {\cdot}8877073$ হইলে, যে সংখ্যার লগারিদম্ $2{\cdot}8877034$ তাহা নির্ণয় কর।

(*b*) $\log 14673 = 4{\cdot}1665189$ এবং $\log 14674 = 4{\cdot}1665485$ হইলে, antilog $\bar{3}{\cdot}1665396$ বাহির কর।

12. কোন একটি নিধানে কোন একটি সংখ্যার লগারিদম্ 6 এবং প্রথম নিধান ও 25-এর গুণফল নিধান হইলে ঐ সংখ্যাটির 8 গুণ সংখ্যার লগারিদম্ হয় 3, প্রথম নিধানটি নির্ণয় কর। [H.S. '63 Compl.]

13. প্রথমে প্রদত্ত log 2, log 3 প্রভৃতির মানগুলির সাহায্যে নিম্নের সমীকরণগুলির সমাধান কর (আসন্ন দুই দশমিক অঙ্কে) :

(*a*) $3^x = 2$ [C.U. '27]

(*b*) $2^x 3^{2x} = 100$ [C.U. '25]

(*c*) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$ [C.U. '41]

(*d*) $2^x 7^y = 80000,\ 3^y = 500$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর। [C.U. '47]

(*e*) $5^{x+1} = 6^y,\ 2^{x+y} = 3^{x-y}$.

14. $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$ হইলে দেখাও যে

$$x \log\left(\frac{b}{a}\right) = \log a.$$ [C. U. '37]

একাদশ অধ্যায়

সূচক শ্রেণী ও লগারিদ্‌ম্‌ শ্রেণী

(Exponential and Logarithmic Series)

[সূচক শ্রেণী]

§ **11·1.** e শ্রেণী (The Series e)

$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$, এই অসীম শ্রেণীটিকে e এই প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহাকে e-শ্রেণী বলা হয়। গণিতশাস্ত্রে ইহা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। e শ্রেণীটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত বটে, কিন্তু উহার মান সসীম এবং উহা 2 ও 3এর মধ্যবর্তী।

§ **11·2.** **প্রমাণ করিতে হইবে যে e-এর মান সসীম এবং 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী।** (To prove that e is finite and lies between 2 and 3).

$\therefore \quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}\cdots=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots$

$\therefore$ e-এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর (কারণ, ডানপক্ষের বিস্তৃতিতে 2-এর সহিত বাকি ধনাত্মক রাশিগুলি যোগ করিলে তবে e-এর সমান হয়)।

আবার, $\because \frac{1}{\lfloor 2}=\frac{1}{2}$; $\lfloor 3=3.2.1>2.2.1$ বা $\lfloor 3>2^2$, $\therefore \frac{1}{\lfloor 3}<\frac{1}{2^2}$.

অনুরূপে, $\frac{1}{\lfloor 4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lfloor 3}<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2^3}$ ইত্যাদি

$\therefore \quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$<1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdot\cdot$ অসীম পর্যন্ত)

অর্থাৎ $e<1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$ [ডানপক্ষের অসীম শ্রেণী যোগ করিয়া]

$\therefore \quad e<(1+2)$ অর্থাৎ $e<3$, সুতরাং ইহার মান সসীম।

অতএব প্রমাণিত হইল যে e-এর মান সসীম এবং 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী।

[**দ্রষ্টব্য :** e-এর মান 2 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 3 অপেক্ষা কম। e শ্রেণীর ডানপক্ষের পদগুলির 6 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ মান যোগ করিলে পাওয়া যায় $e=2{\cdot}718282$ (6 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)]

§ **11·3. e একটি অমেয় সংখ্যা।**

(To prove that e is an incommensurable number).

যদি সম্ভব হয়, ধরা যাউক e একটি প্রমেয় রাশি এবং উহা $\frac{m}{n}$-এর সমান, যেখানে m ও n দুইটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব, $\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}+\frac{1}{|\underline{n+1}}+\cdots$

উভয় পক্ষকে $\lfloor n$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$m\,|\underline{n-1}=\lfloor n+\frac{\lfloor n}{\lfloor 2}+\frac{\lfloor n}{\lfloor 3}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$$

*[দ্রষ্টব্য : এখানে গুণগুলি বুঝিয়া লও, $\frac{m}{n}\times\lfloor n=\frac{m}{n}\times n\,|\underline{n-1}$

$=m\,|\underline{n-1}$; $\frac{1\times\lfloor n}{|\underline{n+1}}=\frac{1\times\lfloor n}{(n+1)\lfloor n}=\frac{1}{n+1}$; ইত্যাদি।]

এক্ষণে, n অখণ্ড সংখ্যা বলিয়া $|\underline{n-1}$ অখণ্ড সংখ্যা, সুতরাং বামপক্ষের $m|\underline{n-1}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা ($\because$ m-ও অখণ্ড সংখ্যা)।

কিন্তু ডানপক্ষের $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots$ প্রভৃতি পদগুলি ব্যতীত অন্য পদগুলি অখণ্ড রাশি।

$\therefore$ $m\,|\underline{n-1}=$একটি অখণ্ড রাশি $+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

এখন, $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$

এইগুলির সমষ্টি $>\frac{1}{n+1}$,

কিন্তু $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$

$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$ [ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী]

$$\text{অর্থাৎ} <\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} \text{ অর্থাৎ } <\frac{1}{n}$$

অতএব, বামপক্ষের পদগুলির সমষ্টি $\frac{1}{n+2}$ ও $\frac{1}{n}$ এর মধ্যবর্তী সুতরাং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হইবে।

$\therefore$ $m\,|\underline{n-1}=$একটি অখণ্ড রাশি$+$একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ; কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ, একটি অখণ্ড রাশি কখনও অপর কোন অখণ্ড রাশি ও প্রকৃত

ভগ্নাংশের সমষ্টির সমান হইতে পারে না। অতএব, e একটি প্রমেয় রাশি হইতে পারে না, উহা একটি অমেয় রাশি।

§ **11·4 সূচক শ্রেণী :** e^xএর বিস্তৃতিকে সূচক শ্রেণী বলা হয়। প্রমাণ করা যায় যে, x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য

$$e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots\propto \text{পর্যন্ত}\cdots(i)$$

ইহাকে **সূচক উপপাদ্য** (Exponential Theorem) বলা হয় এবং ইহার ডানপক্ষটি অভিসারী।

অনুসিদ্ধান্ত : সূচক উপপাদ্য x-এর সকল মানে সিদ্ধ, সুতরাং x-এর স্থানে $-x$ ও -1 বসাইয়া উহা হইতে পাওয়া যায়

$$e^{-x}=1-\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+(-1)^r\ \frac{x^r}{\lfloor r}+\ldots$$

$$e^{-1}=1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\left(-1\right)^r\frac{1}{\lfloor r}+\ldots$$

§ **11·5.** a^xএর বিস্তৃতি (Expansion of a^x) যেখানে $a>0$ **:** সূচক উপপাদ্যে xএর স্থানে cx লিখিয়া পাই,

$$e^{cx}=1+\frac{cx}{\lfloor 1}+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots$$

এক্ষণে মনে কর $e^c=a$, সুতরাং $c=\log_e a$ এবং $a^x=(e^c)^x=e^{cx}$

$$\therefore\quad a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}(\log_e a)^3+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

ইহাকেও সূচক উপপাদ্য বলা হয়।

[a^x ও e^x-কে **সূচক অপেক্ষক** (Exponential function) বলে।]

লগারিদম্ শ্রেণী (Logarithmic Series)

§ **11·6.** সূচক উপপাদ্য হইতে প্রমাণ করা যায় যে

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{r-1}\ \frac{x^r}{r}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

ইহাকে লগারিদম্ শ্রেণী বা লগারিদম্ উপপাদ্য বলা হয়।

এই সূত্রে ডানপক্ষের পদগুলির সংখ্যা অসীম এবং xএর মান -1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে ঐ শ্রেণী অভিসারী (convergent) হইবে।

অতএব, xএর ঊর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে $\log(1+x)$-এর বিস্তৃতি সিদ্ধ হইবে যদি $-1<x\leqslant 1$ হয়। $-1<x\leqslant 1$ এই প্রতীকের অর্থ এই যে, x-এর মান -1 অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু 1-এর সমানও হইতে পারে কিংবা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও হইতে পারে। অতএব, x-এর মানের ঐ সীমার মধ্যে লগারিদম্ উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। (1) লগারিদম্ উপপাদ্যের x এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই ($-1\leqslant x<1$ হইলে)

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^r}{r}\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(2) লগারিদম্ শ্রেণীতে x-এর মান 1 ধরিয়া পাই,

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(3) যদি $x=\frac{1}{n}$ হয়, তবে $x<1$ হইলে $n>1$ হইবে। এক্ষণে লগারিদম্ উপপাদ্যে $x=\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাই

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots[n>1 \text{ হইলে}]$$

বা, $$\log_e\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log_e(n+1)-\log_e n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\cdots\cdots(A)$$

অনুরূপে অনুসিদ্ধান্ত (1) হইতে পাই

$$\log_e\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

বা, $$\log_e(n-1)-\log_e n=-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore\ \log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots(B)$$

আবার, (A) ও (B) যোগ করিয়া পাই

$$\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\cdots\right)\cdots(C)$$

§ 11·7. সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণীর পার্থক্য।

e^x ও $\log_e(1+x)$ বিস্তৃতিদ্বয় লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, প্রথমটিতে প্রথম পদ 1, সমস্ত পদগুলি ধনাত্মক, হরগুলি সবই factorial এবং $(r+1)$-তম পদে x^r পাওয়া যায়।

দ্বিতীয়টিতে অর্থাৎ লগারিদম্ শ্রেণীতে প্রথম পদ x, পদগুলি পর্যায়ক্রমে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, হরগুলির কোনটিতে factorial নাই এবং rতম পদে x^r পাওয়া যায়।

§ **11·8.** লগারিদম্ উপপাদ্যের প্রমাণটি পাঠ্য বহির্ভূত, তথাপি প্রমাণটি এখানে দেওয়া হইল। ছাত্রগণের ইহা অভ্যাস করিতে হইবে না।

সূচক উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়, যখন $a>0$,

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots\cdots,$$

এক্ষণে aএর স্থানে $(1+x)$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$(1+x)^y=1-y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2+\cdots\quad\cdots(1)$$

আবার, x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়,

$$(1+x)^y=1+xy+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\quad\cdots(2)$$

অতএব, x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে,

$$1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2+\cdots$$

$$=1+xy+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots,$$

এবং ইহা একটি অভেদ। অতএব, ইহার উভয়পক্ষের y-এর সহগগুলি সমান হইবে।

এখানে বামপক্ষে y-এর সহগ $=\log_e(1+x)$ এবং ডানপক্ষে y-এর সহগ

$$=x+\frac{-1}{\lfloor 2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{\lfloor 3}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{\lfloor 4}x^4+\cdots$$

$$\therefore\ \log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\left(-1\right)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

যখন x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

§ **11·9. লগ তালিকা প্রণয়ন** (Construction of Logarithmic Tables):

e শ্রেণীটিকে অর্থাৎ পূর্বে যে শ্রেণীটিকে e প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে প্রথম লগারিদম্ নির্ণয়ে তাহাকেই নিধান (base) ধরা হয়। এইজন্য ঐ শ্রেণীটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। e নিধানের লগারিদম্গুলিকে Napierian

System বলা হয়, কারণ Napier উহা প্রথম উদ্ভাবন করেন। এই লগারিদম্গুলিকে natural লগারিদম্ও বলা হয়। আর সাধারণ লগারিদমে 10কে নিধান ধরা হয়।

এক্ষণে এই Napierian লগারিদম্ নির্ণয়ে লগারিদম্ শ্রেণীর প্রয়োগ এবং তাহা হইতে সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের প্রণালী সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

$\log_e (1+x)$ শ্রেণীটি $x>1$ হইলে প্রয়োগ করা যায় না তাহা পূর্বে বলা হইয়াছে। এইজন্য অন্য শ্রেণী নির্ণয় করিয়া লগারিদম্ তালিকা প্রস্তুত করা হয়।

আমরা 11·6 নং অনুচ্ছেদে ও উহার অনুসিদ্ধান্তে দেখিয়াছি যে,

$-1<x<1$ হইলে,

$$\log_e (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots, \text{ এবং}$$

$$\log_e (1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

$$\therefore \log_e \frac{1+x}{1-x}=\log_e (1+x)-\log_e (1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right) \quad \cdots(1)$$

এক্ষণে $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ বসাইয়া, অর্থাৎ $x=\frac{1}{2n+1}$ ধরিয়া পাই

$$\log_e \frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\},$$

$$\therefore \log_e (n+1)-\log_e n$$

$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\} \cdots(2)$$

§ 11·10. সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়

আমরা লগারিদম্ অধ্যায়ে দেখিয়াছি যে, a নিধানের কোন লগারিদম্কে b নিধানের লগারিদমে পরিবর্তিত করিতে হইলে উহাদিগকে $\frac{1}{\log_a b}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে, সংখ্যাসমূহের 10 নিধানের সাধারণ লগারিদমে নির্ণয়ের জন্য ঐ সংখ্যাসমূহের Napierian (অর্থাৎ e নিধানের) লগারিদম্গুলিকে $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। ইহাকে মডিউলাস বলে।

দ্বিতীয়টিতে অর্থাৎ লগারিদ্‌ম্ শ্রেণীতে প্রথম পদ x, পদগুলি পর্যায়ক্রমে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, হরগুলির কোনটিতে factorial নাই এবং rতম পদে x^r পাওয়া যায়।

§ **11·8.** লগারিদ্‌ম্ উপপাদ্যের প্রমাণটি পাঠ্য বহির্ভূত, তথাপি প্রমাণটি এখানে দেওয়া হইল। ছাত্রগণের ইহা অভ্যাস করিতে হইবে না।

সূচক উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়, যখন $a>0$,

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots\cdots,$$

এক্ষণে aএর স্থানে $(1+x)$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$(1+x)^y=1-y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2+\cdots \quad \cdots(1)$$

আবার, x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়,

$$(1+x)^y=1+xy+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots \quad \cdots(2)$$

অতএব, x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে,

$$1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2+\cdots$$

$$=1+xy+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots,$$

এবং ইহা একটি অভেদ। অতএব, ইহার উভয়পক্ষের y-এর সহগগুলি সমান হইবে।

এখানে বামপক্ষে y-এর সহগ $=\log_e(1+x)$ এবং ডানপক্ষে y-এর সহগ

$$=x+\frac{-1}{\lfloor 2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{\lfloor 3}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{\lfloor 4}x^4+\cdots$$

$$\therefore\ \log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\left(-1\right)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

যখন x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

§ **11·9. লগ তালিকা প্রণয়ন** (Construction of Logarithmic Tables):

e শ্রেণীটিকে অর্থাৎ পূর্বে যে শ্রেণীটিকে e প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে প্রথম লগারিদ্‌ম্ নির্ণয়ে তাহাকেই নিধান (base) ধরা হয়। এইজন্য ঐ শ্রেণীটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। e নিধানের লগারিদ্‌ম্‌গুলিকে Napierian

System বলা হয়, কারণ Napier উহা প্রথম উদ্ভাবন করেন। এই লগারিদম্‌গুলিকে natural লগারিদম্‌ও বলা হয়। আর সাধারণ লগারিদমে 10কে নিধান ধরা হয়।

এক্ষণে এই Napierian লগারিদম্ নির্ণয়ে লগারিদম্ শ্রেণীর প্রয়োগ এবং তাহা হইতে সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের প্রণালী সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

$\log_e (1+x)$ শ্রেণীটি $x>1$ হইলে প্রয়োগ করা যায় না তাহা পূর্বে বলা হইয়াছে। এইজন্য অন্য শ্রেণী নির্ণয় করিয়া লগারিদম্ তালিকা প্রস্তুত করা হয়।

আমরা 11·6 নং অনুচ্ছেদে ও উহার অনুসিদ্ধান্তে দেখিয়াছি যে,

$-1<x<1$ হইলে,

$\log_e (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$, এবং

$\log_e (1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$

$$\therefore \log_e \frac{1+x}{1-x}=\log_e (1+x)-\log_e (1-x)$$
$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right) \cdots(1)$$

এক্ষণে $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ বসাইয়া, অর্থাৎ $x=\frac{1}{2n+1}$ ধরিয়া পাই

$$\log_e \frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\},$$

$$\therefore \log_e (n+1)-\log_e n$$
$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}\ldots(2)$$

§ 11·10. সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়

আমরা লগারিদম্ অধ্যায়ে দেখিয়াছি যে, a নিধানের কোন লগারিদম্‌কে b নিধানের লগারিদমে পরিবর্তিত করিতে হইলে উহাদিগকে $\frac{1}{\log_a b}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে, সংখ্যাসমূহের 10 নিধানের সাধারণ লগারিদম নির্ণয়ের জন্য ঐ সংখ্যাসমূহের Napierian (অর্থাৎ e নিধানের) লগারিদম্‌গুলিকে $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। ইহাকে মডিউলাস বলে।

এক্ষণে দেখ, উপরের (2)-শ্রেণীতে $n=1$ ধরিয়া $\log_e 2$ পাওয়া যায়। আবার, $n=2$ ধরিয়া $\log_e 3-\log_e 2$ পাওয়া যায়, সুতরাং উহা হইতে $\log_e 3$ নির্ণয় করা যাইবে। আবার $\log_e 9=\log_e 3^2=2\ \log_e 3$, সুতরাং $\log_e 3$ হইতে $\log_e 9$ পাওয়া যায়।

এক্ষণে (2)-শ্রেণীটিতে $n=9$ ধরিলে, $\log_e 10-\log_e 9$ পাওয়া যাইবে, সুতরাং উহা হইতে $\log_e 10$ নির্ণয় করা যাইবে।

এইরূপে $\log_e 10$-এর মান 2·30258509....পাওয়া যায়। অতএব, সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ পদ্ধতির মডিউলাস হইল $\frac{1}{2\cdot30258509}$ বা 0·43429448 ; এই মডিউলাসকে μ দ্বারা সূচিত করা হয়।

এক্ষণে, উপরের (2)-শ্রেণীকে μ দ্বারা গুণ করিয়া সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয়ের সূত্র (formula) পাওয়া যায়।

অতএব, ঐ সূত্রটি হইল

$$\mu \log_e(n+1)-\mu \log_e n$$

$$=2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$$

অর্থাৎ $\log_{10}(n+1)-\log_{10}n$

$$=2\left\{\frac{\mu}{2n+1}+\frac{\mu}{3(2n+1)^3}+\frac{\mu}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\} \quad \cdots(3)$$

[**দ্রষ্টব্য :** দুইটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে একটির লগারিদ্‌ম্‌ জানা থাকিলে ঐ সূত্রের সাহায্যে অপরটির লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করা যায়।

মৌলিক সংখ্যাগুলির (prime numbers) লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয়ের জন্য ঐ সূত্রের প্রয়োজন হয়। যৌগিক সংখ্যার (composite number) মৌলিক উৎপাদকগুলির লগারিদ্‌ম্‌গুলি যোগ করিয়া ঐ সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : উপরের সূত্র-(3) অনুসারে প্রক্রিয়াটি সহজসাধ্য নহে। সেইজন্য নিম্নে অন্য সূত্র নির্ণয় করা হইতেছে।

$\log_{10}(1+x)=\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)$ এই সূত্রে x-এর স্থানে $\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\mu\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\right).$$

$$\therefore\ \log_{10}(n+1)-\log_{10}n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}-\cdots \quad \cdots(4)$$

আবার, x-এর স্থানে $-\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$\log_{10}\frac{n-1}{n}=-\frac{\mu}{n}-\frac{\eta}{2n^2}-\frac{\mu}{3n^3}-\cdots$$

$$\therefore\ \log_{10}n-\log_{10}(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots \quad \cdots(5)$$

এই সূত্রের প্রয়োগ অপেক্ষাকৃত সহজসাধ্য।

উদাহরণমালা 11

(সূচক শ্রেণী সংক্রান্ত)

উদা. 1. $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$এর মান নির্ণয় কর।

$$\because\ e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots,$$

$\therefore\ x=1$ ধরিয়া পাই

$$e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots \quad \cdots(1)$$

এবং $x=-1$ ধরিয়া পাই

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots \quad \cdots(2)$$

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$e-\frac{1}{e}=2+2\left(\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

উদা. 2. $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$-এর চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

[C.U. '36]

$$\because\ e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$$

$\therefore\ x=-\frac{1}{5}$ ধরিয়া পাই

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^4-\frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\cdots\cdots$$

$$=1-{}^{\cdot}2+\frac{{}^{\cdot}04}{\lfloor 2}-\frac{{}^{\cdot}008}{\lfloor 3}+\frac{{}^{\cdot}0016}{\lfloor 4}-\frac{{}^{\cdot}00032}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

$$=1-{}^{\cdot}2+{}^{\cdot}02-{}^{\cdot}001333\cdots+{}^{\cdot}000066\cdots-{}^{\cdot}0000026\cdots+\cdots$$

$$=1{}^{\cdot}020066\cdots-{}^{\cdot}2013359\cdots={}^{\cdot}8187$$ (আসন্ন)।

উদা. 3. $1+\frac{a+bx}{\lfloor 1}+\frac{(a+bx)^2}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{(a+bx)^r}{\lfloor r}+\cdots$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী $=e^{a+bx}=e^a.e^{bx}$

$$=e^a\left(1+\frac{bx}{\lfloor 1}+\frac{b^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{b^nx^n}{\lfloor n}+\cdots\cdots\right)$$

$\therefore$ x^n-এর নির্ণেয় সহগ $=e^a\times\frac{b^n}{\lfloor n}=\frac{e^nb^n}{\lfloor n}.$

উদা. 4. $e^{e^{cx}}$-কে x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে x^4 পর্যন্ত বিস্তার কর।

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\ e^{e^{cx}}=e^{1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=e^1\times e^{cx+\frac{c^3x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=e.e^y\left[\text{মনে কর } y=cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}\cdots\right]$$

$$=e\left(1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$$=e\left\{1+\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)+\frac{1}{\lfloor 2}\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lfloor 3}\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^3+\frac{1}{\lfloor 4}\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^4+\cdots\right\}$$

[y-এর মান বসাইয়া]

$$=e(1+cx+c^2x^2+\tfrac{5}{6}c^3x^3+\tfrac{5}{8}c^4x^4+\cdots).$$

উদা. 5. দেখাও যে, $e^{-1}=\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\cdots\infty$ পর্যন্ত। [C.U. '37]

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots\cdots\infty$$ পর্যন্ত

$$=\left(\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|6}}-\frac{1}{\underline{|7}}\right)+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=\frac{3-1}{\underline{|3}}+\frac{5-1}{\underline{|5}}+\frac{7-1}{\underline{|7}}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{4}{\underline{|5}}+\frac{6}{\underline{|7}}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}$$

উদা. 6. দেখাও যে,

$$1+\frac{1+2}{\underline{|2}}+\frac{1+2+2^2}{\underline{|3}}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\underline{|4}}+\cdots=e^2-e.$$

[C. U. '29]

এখানে স্পষ্টতঃ r-তম পদ $=\dfrac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}}{\underline{|r}}$

$$=\frac{1}{\underline{|r}}\,\frac{2^r-1}{2-1}=\left(\frac{2^r-1}{\underline{|r}}\right) \quad \text{[গুণোত্তর শ্রেণী যোগ করিয়া]}$$

∴ প্রদত্ত বামপক্ষ $=(2-1)+\dfrac{2^2-1}{\underline{|2}}+\dfrac{2^3-1}{\underline{|3}}+\dfrac{2^4-1}{\underline{|4}}+\cdots\infty$ পর্যন্ত

$$=\left(\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{2^2}{\underline{|2}}+\frac{2^3}{\underline{|3}}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right)$$

$$=(e^2-1)-(e-1)=e^2-e.$$

[দ্রষ্টব্য : সূচক উপপাদ্যে $x=2$ ধরিয়া পাই

$e^2=1+2+\dfrac{2^2}{\underline{|2}}+\dfrac{2^3}{\underline{|3}}+\cdots$, ∴ $e^2-1=2+\dfrac{2^2}{\underline{|2}}+\dfrac{2^3}{\underline{|3}}+\cdots$]

উদা. 7. প্রমাণ কর যে,

$$\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right)=1.$$

∵ $1+\dfrac{1}{\underline{|1}}+\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\cdots=e.$

এবং $1-\dfrac{1}{\underline{|1}}+\dfrac{1}{\underline{|2}}-\dfrac{1}{\underline{|3}}+\cdots=e^{-1}.$

∴ প্রদত্ত বামপক্ষ $=e\times e^{-1}=e\times\dfrac{1}{e}=1.$

উদা. 8. অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$$\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1+x}{\underline{|2}}+\frac{1+x+x^2}{\underline{|3}}+\frac{1+x+x^2+x^3}{\underline{|4}}+\cdots$$

এখানে $t_n = \frac{1+x+x^2+\cdots n\text{-তম পদ পর্যন্ত}}{\lfloor n} = \frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor n}$

$\therefore \quad t_1 = \frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 1}, \; t_2 = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 2}, \; t_3 = \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 3}, \cdots$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল

$$= \frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{\lfloor 1} + \frac{1-x^2}{\lfloor 2} + \frac{1-x^3}{\lfloor 3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1-x}\left\{\left(\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\right) - \left(\frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{1-x}\left\{(e-1) - (e^x - 1)\right\} = \frac{e-e^x}{1-x}.$$

উদা. 9. মান নির্ণয় কর : $1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1.3}{\lfloor 4} + \frac{1.3.5}{\lfloor 6} + \cdots \infty$ পর্যন্ত.

প্রদত্ত রাশি $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots = e^{\frac{1}{2}}.$$

উদা. 10. $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ কে xএর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে প্রকাশ কর যেখানে $i = \sqrt{-1}$. [H. S. '65]

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{\lfloor 2} + \frac{(ix)^3}{\lfloor 3} + \frac{(ix)^4}{\lfloor 4} + \frac{(ix)^5}{\lfloor 5} + \frac{(ix)^6}{\lfloor 6} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{\lfloor 2} - i\frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + i\frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \cdots \quad \cdots(1)$$

অনুরূপে $e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{\lfloor 2} + i\frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - i\frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \cdots \quad \cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2)এর যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

[লগারিদম্ শ্রেণী সংক্রান্ত]

উদা. 11. (i) $\log_e 2$ এবং (ii) $\log_e 10$ এর চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

(i) 11·5 অনুচ্ছেদ, অনুসিদ্ধান্ত-(2)-এর সূত্র (C) হইল

$$\log_e (n+1) - \log_e (n-1) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots\right)$$

এক্ষণে n-এর মান 3 ধরিয়া পাই

$$\log_e 4-\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right)$$

উহার বামপক্ষ $=\log_e 2^2-\log_e 2=2\log_e 2-\log_e 2=\log_e 2.$

$$\therefore\quad \log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right)$$

এক্ষণে, $\frac{1}{3}=\cdot\dot{3}$	$=\cdot 3333$	33
$\frac{1}{3.3^3}=\frac{\cdot\dot{3}}{3.3^2}=\frac{\cdot 037037}{3}$	$=\cdot 0123$	45
$\frac{1}{5.3^5}=\frac{\cdot 037037}{5.3^2}=\frac{\cdot 004115}{5}$	$=\cdot 0008$	23
$\frac{1}{7.3^7}=\frac{\cdot 004115}{7.3^2}=\frac{\cdot 000457}{7}$	$=\cdot 0000$	65
$\frac{1}{9.3^9}=\frac{\cdot 000457}{9.3^2}=\frac{\cdot 000050}{9}$	$=\cdot 0000$	05
	$=\cdot 3465$	71

$\therefore$ ডান পক্ষ $=2\times\cdot 346571=\cdot 693142$

$\therefore$ $\log_e 2=\cdot 6931$ (4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)।

[**দ্রষ্টব্য :** 11·8 অনুচ্ছেদের সূত্র (2) হইতেও $\log_e 2$এর মান নির্ণয় করা যায়।

(*ii*) সূত্র (*C*)-এ nএর মান 9 বসাইয়া পাই

$$\log_e 10-\log_e 8=2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\cdots\right);$$

$$\log_e 8=\log_e 2^3=3\log_e 2=3\times\cdot 693142=2\cdot 079426$$

এক্ষণে, $\frac{1}{9}=\cdot\dot{1}$	$=\cdot 1111$	11
$\frac{1}{3.9^3}=\frac{\cdot\dot{1}}{3.9^2}=\frac{\cdot 001221}{3}$	$=\cdot 0004$	07
$\frac{1}{5.9^5}=\frac{\cdot 001221}{5.9^2}=\frac{\cdot 000005}{5}$	$=\cdot 0000$	01
	$=\cdot 1115$	19

$\therefore$ ডানপক্ষ $=2\times\cdot 111519=\cdot 223038$

$\therefore$ $\log_e{}^{10}=\log_e 8+\cdot 223038=2\cdot 079426+\cdot 223038$
$=2\cdot 302464=2\cdot 3025$ (আসন্ন)।

উদা. 12. $\log_{10} 3$এর চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

$$\because\quad \log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots$$

$\therefore$ $n=10$ বসাইয়া পাই $\log_e 10-\log_e 9=\frac{1}{10}+\frac{1}{2.100}+\frac{1}{3.1000}+\cdots$

এক্ষণে $\log_{10}10-\log_{10}9=\log_{10}\frac{10}{9}=\log_e\frac{10}{9}\times\log_{10}^e$
$=(\log_e 10-\log_e 9)\log_{10}^e$

আবার $\log_{10}^e=\frac{1}{\log_e 10}=\frac{1}{2\cdot3025}$ (উদা. 11) $=0\cdot43429448$

$\therefore$ $\log_{10}10-\log_{10}9=0\cdot43249448\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}+\cdots\right)$

কিন্তু $\log_{10}10=1$ এবং $\log_{10}9=\log 3^2=2\log 3$

$\therefore$ $1-2\log3=\cdot0434294\cdots+\cdot0021714\cdots+\cdot0001447\cdots$
$+\cdot0000108\cdots+\cdot0000086\cdots+\cdots=\cdot0457649$

$\therefore$ $\log 3=\frac{1}{2}(1-0457649\cdots)=\cdot4771$ (4-দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)

দ্রষ্টব্য : $\because$ $\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ ধরিয়া পাই $\frac{1+x}{1-x}=3$, সুতরাং

$\log 3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}+\cdots\right)$. এক্ষণে ভাগক্রিয়া দ্বারা ডান পক্ষের মান নির্ণয় করিয়া log 3এর মান পাওয়া যাইবে। এই প্রণালী অপেক্ষা উপরে প্রদর্শিত প্রণালী সহজ।]

উদা. 13. দেখাও যে $\log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots$

$\because$ $-<x\leqslant1$ হইলে,

$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$ হয়

$\therefore$ xএর মান 1 বসাইয়া পাই

$\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots$

$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots$(A)

আবার, $\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots$

$=1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})-(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})-\cdots$

$=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}-\cdots$(B)

এক্ষণে (A) ও (B) যোগ করিয়া পাই

$$2\log_e 2 = 1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{3-1}{1.2.3}+\frac{5-3}{3.4.5}+\frac{7-5}{5.6.7}+\cdots$$

$$=1+\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots$$

$$\therefore\ \log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots$$

উদা. 14. যোগফল নির্ণয় কর : $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী}=2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3\ 2^3}+\frac{1}{5.2^5}+\frac{1}{7.2^7}+\cdots\right\}$$

$$=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right\}\ [\,x=\tfrac{1}{2}\text{ ধরিয়া}\,]$$

$$=\log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\ [\,x\text{ এর মান }\tfrac{1}{2}\text{ বসাইয়া}\,]$$

$$=\log_e 3.$$

উদা. 15. অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots$, যখন $x^2<1$.

$$\because\ \frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\therefore\ \text{প্রদত্ত শ্রেণী}=(1-\tfrac{1}{2})x+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})x^2+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})x^3+\cdots$$

$$=(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots)-(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{4}x^3+\cdots)$$

$$=-\log_e(1-x)+\{1-(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{4}x^3+\cdots)\}$$

$$=-\log_e(1-x)+\left\{1-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots\right)\right\}$$

$$=-\log_e(1-x)+1-\frac{1}{x}\times-\log_e(1-x)$$

$$=-\log_e(1-x)+1+\frac{1}{x}\log_e(1-x)$$

$$=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\log_e\left(1-x\right)=1+\frac{1-x}{x}\log_e(1-x).$$

উদা. 16. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$, হইলে দেখাও যে.

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots$$ [C.U. '31]

$$y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots=\log_e(1+x)$$

$$\therefore\ 1+x=e^y,\ \therefore\ x=e^y-1=\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right)-1$$

$$=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots$$

প্রশ্নমালা 11

(সূচক শ্রেণী সংক্রান্ত

1. $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

2. $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ এর চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

3. $\frac{1-x}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

4. $\frac{p-qx}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

5. e^{e^x} এবং $e^{e^{px}}$ এর x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

6. $\frac{1-x-x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

7. $\frac{1+3x+x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

8. $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots\right)$কে e দ্বারা প্রকাশ কর। [C. U. '38]

9. দেখাও যে, $\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{4}{\underline{|3}}+\frac{6}{\underline{|5}}+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=e$. [C. U. '36]

10. $\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\right)^2-\left(1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\right)^2=1.$

11. $1+\frac{1+2}{\underline{|2}}+\frac{1+2+3}{\underline{|3}}+\frac{1+2+3+4}{\underline{|4}}+\cdots=\frac{3}{2}e.$ [C. U. '35]

12. $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\cdots=\frac{e}{2}$ [G. U. '49]

13. $\frac{1^3}{\underline{\lvert 1}}+\frac{2^3}{\underline{\lvert 2}}+\frac{3^3}{\underline{\lvert 3}}+\frac{4^3}{\underline{\lvert 4}}\cdots=5e$ [C. U. '39]

14. $\frac{1}{\underline{\lvert 2}}-\frac{1}{\underline{\lvert 3}}+\frac{1}{\underline{\lvert 4}}-\frac{1}{\underline{\lvert 5}}+\frac{1}{\underline{\lvert 6}}-\cdots=\frac{1}{e}.$

15. $\dfrac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots}{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots}=\frac{e-1}{e+1}.$ [C. U '34]

16. $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}e(e^2-1)$

[Madras '53]

17. প্রমাণ কর যে, $e^{-1}=\left(\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\cdots\right).$ [Osmania '52]

যোগফল নির্ণয় কর :

18. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{9}{4!}+\cdots$ 19. $\frac{1^2}{\underline{\lvert 1}}+\frac{2^2}{\underline{\lvert 2}}+\frac{3^2}{\underline{\lvert 3}}+\cdots$

20. $1+\frac{2^3}{1!}x+\frac{3^3}{2!}x^2+\cdots+\frac{(n+1)^3}{n!}x^n+\cdots$ [B. U. '48]

[লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী সংক্রান্ত]

21. দেখাও যে, $\log_e 10=3\log_e 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^3-\cdots$

প্রমাণ কর :

22. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots=1-\log_e 2.$ [C. U. '40]

23. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$

[C. U. '45]

24. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.6.7}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=3\log_e 2-1.$ [C.U. '48]

25. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{2(x+1)^2}+\frac{x^3-1}{3(x+1)^3}+\cdots=\log x.$ [Madras '54]

26. দেখাও যে $\log_e 3=1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots$

[P. U. '49]

অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :—

27. $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots$ [C. U. '43]

28. $1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots$ [C. U. '49]

29. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$, যদি $x<1$. [C. U. '44]

30. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}+\cdots$ [C. U. '53]

31. $\log_e(1-3x+2x^2)$কে xএর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তার করিয়া x^nএর সহগ নির্ণয় কর।

32. $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$ হইলে, দেখাও যে,

$$x=1-e^{-y}=y-\frac{y^2}{\underline{|2}}+\frac{y^2}{\underline{|3}}-\frac{y^4}{\underline{|4}}+\cdots$$ [C. U. '50]

33. α এবং β, $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের বীজ হইলে দেখাও যে $\log(a-bx+cx^2)$

$$=\log a-(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2-\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots$$

34. প্রমাণ কর যে,

$$\log_e m=2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\}.$$

35. প্রমাণ কর যে, $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right)^2$

$$=1+\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)^2.$$ [B.U.E.'64 ; M.U. '49]

36. যোগফল নির্ণয় কর : $1+\frac{\log_e 2}{\underline{|2}}+\frac{(\log_e 2)^2}{\underline{|3}}+\cdots$

[B. U. '47]

দ্বাদশ অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound interest)

§ **12·1. সুদ বা কুসীদ** (interest) :

যখন কিছু টাকা ধার দেওয়া হয়, তখন ধারগ্রহীতা ঐ টাকা ব্যবহারের জন্য ঐ ধার শোধ দিবার সময় ধারদাতাকে কিছু অতিরিক্ত টাকা দেয়। এই অতিরিক্ত টাকাকে সুদ বলা হয়। সুতরাং সুদ হইতেছে কর্জকৃত অর্থের ব্যবহারের জন্য মূল্য (charge for borrowed money)।

যে পরিমাণ টাকা ধার দেওয়া হয় তাহাকে **আসল বা মূল** (principal) বলা হয়।

সুদ সাধারণতঃ আসলের কিছু পরিমাণ অংশ হিসাবে লওয়া হয়। সুদের হার হইতেছে একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা ব্যবহারের জন্য দেয় সুদ। সাধারণতঃ এই হার 100 টাকাকে এক বৎসর ব্যবহারের জন্য যে সুদ হয় তাহার দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ইহাকে বার্ষিক শতকরা হার (rate percent per annum) বলে।

যখন কেবলমাত্র আসলই সুদ উৎপন্ন করে, সেই সুদকে সরল সুদ বলে।

যখন নির্দিষ্ট সময় অন্তর (যথা 1 বৎসর বা 6 মাস বা 3 মাস অন্তর) প্রাপ্য সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত করা হয় এবং ঐ সমষ্টির উপর আবার পরবর্তী সময়ের জন্য সুদ কষা হয় তখন সেই সুদকে **চক্রবৃদ্ধি সুদ** (compound interest) বলে। যে নির্দিষ্ট সময় অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় তাহাকে সুদপর্ব (interest period) বলে।

সুতরাং সরল সুদে আসল সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু চক্রবৃদ্ধিতে আসল ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়।

আসলের সহিত নির্দিষ্ট সময়ের সুদ যোগ করিলে যাহা হয় তাহাকে ঐ নির্দিষ্ট সময় অন্তের **সবৃদ্ধিমূল** বা সুদ-আসল (amount) বলে। অর্থাৎ সবৃদ্ধিমূল হইতেছে আসল এবং সুদের যোগফল। নির্দিষ্ট সময় অন্তে দেয় কিছু পরিমাণ টাকার **বর্তমান মূল্য** (present value or present worth) হইতেছে সেই পরিমাণ টাকা যাহার সবৃদ্ধিমূল ঐ নির্দিষ্ট সময় অন্তে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার সমান হইবে।

§ 12·2 সরল সুদ এর সূত্র :

আসল = P

সুদের শতকরা বার্ষিক হার $= r$

বৎসর সংখ্যা $= n$

n বৎসরের পরে সবৃদ্ধিমূল = M

এবং n বৎসর পরে সুদ = I, হইলে,

$$I=\frac{Pnr}{100} \text{ এবং } M=P\left(1+\frac{nr}{100}\right) \text{ হইবে।}$$

প্রমাণ :—

100 টাকার এক বৎসরের সুদ $= r$ টাকা

$\therefore$ 1 টাকার এক বৎসরের সুদ $=\frac{r}{100}$ টাকা

$\therefore$ P টাকার এক বৎসরের সুদ $=\frac{Pr}{100}$ টাকা

$\therefore$ P টাকার n বৎসরের সুদ $=\frac{nPr}{100}$ টাকা

এখন দেওয়া আছে P টাকার n বৎসরের সুদ = I

$$\therefore \quad I=\frac{Pnr}{100}$$

আবার, $M=\text{আসল}+\text{সুদ}=P+I=P+\frac{Pnr}{100}=P\left(1+\frac{nr}{100}\right)$

দ্রষ্টব্য : (1) এক টাকার এক বৎসরের সুদ যদি i টাকা হয়, তবে $i=\frac{r}{100}$ হইবে যেখানে r হইতেছে সুদের শতকরা হার। $i=\frac{r}{100}$ বসাইলে উপরোক্ত সূত্রদ্বয় হইবে, $I=Pni$ এবং $M=P(1+ni)$। অতএব সুদের হার এক টাকার এক বৎসরের সুদ হিসাবে লইলে সুদ এবং সবৃদ্ধিমূলের সূত্রদ্বয়-এর আকার সংক্ষিপ্ত হয়। সেইহেতু শতকরা সুদের হার না লইয়া আমরা এক টাকার এক বৎসরের সুদকে সুদের হার হিসাবে লইব।

(2) উপরোক্ত সূত্রদ্বয়ে Pএর একক টাকা না হইয়া যে কোন একক হইলেও চলিবে।

উদা. 1. সুদের শতকরা বার্ষিক হার কত হইলে 956 টাকার সুদ $2\frac{1}{2}$ বৎসরে 119 টাকা 50 পয়সা হইবে ? [C. U. '42]

এখানে $P=956,\ n=2\frac{1}{2}=2{\cdot}5,\ I=119{\cdot}50$

r বাহির করিতে হইবে।

$I=\frac{Pnr}{100}$ সূত্রে মানগুলি বসাইয়া পাই

$$119{\cdot}50=2{\cdot}5\times956\times\frac{r}{100}$$

$$\therefore\quad r=\frac{119{\cdot}50\times100}{2{\cdot}5\times956}=\frac{100}{2{\cdot}5\times8}=5.$$

$\therefore$ সুদের হার = বার্ষিক 5%.

উদা. 2. কোন ব্যবসায়ী তাহার বিক্রেয় বস্তুর উপর দুইটি বিক্রয়মূল্য লিখিয়া রাখিয়াছে, একটি নগদ বিক্রয়মূল্য এবং অন্যটি ছয়মাস বাদে পরিশোধ্য ধারের মূল্য। ধারে 5% হারে সরল সুদ ধার্য করিলে উক্ত মূল্যদ্বয়ের অনুপাত কত ? [C. U.]

মনে কর নগদ মূল্য = 100 টাকা

5% বার্ষিক হারে 100 টাকার 6 মাসের সুদ

$=100\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}=2{\cdot}50$ টাকা

$\therefore$ ধারের মূল্য $=100+2{\cdot}5=102{\cdot}50$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=\frac{100}{102{\cdot}5}=40:41$

§ 12·3. চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্র :

(I) যদি আসল = P টাকা, এক টাকার এক বৎসরের সুদ = i,

বৎসর সংখ্যা = n, এবং n বৎসর পরে সবৃদ্ধিমূল = M হয়, এবং যদি এক বৎসর অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় (অর্থাৎ যদি সুদপর্ব = 1 বৎসর হয়) তবে, $M=P(1+i)^n$ হইবে।

প্রমাণ :

এক বৎসরে এক টাকার সুদ = i

$\therefore$ এক বৎসরে P টাকার সুদ = Pi

$\therefore$ প্রথমবর্ষ অন্তে সুদ-আসল $=P+Pi=P(1+i)$ = দ্বিতীয় বর্ষের আসল

$\therefore$ দ্বিতীয়বর্ষ অন্তে সুদ = দ্বিতীয় বর্ষের আসল $\times i=P(1+i)i$

$\therefore$ দ্বিতীয়বর্ষ অন্তে সুদ আসল $=P(1+i)+P(1+i)i$

$=P(1+i)^2$ = তৃতীয় বর্ষের আসল

লক্ষ্য কর, কোন বর্ষের সুদ-আসল ঐ বর্ষের আসলকে $(1+i)$ দ্বারা গুণ করিলে পাওয়া যাইতেছে।

$\therefore$ তৃতীয় বর্ষ অন্তে সুদ-আসল $=P(1+i)^3$

এই রূপে অগ্রসর হইয়া আমরা পাই

n বর্ষ অন্তে সুদ-আসল $= P(1+i)^n$

এখন দেওয়া আছে n-বর্ষ অন্তে সুদ-আসল, অর্থাৎ n বৎসর পরে P টাকার সবৃদ্ধিমূল $= M$ ।

$\therefore \quad M = P(1+i)^n$

দ্রষ্টব্য : (i) যদি সুদের হার বার্ষিক $r\%$ হয়, তবে $i = \frac{r}{100}$ এবং উপরোক্ত সূত্রটি হইবে, $M = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.

(ii) Pএর একক, টাকা না হইয়া অন্য যে কোন একক হইলেও সূত্রটি সত্য।

(iii) P টাকার n বৎসরের সমূল-চক্রবৃদ্ধি হইল M টাকা।

$\therefore$ n বৎসর পরে দেয় M টাকার বর্তমান মূল্য $= P$ টাকা

আবার $P = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$.

$\therefore$ n বৎসর বাদে দেয় M টাকার বর্তমান মূল্য $= M(1+i)^{-n}$, যেখানে i হইতেছে সুদের হার। $M - P$কে বাট্টা বা বাটা বলা হয়।

(II) যদি $P =$ আসল, $i =$ এক টাকার এক বৎসরের সুদ, $n =$ বৎসর-সংখ্যা এবং $M = n$ বৎসর বাদে সবৃদ্ধি-মূল, এবং যদি $\frac{1}{k}$ বৎসর অন্তে সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় (অর্থাৎ সুদপর্ব $= \frac{1}{k}$ বৎসর হয়)

তবে, $M = P\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}$ ।

প্রমাণ,

1 টাকার এক বৎসরের সুদ $= i$ টাকা

$\therefore$ 1 টাকার $\frac{1}{k}$ বৎসরে সুদ $= \frac{i}{k}$ টাকা

$\therefore$ P টাকার $\frac{1}{k}$ বৎসরে সুদ $= P\,\frac{i}{k}$

$\therefore$ $\frac{1}{k}$ বৎসর অন্তে অর্থাৎ প্রথম সুদপর্ব অন্তে সুদ-আসল $= P + P\frac{i}{k}$

$$= P\left(1+\frac{i}{k}\right)$$

অনুরূপে $\frac{2}{k}$ বৎসর অন্তে অর্থাৎ দ্বিতীয় সুদপর্ব অন্তে সুদ-আসল $= P\left(1+\frac{i}{k}\right)^2$

এইরূপে $\frac{k}{k} = 1$ বৎসর অন্তে সুদ-আসল $= P\left(1+\frac{i}{k}\right)^k$

∴ n বৎসর অন্তে সুদ-আসল $=P\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}$

আবার দেওয়া আছে n বৎসর অন্তে সুদ-আসল $=M$.

$$\therefore\quad M=P\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}$$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) যদি সুদপর্ব $=\frac{1}{2}$ বৎসর হয়, তবে সূত্রটিতে kএর মান হইবে 2 এবং সূত্রটি হইবে $M=P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$

অনুরূপে সুদপর্ব 3 মাস ($=\frac{1}{4}$ বৎসর) বা একমাস ($=\frac{1}{12}$ বৎসর) হইলে Mএর মান হইবে যথাক্রমে

$$M=P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} \text{ এবং } M=P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$$

(ii) kএর মান যদি অসীম করা হয় (অর্থাৎ $k\to\infty$ হইলে), তবে সুদ পর্বের মান শূন্যের দিকে অগ্রসর হইবে। সুতরাং এইক্ষেত্রে সুদ প্রতি মুহূর্তে আসলের সঙ্গে যুক্ত হইবে। এখন কলন শাস্ত্রের নিয়ম অনুযায়ী

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e \text{ হয়।}$$

$$\therefore\quad \text{এখানে } \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{nk}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k/i}\right)^{\frac{k}{i}\cdot ni}=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k/i}\right)^{\frac{k}{i}}\right\}^{ni}=e^{ni}$$

সুতরাং সুদ প্রতিমুহূর্তে আসলের সঙ্গে যুক্ত হইলে n বৎসর বাদে সুদ-আসল হইবে

$$M=\lim_{k\to\infty}P\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}=Pe^{ni}$$

উদা. 1. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদে কত টাকা 5 বৎসরে সুদে-আসলে 4000 টাকা হইবে।

এখানে $M=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$ সূত্রে

$M=4000$, $n=5$, $r=8$, P বাহির করিতে হইবে।

$\therefore\quad 4000=P(1+\cdot08)^5=P\times(1\cdot08)^5$

$\therefore\quad \log 4000=\log P+5\times\log 1\cdot08$

বা, $\log P=3\cdot6020-5\times\cdot0334=3\cdot6020-\cdot1670=3\cdot4350$

$\therefore\quad P=\text{antilog } 3\cdot4350=2723$

∴ নির্ণেয় টাকা $=2723$ (প্রায়)।

[দ্রষ্টব্য : চক্রবৃদ্ধি সুদের অঙ্ক লগ টেবিলের সাহায্যে করা হয়। চার অঙ্কের লগটেবিল ব্যবহার করার জন্য উত্তর চারি সংখ্যা পর্যন্ত সঠিক হয়।]

উদা. 2. এক ব্যক্তি বার্ষিক 3% হারে সরল সুদে কিছু টাকা ধার করিয়া বৎসরান্তে দেয় 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সেই টাকা অন্যকে ধার দিল। ইহাতে যদি তিন বৎসরান্তে তাহার 541 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে সে কত টাকা ধার করিয়াছিল? [C. U. '50]

মনে কর লোকটি P টাকা ধার করিয়াছিল।

এখন 3% হারে P টাকার 3 বৎসরের সরল সুদ $= P\times\frac{3\times3}{100}=\frac{9P}{100}$.

5% হারে P টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি হারে বর্ধিত সুদ

$$=P\left(1+\frac{5}{100}\right)^3-P=P\{(1\cdot05)^3-1\}$$

$$=P\{1\cdot157625-1\}=\cdot157625P$$

$\therefore$ লাভ $=\cdot157625P-\frac{9}{100}P=\cdot067625P=541$ টাকা

(দেওয়া আছে)

$\therefore\ P=\frac{541}{\cdot067625}=8000$ (প্রায়)

$\therefore$ লোকটি 8000 টাকা ধার করিয়াছিল।

§ 12·4. চক্রবৃদ্ধির সূত্র প্রয়োগের দ্বারা অবচয় ইত্যাদি বিভিন্ন সমস্যার সমাধান :

সমহারে বৃদ্ধি বা ক্ষয় প্রাপ্ত হয়, এইরূপ যে কোন ক্ষেত্রেই চক্রবৃদ্ধির সূত্রটি ব্যবহার করা যায়। যদি P প্রাথমিক মান হয় এবং ঐ মান যদি বার্ষিক $r\%$ হারে বৃদ্ধি পায় তবে n বৎসর অন্তে উক্ত বস্তুর মান হইবে $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$।

যদি ঐ মান বার্ষিক $r\%$ হারে কমিয়া যায়, তবে n বৎসর অন্তে উক্ত বস্তুর মান হইবে $P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$.

নিম্নে বিবিধ রকমের উদাহরণের সমাধান দেওয়া হইল।

উদাহরণমালা 12A

উদা. 1. যদি কোন শহরের জনসংখ্যা প্রতি বৎসর ঐ বৎসরের শুরুতে যে জনসংখ্যা ছিল তাহার 2% বৃদ্ধি পায়, তবে কত সময়ে জনসংখ্যা মোট 40% বৃদ্ধি পাইবে? [C. U. 1958]

মনে কর শহরের জনসংখ্যা $=P$ জন ছিল। n বৎসর পরে ইহা 40% বৃদ্ধি পাইয়া $(1+\frac{40}{100})P$ হইল। এখন বৃদ্ধির হার $=2\%=\frac{2}{100}=\cdot02$।

$\therefore$ $M=P(1+i)^n$ সূত্রে $M=(1+\frac{40}{100})P$ এবং $i=\cdot02$ বসাইয়া পাই, $1\cdot4\ P=(1\cdot02)^n.P$

বা, $n=\dfrac{\log 1\cdot4}{\log 1\cdot02}=\dfrac{\cdot1461}{\cdot0086}=16\cdot99$ অর্থাৎ প্রায় 17 বৎসর।

উদা. 2. একটি মেসিনের আয়ুষ্কাল 10 বৎসর এবং ক্রয়মূল্য 10,000 টাকা ধরা হইল। যদি অবচয়ের জন্য প্রতি বৎসর অবশিষ্ট মূল্যের 10% বাদ দেওয়া হয়, তবে আয়ুষ্কাল অন্তে বাতিল মেশিনটির মূল্য কত?

এখানে প্রতি বৎসর অবচয়ের জন্য ঐ বৎসরে মেসিনটির মূল্যের 10% বাদ যাইতেছে। সুতরাং মেসিনটির মূল্য 10% হারে কমিয়া যাইতেছে। অতএব $M=P(1-i)^n$ সূত্রটি ব্যবহার করিতে হইবে। এখানে $P=$ মেসিনটির ক্রয়মূল্য বা প্রাথমিক মূল্য $=10,000$ টাকা, $i=\frac{10}{100}=\cdot1$ এবং $n=10$

$\therefore$ $M=10,000(1-\cdot1)^{10}=10,000\times(\cdot9)^{10}$

$\therefore$ $\log M=4+10\times\log\cdot9=4+10\times(-1+\cdot9542)=3\cdot542$

$\therefore$ $M=\text{antilog } 3\cdot542=3483$ টাকা (প্রায়)

$\therefore$ বাতিল মূল্য $==3483$ টা. (প্রায়)।

উদা. 3. সি. পি. মুখার্জি 20,000 টাকা তাঁর পুত্র অসিত এবং কন্যা আরতির মধ্যে ভাগ করিয়া দিবার জন্য রাখিয়া গেলেন। আরতির অংশ 5 বৎসর বাদে সুদে-আসলে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থে পরিণত হইল এবং অসিতের অংশ 7 বৎসর বাদে সুদে-আসলে সমপরিমাণ অর্থে পরিণত হইল। চক্রবৃদ্ধি সুদের বার্ষিক হার 4% হইলে প্রত্যেকের অংশে নির্ণয় কর। [C.U.]

মনে কর অসিতের অংশ $=x$ টাকা

$\therefore$ আরতির অংশ $=20,000-x$ টাকা

আরতির অংশের বার্ষিক 4% হারে 5 বৎসরের সুদ-আসল

$=(20000-x)(1+\cdot04)^5$

এবং অসিতের অংশের ঐ হারে 7 বৎসরে সুদ-আসল $=x(1+\cdot04)^7$

উভয় অংশ সমান বলিয়া $(20,000-x)(1\cdot04)^5=x(1\cdot04)^7$

বা $(20,000-x)=x(1\cdot04)^2=1\cdot0816x$

বা $x=\dfrac{20000}{2\cdot0916}=9605$ টাকা (প্রায়)।

সুতরাং আরতির অংশ $20000-x$

$=10395$ টাকা।

উদা. 4. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হারে কোন টাকার 2 বৎসরে 1102 টাকা 50 পয়সা এবং 3 বৎসরে 1157 টাকা 62·5 পয়সা সমূল-চক্রবৃদ্ধি হইলে আসল এবং সুদের হার কত ?

মনে কর আসল = P এবং সুদের হার = $r\%$

$$\therefore \quad 1102{\cdot}50 = P\left[1+\frac{r}{100}\right]^2 \text{ এবং } 1157{\cdot}625 = P\left[1+\frac{r}{100}\right]^3$$

ভাগ করিয়া পাই, $\dfrac{1157{\cdot}625}{1102{\cdot}50} = 1 + \dfrac{r}{100}$

$$r = 100\times\left[\frac{1157{\cdot}625}{1102{\cdot}50} - 1\right] = 100\times\frac{55{\cdot}125}{1102{\cdot}50} = 100\times\tfrac{1}{20} = 5\cdot$$

r-এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$1102{\cdot}50 = P(1+{\cdot}05)^2,$$

$$\therefore \quad P = \frac{1102{\cdot}50}{(1{\cdot}05)^2} = \frac{1102{\cdot}50}{1{\cdot}1025} = 1000 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ আসল = 1000 টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার = 5%.

উদা. 5. অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় বার্ষিক 10% হার সুদে 5000 টাকা 20 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

এখানে সুদপর্ব = $\frac{1}{2}$ বৎসর।

$$\therefore \text{ সবৃদ্ধিমূল হইতেছে } M = P\left[1+\frac{r}{200}\right]^{2n}$$

এখানে $r = 10$, $P = 5000$, $n = 20$।

$$M = 5000\left[1+\frac{10}{200}\right]^{2\cdot 20} = 5000\times(1{\cdot}05)^{40}$$

$$\therefore \quad \log M = \log 5000 + 40 \log 1{\cdot}05 = 3{\cdot}6990 + 40\times{\cdot}0212$$
$$= 4{\cdot}5470$$

$\therefore$ $M = \text{antilog } 4{\cdot}5470 = 35240$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় সমূল-চক্রবৃদ্ধি = 35240 টাকা

উদা. 6. 5 বৎসর মেয়াদের স্থায়ী আমানতের জন্য পোষ্ট অফিস 14% হারে সরল সুদ দেয়। এই সুদ অর্ধবৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধির সমান হইলে সুদের বার্ষিক হার কত ?

100 টাকার 14% হারে 5 বৎসরের সরল সুদ = $100\times\frac{5}{100}\times 14$

= 70 টাকা।

মনে কর এই সুদ অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় $r\%$ হারে চক্রবৃদ্ধির সমান। এখন 100 টাকার অর্ধবৎসরান্তে দেয় $r\%$ হারে 5 বৎসরের

$$\text{চক্রবৃদ্ধি সুদ} = 100\left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} - 100$$

$$\therefore \text{ শর্তানুযায়ী } 100\left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} - 100 = 70$$

$$\text{বা, } \left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} = \frac{170}{100} = \frac{17}{10}.$$

$$\therefore \log\left(1+\frac{r}{200}\right) = \tfrac{1}{10}(\log 17 - \log 10) = \cdot 0230$$

$$\therefore 1+\frac{r}{200} = \text{অ্যান্টিলগ } \cdot 0230 = 1\cdot 054$$

$$\therefore r = 200 \times \cdot 054 = 10\cdot 8\%$$

উদা. 7. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হইবে ? [C.U. '48]

মনে কর আসল $= P$, সুতরাং সুদ-আসল $M = 2P$ এবং $i = \frac{5}{100} = \cdot 05$

$\therefore$ $M = P(1+i)^n$ সূত্র হইতে পাই, $2P = P(1\cdot 05)^n$

বা, $2 = (1\cdot 05^n)$, বা, $n = \dfrac{\log 2}{\log 1\cdot 05} = \dfrac{\cdot 3010}{\cdot 0212} = 14\cdot 2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 8. অর্ধবৎসরান্তে দেয় 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ, বৎসরান্তে দেয় কত % হারের সুদের সমান ? [C. U. '41]

মনে কর আসল $= 100$. 5% হারে অর্ধবৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ

$$= 100\left(1+\frac{5}{200}\right)^{1.2} - 100 = 100(1\cdot 025)^2 - 100$$

$$= 100 \times 1\cdot 050625 - 100 = 5\cdot 0625$$

$\therefore$ বৎসরান্তে দেয় সুদের শতকরা হার $= 5\cdot 0625$.

$\therefore$ [5%-কে নামিক হার (nominal rate) এবং 5·065%-কে প্রকৃত হার (effective rate) বলে]।

প্রশ্নমালা 12

1. সমূল-চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর (সুদ বৎসরান্তে দেয়) : [G. U. '49 ; C.U. '40] [B.U.]

(i) 5% হার সুদে 3 বৎসরে 10000 টাকার
(ii) 4% „ „ 2 „ 625 „
(iii) $4\frac{1}{2}\%$ „ „ 5 „ 5000 „
(iv) 9% „ „ $2\frac{1}{2}$ „ 4000 „

উদা. 4. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হারে কোন টাকার 2 বৎসরে 1102 টাকা 50 পয়সা এবং 3 বৎসরে 1157 টাকা 62·5 পয়সা সমূল-চক্রবৃদ্ধি হইলে আসল এবং সুদের হার কত ?

মনে কর আসল = P এবং সুদের হার = $r\%$

$\therefore \quad 1102{\cdot}50 = P\left[1+\frac{r}{100}\right]^2$ এবং $1157{\cdot}625 = P\left[1+\frac{r}{100}\right]^3$

ভাগ করিয়া পাই, $\frac{1157{\cdot}625}{1102{\cdot}50} = 1+\frac{r}{100}$

$$r = 100 \times \left[\frac{1157{\cdot}625}{1102{\cdot}50} - 1\right] = 100 \times \frac{55{\cdot}125}{1102{\cdot}50} = 100 \times \tfrac{1}{20} = 5\cdot$$

r-এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$1102{\cdot}50 = P(1+{\cdot}05)^2,$$

$$\therefore \quad P = \frac{1102{\cdot}50}{(1{\cdot}05)^2} = \frac{1102{\cdot}50}{1{\cdot}1025} = 1000 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ আসল = 1000 টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার = 5%.

উদা. 5. অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় বার্ষিক 10% হার সুদে 5000 টাকা 20 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

এখানে সুদপর্ব = $\frac{1}{2}$ বৎসর।

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল হইতেছে $M = P\left[1+\frac{r}{200}\right]^{2n}$

এখানে $r = 10, \quad P = 5000, \quad n = 20$ ।

$$M = 5000\left[1+\frac{10}{200}\right]^{2\cdot 20} = 5000 \times (1{\cdot}05)^{40}$$

$$\therefore \quad \log M = \log 5000 + 40 \log 1{\cdot}05 = 3{\cdot}6990 + 40 \times {\cdot}0212$$
$$= 4{\cdot}5470$$

$\therefore \quad M = \text{antilog } 4{\cdot}5470 = 35240$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় সমূল-চক্রবৃদ্ধি = 35240 টাকা

উদা. 6. 5 বৎসর মেয়াদের স্থায়ী আমানতের জন্য পোষ্ট অফিস 14% হারে সরল সুদ দেয়। এই সুদ অর্ধবৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধির সমান হইলে সুদের বার্ষিক হার কত ?

100 টাকার 14% হারে 5 বৎসরের সরল সুদ $= 100 \times \frac{5}{100} \times 14$

$= 70$ টাকা।

মনে কর এই সুদ অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় $r\%$ হারে চক্রবৃদ্ধির সমান। এখন 100 টাকার অর্ধবৎসরান্তে দেয় $r\%$ হারে 5 বৎসরের

$$\text{চক্রবৃদ্ধি সুদ} = 100\left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} - 100$$

$$\therefore \text{ শর্তানুযায়ী } \quad 100\left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} - 100 = 70$$

$$\text{বা, } \quad \left(1+\frac{r}{200}\right)^{10} = \frac{170}{100} = \frac{17}{10}.$$

$$\therefore \quad \log\left(1+\frac{r}{200}\right) = \tfrac{1}{10}(\log 17 - \log 10) = \cdot 0230$$

$$\therefore \quad 1+\frac{r}{200} = \text{য্যান্টিলগ } \cdot 0230 = 1\cdot 054$$

$$\therefore \quad r = 200 \times \cdot 054 = 10\cdot 8\%$$

উদা. 7. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হইবে ? [C.U. '48]

মনে কর আসল $= P$, সুতরাং সুদ-আসল $M = 2P$ এবং $i = \frac{5}{100} = \cdot 05$

$\therefore \quad M = P(1+i)^n$ সূত্র হইতে পাই, $2P = P(1\cdot 05)^n$

বা, $2 = (1\cdot 05^n)$, বা, $n = \dfrac{\log 2}{\log 1\cdot 05} = \dfrac{\cdot 3010}{\cdot 0212} = 14\cdot 2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 8. অর্ধবৎসরান্তে দেয় 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ, বৎসরান্তে দেয় কত % হারের সুদের সমান ? [C. U. '41]

মনে কর আসল $= 100$. 5% হারে অর্ধবৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ

$$= 100\left(1+\frac{5}{200}\right)^{1.2} - 100 = 100(1\cdot 025)^2 - 100$$

$$= 100 \times 1\cdot 050625 - 100 = 5\cdot 0625$$

$\therefore$ বৎসরান্তে দেয় সুদের শতকরা হার $= 5\cdot 0625$.

$\therefore$ [5%-কে নামিক হার (nominal rate) এবং 5·065%-কে প্রকৃত হার (effective rate) বলে]।

প্রশ্নমালা 12

1. সমূল-চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর (সুদ বৎসরান্তে দেয়) : [G. U. '49 ; C.U. '40] [B.U.]

(i)	5% হার সুদে	3 বৎসরে	10000 টাকার	
(ii)	4% "	" 2 "	625	"
(iii)	$4\frac{1}{2}\%$ "	" 5 "	5000	"
(iv)	9% "	" $2\frac{1}{2}$ "	4000	"

2. 5% হার সুদে 3 বৎসরে 2000 টাকার চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত? [C. U. '46]

3. 5% হারে কত টাকার 2 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি 3528 টাকা হইবে?

4. A বৎসরান্তে দেয় 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 5000 টাকা ধার দিল এবং B ঐ পরিমাণ টাকা $5\frac{1}{4}$% হার সরল সুদে ধার দিল। তিন বৎসর অন্তে কে অধিক লাভবান হইবে? [G.U. '53]

5. অর্ধবৎসরান্তে দেয় 4% হার সুদে 500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বৎসরে সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হইবে?

6. 4 মাস অন্তে দেয় 12% হার সুদে 400 টাকার 1 বৎসর 4 মাসের সমূল-চক্রবৃদ্ধি কত?

7. 3 মাস অন্তে দেয় 8% হার সুদে 450 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

8. 5% হার সুদে 3 বৎসরে 400 টাকার সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর কত হইবে? [P. U. '20]

9. 6% হার সুদে কত টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর 13 টা. 50 প. হইবে? [C. U.'41]

10. প্রমাণ কর যে, 4% হার সুদে 2 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি আসলের 1·0816 গুণ হয়।

11. 10000 টাকার 3 বৎসরের সরল সুদ 1500 টাকা হইলে, 3 বৎসরে উহার চক্রবৃদ্ধি কত হইবে?

12. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা ধার দিলে দ্বিতীয় বৎসরের সুদ প্রথম বৎসরের সুদ অপেক্ষা 1 টাকা বেশী হইবে?

13. কোন টাকার 2 বৎসরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি যথাক্রমে 40 এবং 41 টাকা হইলে, ঐ টাকা এবং সুদের হার নির্ণয় কর।

14. চক্রবৃদ্ধি হারে নিয়োজিত কোন মূলধন দ্বিতীয় বৎসরান্তে 4410 টাকা এবং তৃতীয় বৎসরান্তে 4630 টাকা 60 প. হইলে, সুদের হার এবং প্রাথমিক মূলধন নির্ণয় কর।

15. কোন টাকার 1 বৎসরের সরল সুদ 50 টাকা এবং 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি 102 টাকা হইলে, ঐ টাকা ও সুদের হার কত?

16. 1 পয়সা কত বৎসরে সুদে-আসলে 1000 টাকা হইবে যদি (i) সুদের হার বৎসরান্তে দেয় 10% হয় (ii) সুদের হার 10% হয় এবং সুদ আসলের সহিত প্রতি মুহূর্তে যুক্ত হয়। (দেওয়া আছে $\log_e = \cdot 43429$).

17. কোন দেশের লোকসংখ্যা 24000 এবং উহা বৎসরে ঐ বৎসরের লোকসংখ্যার 5% বৃদ্ধি পায়। তিন বৎসর অন্তে সেখানে লোকসংখ্যা কত হইবে? [C. U. '50]

18. কোন দেশের জনসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 15% হারে বৃদ্ধি পায়। বর্তমান জনসংখ্যা এক লক্ষ হইলে, 20 বৎসর পরে ঐ জনসংখ্যা কত হইবে?

19. পৃথিবীর জনসংখ্যা প্রতি বৎসর, ঐ বৎসরের গোড়াতে যে জনসংখ্যা ছিল তাহার 1·8% বৃদ্ধি পায়। কত বৎসরে জনসংখ্যা প্রাথমিক জনসংখ্যার (i) 25% বৃদ্ধি পাইবে, (ii) দ্বিগুণ হইবে?

20. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 9% হার সুদে কত সময়ে সুদআসল, আসলের দ্বিগুণ হইবে?

21. একটি যন্ত্রের প্রাথমিক মূল্য 24537 টাকা। প্রতি বর্ষশেষে এই মূল্য বর্ষারম্ভের মূল্য হইতে 18% কমাইয়া ধরা হয়। কত সময় পরে মূল্য (a) 20000 টা., (b) প্রাথমিক মূল্যের $\frac{1}{10}$ অংশ হইবে? [C. U. 1942]

22. একটি মেসিনের বার্ষিক অবচয় হয় উহার বর্ষারম্ভ মূল্যের 10%। প্রাথমিক মূল্য ছিল 10000 টাকা এবং আয়ুষ্কাল অন্তে বাতিল মূল্য 3750 টাকা। মেসিনটির আয়ুষ্কাল নির্ণয় কর। [C.U. '66]

23. এস. রায় নামক কোন ব্যক্তি কোন মহাজনের নিকট 6000 টাকা ঋণ করিলেন, কিন্তু 4 বৎসরের মধ্যে কোন টাকা পরিশোধ করিতে পারিলেন না। এখন মহাজন তাহার নিকট 7500 টাকা দাবী করিলেন। মহাজন ঋণ দানের জন্য চক্রবৃদ্ধি হার সুদে বার্ষিক শতকরা কত সুদ ধার্য করিয়াছিলেন? [C. U. '57]

24. কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা বার্ষিক একটি নির্দিষ্ট চক্রবৃদ্ধি হারে p, q, r বৎসরান্তে সুদে-আসলে যথাক্রমে x, y, z টাকা হয়। দেখাও যে, $x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1$.

25. কোন ব্যক্তি 18000 টাকা রাখিয়া নির্দেশ দিয়া গেলেন যে ঐ টাকা তাঁর 9, 12 এবং 15 বৎসর বয়স্ক তিন পুত্রের মধ্যে এমনভাবে ভাগ করিতে হইবে যে প্রত্যেকের 25 বৎসর বয়স হইলে সমপরিমাণ টাকা পাইবে। যদি সুদের হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}$% হয়, তবে 25 বৎসর বয়সে প্রত্যেক পুত্র কত টাকা পাইবে? [C. U. '38]

26. বায়ু নিষ্কাশন পাম্পের সাহায্যে একটি পাত্রের অধিকৃত বায়ুর ঘনত্ব প্রতি ঘাতে $\frac{1}{10}$ অংশ কমিয়া যায়। 20টি ঘাতের পর পাত্রস্থিত বায়ুর ঘনত্ব কত অংশ কমিবে?

27. কোন ব্যক্তি P টাকা, টাকা প্রতি বাৎসরিক r টাকা হার সুদে ধার করিল। যদি প্রতি বৎসর সে, সেই বৎসরের সুদ এবং ঐ সুদের সম পরিমাণ আসল শোধ করিয়া দেয়, তবে দেখাও যে n বৎসর বাদে তাহার ধার থাকিবে $P(1-r)^n$ টাকা।

বীজগণিত

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. $\frac{2}{5}, 2\frac{1}{2}, b=\frac{2}{5}a^3$. 2. $25, \pm 15, y=\frac{900}{x^2}$ 3. 2

5. $R=k+k'v^2$ 6. (i) $\sqrt[3]{a}$ (ii) t^2

8. $x=\frac{3}{10}\frac{y}{z}$; 9 10. $b=2a+\frac{3}{a}$; 7

11. 10 বা 8 12. 16 : 49 13. $38\frac{1}{2}$ বর্গফুট

14. $\frac{ab}{c}$ 15. $\frac{37}{5}$ দিন 16. $20\frac{1}{4}$ ফুট

17. $x \propto \frac{b^4}{a}$ 19. 256 ফুট 20. ঘণ্টায় 20 মাইল,

21. $d=4$ 22. 64 : 45 24. 325 টাকা

25. 80 ফুট 26. (i) P=22, (ii) W=68 27. 112

28. 35 : 32 29. 45 বর্গফুট 30. 7 ফুট

31. $9(\sqrt{3}-1)$ ডেসি মি. 32. 49 33. 120 টাকা।

34. (i) 384 টাকা (ii) 36000 টাকা।

প্রশ্নমালা 2 A

1. 34 2. 1 3. 3 4. $a, a+d, a+2d, \cdots$

5. $5, 2, -1, -4, \ldots$ 6. -26 7. 35

8. $-30, 10-2n$ 9. $3\frac{1}{4}$ 10. (i) $a-\frac{1}{n}+1$, (ii) $\frac{n^2-n+1}{n}$

11. 9th 12. 6th, 11th 13. না 14. 16th

15. 38 16. -49 17. 9, 0 18. 2, 5, 8...

19. $\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}, \frac{c-d}{p-q}$ 20. 0 21. $\frac{r(a-b)-(aq-bp)}{p-q}$.

প্রশ্নমালা 2 B

1. 15 2. 4 3. -9 4. x^2+a^2 5. $2\frac{7}{8}$

6. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ 7. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36

8. 68, 132, 196, 260 9. 6 10. 7.

প্রশ্নমালা 2 C

1. 100 2. $\frac{n}{2}(3n+7)$ 3. -96 4. 290 5. $61\frac{3}{4}$

6. $\frac{n+1}{2}$ 7. 378 8. $(n-1)(2n-3)$ 9. $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

10. $19(\sqrt{2}+18)$ 11. 3927 12. -144 13. 900
14. 19096 15. 4080 16. $n(2n+1)$ 17. 247
18. $\frac{1}{2}n(n+1)$ 19. 6867 20. 7500 21. 2940
22. 861 23. -368 24. 1763 25. 11
26. 19 27. 551 28. 1, 2.
29. 5, 9, 13,⋯ 30. 3, 10 ; অথবা, -1, 12 31. $(2r-1)^2$
32. 2747 34. 792988
35. 5, 12, 19 ; বা, 19, 12, 5 36. 1, 4, 7, 10 ; বা 10, 7, 4, 1

37. $\frac{n}{2}(a+c)$ 39. n^2 40. $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

41. $\frac{n}{2}(4n^2+17n+21)$ 42. $\frac{n}{2}(6n^2+21n+23)$

43. $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$ 44. $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$

45. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 46. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

47. $\frac{1}{4}n(n+5)(n^2+5n+10)$ 48. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

49. $\frac{n}{4(n+1)}$ 50. $\frac{n}{3(n+3)}$ 51. (a) $\frac{1}{3}(4n^3+18n^2-n)$;

(b). $\frac{-r(r+1)}{2}$ (যদি r যুগ্ম হয়), $\frac{r(r+1)}{2}$ (যদি r অযুগ্ম হয়) ;

(c). $(n+1)(2n+1)$; (d). $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; (e) $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

55. $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$; অথবা $8\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$ 58. 25
59. 9, 16 60. 50500 গজ 61. 9 দিন
62. 36 বৎসর পরে, $18\frac{1}{2}$ গজ 63. 10 মাস 64. 15 ঘণ্টা ।

প্রশ্নমালা 2 D

1. 128 2. 6561 3. $\frac{1024}{3125}$ 4. $\frac{1}{3^{n-1}}$ 5. $\frac{1}{2^{n-5}}$

6. $3(-3)^{p-1}$ 7. $\frac{1}{81}$ 8. $\frac{1}{32}$ 9. 1, 2, 4, 8,⋯
10. $\frac{1}{256}$ 11. $\frac{5}{6561}$ 12. 3, 2 13. 9ম পদ
14. 7ম পদ 15. 512, 2^{n-1} 16. $\left(\frac{a^{n-q}}{b^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

প্রশ্নমালা 2 E

1. ± 25 2. $\pm\frac{1}{4}$ 3. ± 9 4. ± 4 5. $\pm x^2y^2$, ± 9

6. 12, 36, 108 ; অথবা $-12, 36, -108$

7. 15, 45. 8. 225, 2025, 18225 ; অথবা $-225, 2025, -18225$

9. $\frac{1}{3}, 1, 3$; অথবা $-\frac{1}{3}, 1, -3$ 10. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$; অথবা $-\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}$;

16. 32, 18 ; অথবা 18, 32.

প্রশ্নমালা 2 F

1. 255 2. $255\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}(3^n-1)$ 4. $\frac{1}{4}(1-3^{2n})$

5. $3\frac{63}{64}$ 6. $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 7. $\frac{19682}{3-\sqrt{3}}$ 8. $1\frac{511}{512}$

9. $\frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ 10. $\frac{1}{6}-\frac{2}{3.10^n}$ 11. -255 12. $1\frac{255}{256}$

13. $\frac{2}{3}\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$ 14. $-\frac{(a+b)^2}{2b(a-b)}\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^r-1\right\}$

15. $\frac{63}{2}(2+\sqrt{2})$ 16. $\frac{1}{3}(1-2^{2p})$ 17. 1524

18. $\frac{31}{16}(\sqrt{2}+1)$ 19. $7\frac{127}{128}$ 20. $2^{n+1}-2$ 21. $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

22. 1530 23. 582 24. 10টি 25. 8টি 26. 6টি

27. $21\frac{63}{64}$ 28. 4921 29. $3\frac{63}{64}$ বা $\frac{65}{64}$ 30. 1092

31. $\frac{5}{2}(2^{25}-1)$ 32. 6138 33. 25500 34. 1, 4, 16 বা, 16,4,1.

35. 2 টাকা ও 4096 টাকা ; 36. 207360.

প্রশ্নমালা 2 G

3. $\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ 4. $\frac{20}{81}(10^n-1)-\frac{2n}{9}$

5. $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ 6. $n.2^n$ 7. $2^{n+1}-n-2$

8. $\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}$ 10. $2^{n+1}-2+n(n+1)$

11. 3, 6, 12 অথবা 12, 6, 3 12. (i) $\frac{3^{n+1}-3-2n}{4.3^{n-1}}$

(ii) $(n-1)3^{n+1}+1$ (iii) $\frac{a(r^n-1)}{r-1}+\frac{b}{1-r}\left\{\frac{r(r^{n-1}-1)}{r-1}-nr^n\right\}$

13. 2, 5, 8 অথবা 26, 5, -16

18. 4, 8, 16 ; অথবা 16, 8, 4. 21. 73 23. 757.

প্রশ্নমালা 3

1. 9 2. $\frac{1}{27}$ 3. 243 4. 16 5. $\frac{1}{9}$ 6. 125

7. $\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x}$ 8. x 9. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{3}}$ 10. 1 11. $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

12. -17 13. $a^{-\frac{17}{6}}b^{-\frac{31}{12}}$ 14. $a^{-2}b$ 15. $a^{\frac{32}{15x}}$ 16. $\sqrt[3]{a}$

17. $\frac{y^5}{x^{13}}$ 17. (a) $\sqrt[48]{2}$ 18. (i) $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}-1+2x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}$

এবং $1-y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-yx^{-\frac{1}{2}}$.

18. (ii) $a+2b^{\frac{1}{2}}+3c^{\frac{1}{3}}$ 19. $x^{2n}-y^{-2n}$ 20. $a^{-3m}+b^{3n}$

21. $x^{2\cdot 3^{n-1}}+x^{3^{n-1}}y^{3^{n-1}}+y^{2\cdot 3^{n-1}}$

22. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$ অথবা, $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

23. $(x^m+y^n)(x^m-y^n)$ 24. x^a 25. $(a^4-b^4)^m$

26. a^{n^2-1} 27. x^{2abc} 28. $(x)^{a^2-a-b^2}$ 29. $\frac{1}{x^{p^2+q^2}}$

30. 1 31. 27 32. 1 32. (a) 1 33. 1

34. $\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$ 35. 1 36. $\frac{1}{128}$ 37. $\frac{2}{3}$ 38. $\frac{e^x-1}{e^x+1}$

39. 1 40. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$ 41. $\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$

41. (a) 1 42. 1 51. $p=(q)^{\frac{2}{2q-1}}$.

প্রশ্নমালা 4

1. $\sqrt[12]{3^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$ 2. (i) $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{x^4}$ (ii) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$, $\sqrt[3]{x^6}$

3. $\sqrt[3]{5}$ 4. (i) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[3]{4}$ (ii) সাজানই আছে।

(iii) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$ 5. $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[4]{x^4y}$ 6. (i) $5\sqrt{7}$

(ii) $8\sqrt{7}$ (iii) $40\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt[3]{3}$ (v) $2\sqrt[3]{3}$

9. (i) 3 (ii) $12\sqrt{5}$ (iii) 16 (iv) $6\sqrt[6]{1944}$

10. (i) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (ii) $2\sqrt[3]{2}$ (iii) $\frac{1}{4}\sqrt[4]{20}$ 11. (i) 1·06

(ii) 2·31 (iii) 6·71 (iv) 3·15 (v) 5·83

12. 3·661 13. (i) -1 (ii) $3+\sqrt{5}+\sqrt{14}+\sqrt{21}$
(iii) $24+8\sqrt{6}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$ (iv) $6\sqrt{15}-12\sqrt{2}-15+2\sqrt{30}$
(v) $2x-y$ (vi) $\sqrt{a^2+ab}-b\sqrt{a+b}-a+b^2$ (vii) $4+6\sqrt{2}$
(viii) $x\sqrt{x}+\sqrt{xy}-xy-y\sqrt{y}$ 14. (i) $5-2\sqrt{6}$
(ii) $7-4\sqrt{3}$ (iii) $14+4\sqrt{6}$ (iv) $2x-2\sqrt{x^2-y^2}$
(v) $b^2-2a\sqrt{b^2-a^2}$ (vi) $4x+2\sqrt{4x^2-25}$

15. (a) $\frac{2+\sqrt{3}}{1}$ (b) $\frac{6\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+1}{19}$ (c) $\frac{5+2\sqrt{6}}{1}$

(d) $\frac{a+x+\sqrt{ax+x^2}}{1}$

16. $\sqrt{3}$ 17. (a) 1·691 (b) 7·26 18. $2x$ 19. $4x\sqrt{x^2-1}$
20 $\sqrt{a+x}$ 21. x 22. $\frac{4}{3}$ 23. (a) 15 (b) $6\sqrt{6}$
24. (a) $\pm(4\sqrt{2}+3)$, (b) $\pm(3\sqrt{3}-1)$, (c) $\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$,
(d) $\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, (e) $\pm\sqrt[4]{7}(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}})$, (f) $\pm\left(3+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

25. (a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-2})$

(b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1})$

(c) $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})$ (d) $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$
(e) $\pm\{\sqrt{(x-y)}+\sqrt{z}\}$ 26. $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+1)$

27. (i) $\sqrt{2}$, (ii) $\frac{6(7+\sqrt{5})}{11}$ (iii) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}-5$ 30. 0.

33. (a) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$
(b) $9\sqrt{3}-9.\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}$, (c) $\sqrt[3]{2}-1$
(d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{x}+\sqrt{y})$

34. (a) $3+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$ (b) $\frac{25-18\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}}{29}$

(c) $\frac{3+\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{6}$ (d) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$

36. 5·99 37. 2 39. (i) $\sqrt{3}+1$ (ii) $1-\sqrt{2}$ (iii) $3-\sqrt{2}$
40. (i) $\pm(\sqrt{3}+1)$ (ii) $\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (iv) $\pm\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

প্রশ্নমালা 5

1. $-(18+11\sqrt{6})$ 2. $-(142-22\sqrt{35})$

3. $-(24\sqrt{2}+20\sqrt{42}-6\sqrt{6}-15\sqrt{14})$ 4. $\frac{3+\sqrt{-5}}{14}$

5. $\frac{1}{7}(6+2\sqrt{-5}+3\sqrt{-3}-\sqrt{15})$ 6. $-\frac{31}{17}i$ 7. $\frac{4xyi}{x^2+y^2}$

8. $\frac{-6abi}{a^2+4b^2}$ 9. $0+i$ 10. $\frac{13}{10}+i\frac{9}{10}$

11. $\frac{18}{13}+i.\frac{1}{13}$ 12. $\frac{7}{5}+i\frac{\sqrt{6}}{5}$ 13. $5+i5$. 14. $65+i.0$

15. $\pm(3+\sqrt{-5})$ 16. $\pm(5-3\sqrt{-2})$ 17. $\pm(5-6\sqrt{-1})$

18. $\pm(3i-4)$. 19. $\pm(3-4i)$ 20. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

21. $\pm(3+5i)$ 22. $\pm\frac{1}{2}(3+\sqrt{-11})$ (প্রশ্নে $\frac{-1+3\sqrt{-11}}{9}$ পড়)

23. $\pm(5+2i)$

24. $\pm(2x+iy)$ 25. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+3a+1}+i\sqrt{a^2-3a+1})$

26. $\pm\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)-2i\right\}$ 27. $3\sqrt{2}$ 33. 2 34. $\frac{6}{13}$

35. $5, \tan^{-1}\frac{3}{4}$ 36. $13, -\tan^{-1}\frac{5}{12}$ 37. $65, \left(\tan^{-1}\frac{33}{56}\right)$

38. $\frac{25}{13}$; $\tan^{-1}\frac{16}{63}$ 39. $\sqrt{\frac{5}{13}}$; $\tan^{-1}\frac{7}{4}$ 40. $(x+i)(x-i)$

41. ± 1 এবং $\pm i$ 42. 3, 43. $(a+b+c-abc)^2+(1-ab-ac-bc)^2$

44. 10.

প্রশ্নমালা 6B

1. (i) $\pm\frac{b^2-4ac}{a^2}$. (ii) $-\frac{bc}{a^2}$.

(iii) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. (iv) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$. (v) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$.

(vi) $\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$. (vii) $\frac{b^2-2ac}{a^4c^2}(b^4-4ab^2c+a^2c^2)$.

(viii) $\frac{-3b}{2b^2+ac}$ (ix) $\frac{b}{ac}$.

2. (i) $\frac{3pq-p^3}{q^3}$. (ii) $\frac{3pq-p^3}{q^2}$. (iii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$

(iv) $(p^2-q)(p^2-3q)$. (v) $\frac{p(p^2-4q)(q-p^2)}{q}$

(vi) $pq^4(3q-p^2)$ (vii) $(p^4-4p^2q+2q^2)/q^4$.

3. (i) $x^2-7x+12=0$ (ii) $x^2+2x-35=0$.

(iii) $x^2-2x-2=0$. (iv) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

(v) $x^2-2(a^2+1)x+a^4+a^2+1=0$.

4. (a) $x^2-5x+4=0$.

(b) (i) $4x^2+3x+1=0$. (ii) $x^2-x+1=0$.

(c) $2x^2+(b-2\sqrt{c})x-b\sqrt{c}=0$.

5. $ax^2+2bx+4c=0$.

6. (i) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ (ii) $ac(x+1)^2=b^2x$

(iii) $a^4x^2-a^2(2b^2-4ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$.

(iv) $acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$. (v) $acx^2-bx+1=0$.

7. $x^2\pm 56x+768=0$. 11. $x^2-8x+11=0$.

12. $x^2-8x+11=0$. 16. (i) $x^2-px+q=0$

(ii) $qx^2-(p+q^2)x+pq=0$. (iii) $x^2-px+9q-2p^2=0$

17. 8. 18. $9261x^2-903x-170=0$

19. $4x^2-12x+5=0$. 20. $x^2+x+1=0$

21. $x^2+x+1=0$. 22. $cx^2+bx+a=0$.

24. $cx^2+bx+a=0$. 26. $a^2-2ab-3b^2+16ac=0$.

25. $5b^2=36ac$. 32. $\frac{\gamma+\delta\pm\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta}}{2}$

33. $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ (দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয় α, β ধরিয়া)

35. 2 এবং 12 36. (i) $b=0$, (ii) a, b ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে। (iii) a ও c-এর চিহ্ন একই হইবে, কিন্তু b-এর চিহ্ন উহাদের বিপরীত হইবে।

37. (i) $q=0$. (ii) $p=q=0$.

38. (i) $x^2-8x+15=0$. (ii) $x^2-12x+32=0$.

43. $a^2a_1{}^2x^2 - aa_1bb_1x + a_1c_1b^2 + acb_1{}^2 - 4aa_1cc_1 = 0$

47. $6x^2 - 12x - 19 = 0.$

প্রশ্নমালা 6C

1. $\pm 5.$ 2. ± 1 3. $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 4. ± 2

5. $\frac{4}{3}, -\frac{5}{14}.$ 6. $3, \frac{1}{3}$ 7, $14, 2\frac{1}{4}$ 8. $\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$

9. $7, -4\frac{9}{17}$ 10. $9\frac{15}{17}, -11$ 11. $5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{2}$ 12. $3, 23$

13. $2, -\frac{9}{2}$ 14. $3 \pm \sqrt{7}$ 15. $5 \pm \sqrt{17}$ 16. $c, c-2b$

17. $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ 18. $6, \frac{1}{6}$ 19. $12, \frac{3}{4}$ 20. $-3, 2$

21. $3, -4$ 22. $6, 9$ 23. $4, -2\frac{1}{4}$ 24. $3, -\frac{68}{9}$

25. $9, \frac{15}{13}$ 26. $-4, 2$ 27. $5, \frac{6}{5}$ 28. $0, -7$

29. $0, 2\frac{7}{4}$ 30. $-2a, -3a$ 31. $\dfrac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$

32. $-a, -b$ 33. $0, a+b$ 34. $\sqrt{13} \pm 3$ 35. $\sqrt{3} \pm 4$

36. 7 37. 6 38. $\frac{2}{5}$ 39. 8 (অবাস্তরবীজ $\frac{1}{3}$)

40. $\dfrac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$ 41. $\dfrac{a(m+1)^2}{2m-1}$ 42. $\pm 6.$ 43. 25. 44. 5

45. (a) 25 45. (b) $\frac{25}{27}$ 46. $\dfrac{ab}{a+b}$ 47. $-64, 27$ 48. $1, \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

49. $\frac{1}{2}$ 50. 3. 51. 5 52. 2, 1 53. $\frac{1}{2}$ 54. 1. 55. 4

56. 2, 3 57. 0, −1 58. 2, 1 59. −2, −2. 60 ± 2

61. 2, 3 62. $x=1, y=\frac{1}{2}$ 63. 2, −1 64. 0, 3

65. $-\frac{37}{29}$ 66. (a) $x=5, y=3$, (b) $x=y=z=\frac{1}{3}a$ 67. 1, −2

68. $x=3, y=3$ 69. $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ 70. $\frac{2}{3}, -4$ 71. $\pm\dfrac{2p}{\sqrt{5}}$

72. $-\frac{2}{3}(1 \pm \sqrt{7})$ 73. 43, −42 74. $2\frac{3}{7}, 1\frac{4}{9}$

75. $1, \dfrac{1}{a}$ 76. 1·85, −1·12.

প্রশ্নমালা 6 D

1. (a) বাস্তব, মূলদ ও অসমান। (b) বাস্তব, মূলদ ও সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। (c) বাস্তব, মূলদ ও সমান। (d) কাল্পনিক ও অসমান। (e) বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

5. $\frac{49}{4}$ 6. 9 7. (a) 2 বা $-\frac{10}{9}$; (b) $\frac{1}{3}$. 15. $\frac{a}{m}$

19. মূলদ নহে। নিরূপক পূর্ণবর্গ সংখ্যা কিন্তু x-এর সহগ অমূলদ।

20. (i) বীজদ্বয় $\sqrt{3}\pm 5$ (ii) বীজদ্বয় $5\pm\sqrt{3}$.

30. $c=\frac{a}{m}$. 34. বীজদ্বয় সমান হইলে $p^2=q$

35. (a) (i) $ac<0$ হইলে বীজদ্বয় বাস্তব, সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে; $ac\geqslant 0$. হইলে বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে; (ii) একটি বীজ শূন্য ও অপর বীজ $-\frac{b}{a}$. সুতরাং বীজদ্বয় অসমান ও বাস্তব হইবে। (iii) উভয় বীজই শূন্য হইবে; (iv) একটি মাত্র বীজ $-\frac{c}{b}$ হইবে।

(c) $f(x)$এর লঘিষ্ঠ মান 8. 36. $(x+y)(x+wy)(x+w^2y)$

37. $(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw)$ 38. $(x+wy)(x+w^2y)$.

প্রশ্নমালা 6 E.

1. ধনাত্মক 2. ঋণাত্মক 3. ধনাত্মক

4. 2 ও $3\frac{1}{2}$-এর মধ্যবর্তী নহে এরূপ যে কোন মান 5. $\frac{25}{12}$

8. 11, 3 9. 5 ও $\frac{1}{5}$ 15. 4, -5

16. $a=4,\ b=12$

18. $(3x-2y+1)(x+3y-2)$ 20. 0, 12

প্রশ্নমালা 6 F

1. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা, $\begin{matrix}x=5\\y=2.\end{matrix}$

3. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=6\end{matrix}\right\}$ 4. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ বা, $\begin{matrix}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{3}\end{matrix}$

5. $x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}$. 6. (i) $\left.\begin{matrix}x=4\\y=3\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-\frac{7}{2}\\y=-\frac{9}{2}\end{matrix}\right\}$

(ii) $\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{7}{2}\end{matrix}\right\}$

7. $\left.\begin{matrix}x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\end{matrix}\right\}$

8. (i) $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{5}(1+2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2-\sqrt{5a-1})\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{5}(1-2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2+\sqrt{5a-1})\end{matrix}\right\}$

(ii) $x=\dfrac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$; $y=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$

(iii) $\left.\begin{matrix}x=a\\y=0\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=0\\y=-b\end{matrix}\right\}$ 9. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=9\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=9\\y=1\end{matrix}\right\}$

10. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{5}\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=\frac{4}{5}\\y=20\end{matrix}\right\}$ 11 $\left.\begin{matrix}x=1\\y=3\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\}$.

12. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=\frac{11}{9}\\y=-\frac{13}{3}\end{matrix}\right\}$.

13. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=4\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=4\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-4\\y=-5\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-5\\y=-4\end{matrix}\right\}$

14. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-\frac{20}{13}\\y=\frac{37}{13}\end{matrix}\right\}$ 15. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=\pm2\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-2\\y=\pm\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$

16. $\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{matrix}\right\}$ 17. (i) $\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{4}\end{matrix}\right\}$ (ii) $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$

18. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{3}\end{matrix}\right\}$

19. $x=\dfrac{1\pm2\sqrt{5b-1}}{5}$; $y=\dfrac{2\mp\sqrt{5b-1}}{5}$

20. $\left.\begin{matrix}x=8\\y=4\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=4\\y=8\end{matrix}\right\}$ 21. $\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-5\\y=-7\end{matrix}\right\}$

22. $\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-5\\y=-7\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-7\\y=-5\end{matrix}\right\}$

23. $x=2, y=5$. বা, $x=-2, y=-5$.

24. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$ 25. $\left.\begin{matrix}x=6\\y=10\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=4\\y=15\end{matrix}\right\}$

26. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ 27. $\left.\begin{matrix}x=a\\y=b\end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix}x=2a-b\\y=2b-a\end{matrix}\right\}$

28. $x=\dfrac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$; $y=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$.

29. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=6\end{matrix}\right]$ বা, $\left.\begin{matrix}x=6\\y=3\end{matrix}\right]$ 30. $\left.\begin{matrix}x=9\\y=4\end{matrix}\right]$ বা, $\left.\begin{matrix}x=4\\y=9\end{matrix}\right]$

31. $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right]$ বা, $\left.\begin{matrix}x=2a\\y=2b\end{matrix}\right]$ 32. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right]$ বা, $\left.\begin{matrix}x=-12\\y=-\frac{28}{3}\end{matrix}\right]$

প্রশ্নমালা 6 G

1. (i) $x=\pm 2, y=\pm 1, z=\pm 3.$

(ii) $x=\pm 6\sqrt{2}, y=\pm 4\sqrt{2}, z=\pm 2\sqrt{2}.$

2. (i) $x=-1, y=2, z=3$; $x=\frac{445}{171}, y=\frac{-50}{171}, z=\frac{457}{171}$

(ii) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}$;

$x=\frac{107}{134}, y=\frac{77}{201}, z=\frac{17}{268}$;

3. $x=0, y=b, z=c$; $x=2a, y=-b, z=-c.$

4. $x=y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$ 5. $x=\pm 1, y=\pm 2, z=\pm 3.$

6. $x=6, y=2, z=5$; $x=-8, y=-4, z=-7.$

7. $x=\pm\frac{bc}{a}, y=\pm\frac{ca}{b}, z=\pm\frac{ab}{c}.$

9. $x=\pm\frac{b+c-a}{2}, y=\pm\frac{c+a-b}{2}, z=\pm\frac{a+b-c}{2}$

10. $x=y=z=1,$ 11. $x=\pm 3, y=\pm 2, z=\pm 1.$

12. $x=-4, y=-3, z=-4$; $x=-\frac{13}{5}, y=\frac{27}{13}, z=\frac{10}{3}$

13. $x=ak, y=bk, z=ck.$

$$k=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2}}$$

14. $x=\frac{30}{13}, y=\frac{30}{17}, z=-\frac{30}{7}$

15. (i) $x=\pm 1, y=\pm 2, z=\pm 3$

(ii) $x=k(c^2-ab), y=k)a^2-bc), z=k(b^2-ca)$

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$$

16. $x=y=z=0$; $x=\pm\sqrt{6}, y=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}, z=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}.$

17. $x=2, y=3, z=4$; $x=2, y=4, z=3$; $x=3, y=2, z=4.$

$x=3, y=4, z=2$; $x=4, y=2, z=3$; $x=4, y=3, z=2.$

18. $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{7}{3}$, $x=-\frac{1}{2}, y=-3, z=-\frac{1}{4}.$

19. $x=2, y=3, z=4$; $x=2, y=4, z=3$; $x=3, y=2, z=4$.
$x=3, y=4, z=2$; $x=4, y=2, z=3$; $x=4, y=3, z=2$.

20. $x=\frac{47}{12}$, $y=\frac{97\pm\sqrt{573}}{24}$, $z=\frac{97\mp\sqrt{573}}{24}$

21. $x=y=z=1$. **22.** 25, 24, 7

প্রশ্নমালা 7 A

1. 40320 ; 210 ; 5040 ; 360 ; 120.
2. $n=4$ বা 5. **3.** 4
8. 30. **9.** 720 **10.** 336. **11.** 380. **12.** 870
13. 4320. **14.** 576. **15.** 60. **16.** 60. **17** 36.
18. 2160. **19.** 154 **20.** $2\underline{|n-1}$. **21.** (i) 330
(ii) 990. **22.** 576 **23.** $\underline{|20}\times{}^{21}P_{16}$ **24.** 3600.
25. 120960. **26.** (i) 720, (ii) 600, (iii) 96.

প্রশ্নমালা 7 B

1. 389188800, 59875200
2. 20160, 5040. **3.** 1260 **4.** (i) 10079 (ii) 719 (iii) 359
6. 900. **7.** $\frac{\underline{|41}}{(\underline{|4})(\underline{|5})^2(\underline{|7})^3}$ **8.** $\frac{\underline{|39}}{\underline{|5}(\underline{|4})^2(\underline{|6})^3}$
9. (i) 60, (ii) 90, (iii) 420, (iv) 34650

প্রশ্নমালা 7 C

1. 81. **2.** 15^4 **3.** 120 **4.** 340 **5.** 1296.

প্রশ্নমালা 7 D

1. $\underline{|9}$ **2.** 5040 **3.** 2520
4. 20160, 2520 (আপেক্ষিক অবস্থানে)
5. 1036800 (টেবিল সম্পর্কে), 86400 (আপেক্ষিক অবস্থানে), 43200 (দিকের প্রভেদ না ধরিয়া) **6.** 28800 (টেবিল সম্পর্কে), 2880 (আপেক্ষিক অবস্থানে). 1440 (দিকের প্রভেদ না ধরিয়া)
7. 2880.

প্রশ্নমালা 7 E

1. (i) 15, (ii) 120, (iii) 435, (iv) 51 2. 14
3. (i) 8 (ii) 1771 4. $n-1$. 5. 56, 6. 840.
7. 246 8. 868224. 9. 816000. 10. 36.
11. 220 12. (i) 210. (ii) 371 13. 200.
14. 25 15. 20, 9. 16. 120 17. (i) 40 (ii) 116
18. (i) $\frac{1}{2}\{n(n-1)-m(m-1)+2\}$.
(ii) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$.
19. 990 20. $n=6$, $r=3$. 21. 344. 22. 1260
23. (i) 100 (ii) 451 24. 68 25. $\dfrac{\lfloor 22}{\lfloor 2\lfloor 11\lfloor 11}$

প্রশ্নমালা 7 F

1. 5 2. 255 369600 4. $\dfrac{p+1}{\lfloor n\lfloor p-1+n}$
5. 31 6. 2520 7. 55 8. 4 1. (a) $\dfrac{\lfloor 68}{(\lfloor 17)^4\lfloor 4}$
(ii) $\dfrac{\lfloor 68}{(\lfloor 17)^4}$ 11. 1260 12. 15400 13. (i) 113
(ii) 2190 14. 7776000 16. (i) 160 (ii) 2724
19. $\dfrac{\lfloor 51}{\lfloor 12\lfloor 16\lfloor 23}$ 20. 59 21. $\dfrac{\lfloor pr}{(\lfloor p)^r\lfloor r}$ 22. 315
23. 50 24. ${}^{10}C_4\times\lfloor 9\lfloor 9$

প্রশ্নমালা 8 A

1. $a^5+15a^4+90a^3+270a^2+405a+243$
2. $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$
3. $32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5$
4. $x^7-\dfrac{21x^6}{y}+\dfrac{189x^5}{y^2}-\dfrac{945x^4}{y^3}+\dfrac{2835x^3}{y^4}-\dfrac{5103x^2}{y^5}$
$+\dfrac{5103x}{y^6}-\dfrac{2187}{y^7}$
5. $240\sqrt{3}$ 6. $32-40a^2+10a^4$
7. $a^6-3a^5-3a^4+11a^3+6a^2-12a-8$

8. $^{17}C_{16}\,\frac{1}{x^{16}}$; $-625000y^7$; $^{2n}C_{n-1}a^2$

9. $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)}{\lfloor p-1}.3^{p-1}x^{p-1}$ এবং

$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)}{\lfloor p-1}.3^{n-p+1}x^{n-p+1}$

10. 924 11. $126x, -\frac{126}{x}$ 12. -252 13. $\frac{2835}{8}$

14. (i) $(-1)^n\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$ অথবা $\frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{\lfloor n}(-2)^n$

(ii) 252 16. -252 17. 13440 18. -364

19. 4433 20. 340, 21 21. $(-1)^{n-r}\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n-r\,\lfloor n+r+1}$

23. 495 24. $199\frac{1}{9}$ 25. $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$ 26. -70

27. $\frac{7}{18}$ 28. 252 29. $(n+1)$ তম পদ $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m\,\lfloor n}$.

30. 9 32. 1 34. 970299 ; ·96.

প্রশ্নমালা 8 B

1. $\frac{28672}{729}$ 2. t_6 3. $t_4=t_5=\frac{224}{9}$ 4. $\frac{2816}{27}$ 5. -1

6. -1 8. $x=1, a=2, n=7$ 9. 8 10. 11

22. (i) 0 (ii) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1\,\lfloor n-1}$ (iii) $\frac{1}{2}n(n+1)$ 25. $n=7$ বা 14

প্রশ্নমালা 9 A

1. $1-4x+10x^2-20x^3+\cdots$ 2. $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$

3. $1-10x+60x^2-280x^3+\cdots$ 4. $1-\frac{3}{5}x-\frac{2}{25}x^2-\frac{7}{125}x^3-\cdots$

5. $1-\frac{3}{2}x+\frac{37}{8}x^2-\frac{135}{16}x^3+\cdots$ 6. $8+9x+\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{128}x^3+\cdots$

7. $\frac{1}{8}-\frac{3}{16}a+\frac{3}{16}a^2-\frac{5}{32}a^3+\cdots$ 8. $1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3^2}x^2-\frac{5}{3^4}x^3-\cdots$

9. $a^{-\frac{5}{2}}\left(1+\frac{5x}{a}+\frac{35x^2}{2a^2}+\frac{105x^3}{2a^3}+\cdots\right)$

10. $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots$

11. $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\left(1+\frac{6}{5}x^2+\frac{81}{50}x^4+\frac{567}{250}x^6+\cdots\right)$

12. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$

13. $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots$ 14. $-4a^3, (-1)^r(r+1)a^r$

15. $\frac{8}{3}x^3$ 16. $36x^7, \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$ 17. $\frac{b^r}{a^{r+1}}x^r$

18. $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-2)n+1\}}{n^{r-1}\lfloor r-1}\cdot\frac{x^{r-1}}{a^{\frac{1}{n}+r-1}}$

19. $3\times\frac{1.3.5\cdots(2r-7)}{2^{r-1}\lfloor r-1}x^{r-1}$ 20. $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}a^{2r}$

21. $(-1)^{r-1}\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r\lfloor r}x^r$

22. (i) $(-1)^r\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\lfloor r}a^r$ (ii) $\frac{1.4.7\cdots(3r-2)}{\lfloor r}x^r$

23. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots, (r+1)x^r$

24. $1+4x+10x^2+20x^3+\cdots, \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$

25. $1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\cdots ; \frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\lfloor r}x^r$ 26 $-\frac{27}{128}$

27. 101 28. 121 29. 2 30. $-\frac{1}{4}\left(3+\frac{5}{3^8}\right)$

31. $4n$ [প্রশ্নে $(1+x)^2$ পড়] 32. $-\frac{r+9}{2^{r+2}}, -\frac{7}{64}$ 33. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{32}$

34. $(-1)^n$ 35. সপ্তম পদ 36. তৃতীয় পদ

37 অষ্টম ও নবম পদদ্বয় 38. $\frac{77}{2}.3^{\frac{3}{4}}$ 39. (1) দশম পদ, (ii) দ্বিতীয় পদ
(iii) নবম পদ 40. (i) $-\frac{5}{8}a^4$. (ii) $-\frac{1}{2x^3}$

41. $\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\lfloor r}$ 42. নবম পদ ।

প্রশ্নমালা 9B

1. 1·2167 2. 4·9920 3. 9·9990 4. 9·9499
5. ·1459 6. 1·0007 7. 1·2599 8. ·1996
9. 4·89998 10. ·9996 11. (a) ·0638
11 (b) 1·0003 12. 1·00199

13. $1+\frac{13}{6}a$ 14. $1-\frac{51}{20}a$ 17. $1+x+x^2+\cdots$ to ∞

18. $\frac{3}{4}$ 19. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 20. $\frac{2}{3}$ 21. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$

22. $\frac{1-3x}{(1+x)^2}$ 23. $\sqrt{2}$ 24. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 25. $\sqrt{\frac{5}{2}}$

26. $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ 27. $\sqrt[3]{2}$ 28. 2 29. $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{8}}$

30. $4(2)^{\frac{1}{3}}-2.$ 31. $(\frac{3}{2})^{-\frac{3}{2}}$ 32. $\frac{19}{8}$ 33. $3\sqrt{3}$

34. $\frac{7}{24}$ 35. $(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 38. $\frac{1}{11}$ 39. $\frac{1}{16}$

40. $\frac{9}{110}$ 41. $1\frac{5}{9}$. 43. $\frac{(r+1)(r+1)(r+3)}{1.2.3}$

44. $\frac{(p+1 (p+2)\cdots(p+r)}{\lfloor r}$.

প্রশ্নমালা 10A

1. (i) 4 (ii) 4 (iii $-\frac{4}{5}$ (iv) $-\frac{2}{3}$ (v) 4 (vi) -3 (vii) a

2. (i) $2\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) ·008 (iv) a (v) 27

7. $m=\frac{n}{n-1}$ 12. (b) $\frac{a+2b}{4}$ এবং $\frac{a-2b}{4}$

(c) $a=7$ (d) $x=100$ or $\frac{1}{100}$

12. (b). (i) 0 (ii) log 2. 26. $\frac{p^2}{qr}=x^{2m-n-1}$.

প্রশ্নমালা 10B

1. (i) 9 (ii) 8 (iii) 18 (iv) 38 (v) 48 (vi) 65

2. (i) 58 (ii) 21 (iii) 47 (iv) 4 (v) 14 (vi) 79

3. (i) 1·6532126 (ii) 1·5765060 (iii) $\bar{2}$·1760913.

(iv) $\bar{2}$·6346787 (v) $\bar{1}$·9345759 (vi) ·3861209.

4. (a) -6·4127598 (b) $\bar{6}$·2007583.

5. log 3 6. (a) ·06974 (b) 259·569 7. 1·197312

8. 2·8574858 9. (a) 1·3686646

10. 4·9381073 11. (a) 772·153 (b) ·00146737

12. 12·5 13. (a) 63 (b) 1·59 (c) ·03

(d) $x=·41$, $y=5·66$ (e) $x=-1·34$; $y=-·80$.

প্রশ্নমালা 11

1. $1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots$ **2.** ·9048 **3.** $\frac{(-1)^r}{\lfloor r}(1+r)$

4. $\frac{(-1)^n}{\lfloor n}(p+nq)$. **5.** $e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots)$

এবং $e(1+px+p^2x^2+\frac{5}{6}p^3x^3+\frac{5}{8}p^4x^4+\cdots)$

6. $\frac{(-1)^n}{\lfloor n}(1+2n-n^2)$. **7.** $\frac{(-1)^r}{\lfloor r}(r^2-4r+1)$.

8. $e+e^{-1}-2$ **18.** $3e$ **19.** $2e$ **20.** $(x^3+6x^2+7x+1)e^x$

27. $\log_e 3$ **28.** $\frac{3}{2}\log_e 3$ **29.** $\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$

30. $\log_e 3-\log_e 2$

31. $-\left(\frac{2+1}{1}x+\frac{2^2+1}{2}x^2+\frac{2^3+1}{3}x^3+\cdots\cdots\right)$, $-\frac{2^n+1}{n}$.

36. $\frac{1}{\log_e 2}$

প্রশ্নমালা 12

1. (i) 11576 টা. 25 প. (ii) 676 টাকা (iii) 6230 টাকা

(iv) 4960 টাকা. **2.** 15 টা. 25 প. **3.** 3200 টা.

4. A, 62 প. (প্রায়) **5.** 530 টা. 60 প. **6.** 464 টা. 40 প. (প্রায়)

7. 27 টা. 54 প. **8.** 3 টা. 05 প. **9.** 3750 টাকা

11. 1576 টা. 25 প. **12.** 625 টা. **13.** 400 টা., 5%

14. 4000 টা., 5% **15.** 1250 টা., 4%

16. (i) 120·8 বৎসর (প্রায়) (ii) 115·13 বৎসর (প্রায়)

17. 27783, **18.** 13250 **19.** (i) 12 বৎসর (আসন্ন)

(ii) 39·4 বৎসর (আসন্ন) **20.** 7·8 বৎসর (আসন্ন)

21. (a) 1·03 বৎসর (আসন্ন) (b) 11·6 বৎসর (আসন্ন)

22. 9·3 বৎসর (আসন্ন) **23.** 8·71 বৎসর (আসন্ন)

25. 9341 টা. (আসন্ন) **26.** 0·1215 (আসন্ন)।

LOG TABLES

TABLE I

LOGARITHMS OF NUMBERS (সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences (গড় অন্তর) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

সংখ্যার লগারিদম্

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS (সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences (গড় অন্তর) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

সংখ্যার লগারিদম্

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

ত্রিকোণমিতি

TRIGONOMETRY

নিম্নের চিহ্নগুলি (Signs) এই পুস্তকে ব্যবহৃত হইয়াছে।

$\angle$ (কোণ), $m\angle$ (কোণের পরিমাপ)

যথা, $m\angle ABC = 60°$.

$\triangle$ (ত্রিভুজ), $m\triangle ABC$ ($\triangle ABC$-র ক্ষেত্রফল)

$\odot$ (বৃত্ত)

$\overleftrightarrow{AB}$ (সরলরেখা AB, যাহাকে দুইদিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করা যায়)

$\overrightarrow{AB}$ (রশ্মি AB, ABকে তীর নির্দিষ্ট দিকে বর্ধিত করা যায়)

AB (AB রেখাংশ ও উহার পরিমাপ)

[এই পুস্তকে সাধারণতঃ কোণের পরিমাণ নির্দেশ করিবার জন্য α (আলফা), β (বিটা), γ (গামা), θ (থিটা), ϕ (ফাই) প্রভৃতি গ্রীক অক্ষর ব্যবহার করা হইয়াছে।]

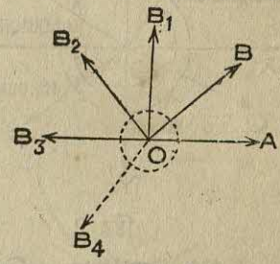
ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক কোণ ও কোণ-পরিমাপ

§ 1·1. **ত্রিকোণমিতি**—ত্রিভুজের তিনটি কোণ থাকায় উহাকে 'ত্রিকোণ'ও বলা যায়। গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় সমতলে অঙ্কিত ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাণ ও সম্বন্ধ বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে **'ত্রিকোণমিতি'** বলে। ইহা জ্যামিতির একটি বিশিষ্ট শাখা। ইহার আলোচ্য বিষয় অধিকতর ব্যাপক।

§ 1·2. **জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ**—ত্রিকোণমিতিক কোণ জ্যামিতিক কোণ অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক। মনে কর $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overrightarrow{OA}$ অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরিতে লাগিল। $\overrightarrow{OB}$ প্রথমে AOB সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিয়া যখন $\overrightarrow{OA}$-র সহিত লম্বভাবে দাঁড়াইবে তখন AOB_1 কোণটি সমকোণ হইবে। $\overrightarrow{OB}$ আরও কিছু ঘুরিয়া গেলে AOB_2 কোণটি স্থূলকোণ হইবে।



চিত্র 1

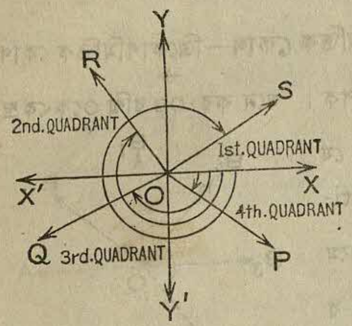
এইভাবে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OB}$ যখন $\overrightarrow{OA}$-র ঠিক বিপরীত দিকে এক সরল রেখায় অবস্থিত হইবে তখন AOB_3 কোণটি সরল কোণ বা দুই সমকোণ হইবে। আরও ঘুরিলে AOB_4 কোণটি প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex-angle) হইবে। আর $\overrightarrow{AB}$ যখন সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া $\overrightarrow{OA}$-র সহিত মিলিত হইবে, তখন সমগ্র AOB কোণটি চার সমকোণ হইবে।

জ্যামিতিতে আমরা এই পর্যন্ত কোণের আলোচনা করিয়া থাকি, এবং এই পর্যন্ত জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোন অমিল নাই। জ্যামিতিতে 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ ধরা হয় না।

এখন যদি মনে করি যে, $\overrightarrow{OB}$ রশ্মিটি সম্পূর্ণ একপাক অপেক্ষা কিছু বেশী ঘুরিয়া পূর্বের $\overrightarrow{OB}$ অবস্থানে গেল, তখন যে AOB কোণটি উৎপন্ন হইল, তাহা 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। এইরূপে $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি প্রথম অবস্থান $\overrightarrow{OA}$ দিয়া যে কোন পূর্ণসংখ্যক বার ঘুরিয়া কোন এক শেষ অবস্থানে আসিতে পারে।

অতএব ত্রিকোণমিতিতে এইরূপ উৎপন্ন কোণগুলি যে কোন পরিমাণের হইতে পারে ; জ্যামিতিতে এরূপ হয় না। O বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{OA}$কে মূল বা প্রারম্ভিক রেখা এবং $\overrightarrow{OB}$কে উৎপাদক রেখা (generating line বা radius vector) বলে।

§ 1·3. **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ**—পূর্বে দেখান হইয়াছে $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতদিকে (anti-clockwise) ঘুরিয়া কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে, এই কোণগুলিকে **ধনাত্মক** (positive) কোণ বলে।



চিত্র 2

আর $\overrightarrow{OP}$ রশ্মি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইদিকে ঘুরিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় সেইগুলিকে **ঋণাত্মক** (negative) কোণ বলা হয়।

§ 1·4. **কোণের পরিমাণ**—কোন কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ের দুইটি প্রণালী (system)। যথা—(1) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (sexagesimal system), (2) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (circular system) সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি**—সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে কোণের একক ধরা হয় এবং উহাকে 90 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে প্রতি অংশ এক **ডিগ্রী** (degree) হয়। এক ডিগ্রীকে 60টি সমান ভাগ করিলে প্রতি ভাগকে এক **মিনিট** (minute) এবং এক মিনিটের 60 সমান ভাগের এক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** (second) বলা হয়।

(ii) **কোণের বৃত্তীয় মান** (circular-measure)—বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ানকে (Radian) কোণের একক ধরা হয়।

রেডিয়ান : যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ উহার কেন্দ্রে যে সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক রেডিয়ান (1^c) বলে। ইহা একটি ধ্রুবক (constant) কোণ এবং ইহার পরিমাণ প্রায় $57°17'44·8''$.

4^c বলিলে চার রেডিয়ান কোণ বুঝাইবে।

এই সম্বন্ধে আলোচনার পূর্বে পরবর্তী অনুচ্ছেদের প্রতিজ্ঞাটির জ্ঞান আবশ্যক।

§ 1·5. **প্রতিজ্ঞা :** "বৃত্তসমূহের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক"। প্রতিজ্ঞাটির প্রমাণ তোমরা মাধ্যমিক স্তরে শিখিয়াছ, তাই এখানে প্রমাণ দেওয়া হইল না।

দ্রষ্টব্য : ঐ ধ্রুবক সংখ্যাটি π (পাই) এই গ্রীসীয় অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়। উহা একটি অমেয় সংখ্যা। ইহার স্থূল মান $= \frac{22}{7}$ এবং অধিকতর আসন্ন মান $\frac{355}{113}$ বা 3·14159⋯।

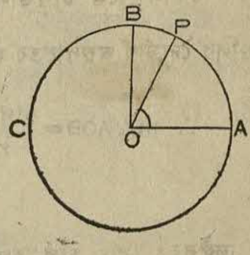
বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ দৈর্ঘ্য একক ($r=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

§ 1·6. **প্রতিজ্ঞা :** "রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।" বা, বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহা ধ্রুবক কোণ।

মনে কর, APC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং চাপ AP $=$ ব্যাসার্ধ OA $=r$; সুতরাং $\angle$AOP-র পরিমাপ এক রেডিয়ান (1^c).

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $m\angle$AOP ধ্রুবক। ব্যাসার্ধ OB $\perp$ OA টান।

এক্ষণে চাপ AB $=\frac{1}{4}$ পরিধি।



চিত্র 3

প্রমাণ : কোন বৃত্তের চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

$$\therefore \frac{m\angle \text{AOP}}{m\angle \text{AOB}}=\frac{\text{চাপ AP}}{\text{চাপ AB}}=\frac{\text{ব্যাসার্ধ OA}}{\frac{1}{4}\text{ পরিধি}}=\frac{r}{\frac{2\pi r}{4}}=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore \frac{m\angle \text{AOP}}{1 \text{ সমকোণ}}=\frac{2}{\pi}, \quad \therefore \quad m\angle \text{AOP}=\frac{2}{\pi}\text{ সমকোণ},$$

$$\text{অর্থাৎ এক রেডিয়ান}=\frac{2}{\pi}\text{ সমকোণ}=\text{ধ্রুবক।}$$

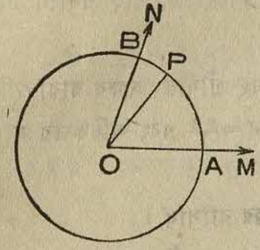
[**দ্রষ্টব্য :** $1^c=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'44''\cdot8$ (প্রায়),

$\pi^c=2$ সমকোণ $=180^\circ$, $\frac{\pi^c}{2}=1$ সমকোণ। $1^\circ=\cdot017453$ রেডি. (প্রায়)]

§ 1·7. **প্রতিজ্ঞা :** "কোন বৃত্তের কোন চাপ ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপ সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয়মান হইবে।"

[প্রমাণ কর যে, বৃত্তের কোন কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান $=\dfrac{\text{ঐ কোণের চাপ}}{\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$]

MON একটি কোণ ; ইহার বৃত্তীয় মান নির্ণয় করিতে হইবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (r) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন $\angle$ AOB, APB চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ হইল। বৃত্তের ব্যাসার্ধের (r) সমান করিয়া AP চাপ কাটিয়া লও এবং OP যোগ কর। ইহাতে $m\angle AOP = 1$ রেডিয়ান হইল।



চিত্র 4

∵ কোন বৃত্তে চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান, ∴ $\frac{m\angle AOB}{m\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{r}$.

$$\therefore\ m\angle AOB = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times m\angle AOP = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\text{চাপ } AB}{r} \text{রেডিয়ান।}$$

[**দ্রষ্টব্য :** যদি চাপ $AB = s$, এবং $m\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান অর্থাৎ θ^c হয়, তবে $\theta = \frac{s}{r}$ হইবে। অর্থাৎ **কোণের বৃত্তীয় মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ** বৃত্তের চাপ $= \theta r$].

§ 1·8. দুইটি পদ্ধতির পরস্পর সম্বন্ধ :

$90° = 1$ সমকোণ ; $\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ।

$$\therefore\ 90° = \frac{\pi^c}{2},\ \text{বা, } 180° = \pi^c.$$

মনে কর, কোন একটি কোণের পরিমাণ ষষ্টিক পদ্ধতিতে $D°$ এবং উহার বৃত্তীয় মান R^c.

এক্ষণে, ∵ $90° = 1$ সমকোণ, ∴ $1° = \frac{1}{90}$ সমকোণ,

$$\therefore\ D° = \frac{D}{90} \text{ সমকোণ।}$$

আবার, ∵ $\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ, ∴ $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ,

$R^c = \frac{2R}{\pi}$ সমকোণ। ∴ $\frac{D}{90} = \frac{2R}{\pi}$, ∴ $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

উদাহরণমালা 1

উদাহরণ 1. 20° ও 36°কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(i) $\because\ 180° = \pi^c,\quad \therefore\ 1° = \frac{\pi^c}{180},\quad \therefore\ 20° = \frac{\pi^c \times 20}{180} = \frac{\pi^c}{9}$

(ii) $\because\ 1° = \frac{\pi^c}{180}\qquad \therefore\ 36° = \frac{\pi^c \times 36}{180} = \frac{\pi^c}{5}.$

উদা. 2. (a) $\frac{5}{12}\pi^c$ ও (b) $\frac{9}{8}\pi^c$ কে ষষ্টিকমানে প্রকাশ কর।

(a) $\because\ 1^c = \frac{180°}{\pi}\qquad \therefore\ \frac{5}{12}\pi^c = \frac{180°}{\pi} \times \frac{5\pi}{12} = 75°.$

(b) $\because\ 1^c = \frac{180°}{\pi},\ \therefore\ \frac{9\pi^c}{8} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{9\pi}{8} = \frac{45 \times 9}{2}$ ডিগ্রী $= \frac{405°}{2}$

$= 2$ সমকোণ $22°30'$.

উদা. 3. $\pi = 3{\cdot}1416$ ধরিয়া যে কোণের বৃত্তীয়মান 1·309 তাহাকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। [C. U. '48]

$\because\ \pi^c = 180°,\qquad \therefore\ 1^c = \frac{180°}{\pi}.$

$\therefore\ 1{\cdot}309$ রেডিয়ান $= \frac{180 \times 1{\cdot}309}{3{\cdot}1416}$ ডিগ্রী $= 75°.$

উদা. 4. $\frac{1}{\pi} = {\cdot}31831$ ধরিয়া দেখাও যে এক রেডিয়ানে প্রায় 206265 সেকেণ্ড হয়। [G. U. '48]

$\because\ \pi^c = 180°.\quad \therefore\ 1^c = 180° \times \frac{1}{\pi} = 180° \times {\cdot}31831$

$= 180 \times {\cdot}31831 \times 60 \times 60$ সেকেণ্ড

$= 206264{\cdot}88$ সেকেণ্ড $= 206265$ সেকেণ্ড (আসন্ন)।

উদা. 5. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6″ ; উহার 9″ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণের পরিমাণ কত ?

আমরা জানি চাপ $= r\theta$*, এখানে চাপ $= 9''$, $r = 6''$, এবং θ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান। $9 = 6\theta,\quad \therefore\ \theta = \frac{9}{6}$ বা $\frac{3}{2}$ রেডিয়ান

$= \frac{3}{2} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী $= \frac{3 \times 180° \times 7}{2 \times 22}$ ডিগ্রী $= 85\frac{10}{11}$ ডিগ্রী।

দ্রষ্টব্য : *চাপ $= r\theta$, এই সূত্রে θ কোণটি সর্বত্র θ রেডিয়ান বুঝিবে।]

উদা. 6. যদি D ও C কোন কোণের যথাক্রমে ডিগ্রী ও রেডিয়ান সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে $\frac{D}{90}=\frac{2C}{\pi}$. [C.U. '47 ; D.B. '50]

এখানে একই কোণের পরিমাণ D ডিগ্রী বা C রেডিয়ান বলা আছে।

$\therefore$ D ডিগ্রী = C রেডিয়ান। $\because$ D ডিগ্রী $=\frac{D}{90}$ সমকোণ এবং C রেডিয়ান $=\frac{2C}{\pi}$ সমকোণ, $\therefore$ $\frac{D}{90}=\frac{2C}{\pi}$.

প্রশ্নমালা 1

1. ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :—
   (i) 13214″ (ii) 507·5′ (iii) ·24 সমকোণ।

2. নিম্নের কোণগুলিকে সমকোণে প্রকাশ কর :—
   (i) 30° (ii) 60°45′ (iii) 360°20′48″
   (iv) $\frac{\pi^c}{3}$ (v) $10\pi^c$.

3. নিম্নের কোণগুলিকে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর :—
   (i) 2^c (ii) $\frac{5}{6}\pi^c$ (iii) $\frac{2\pi^c}{3}$.

4. নিম্নের কোণগুলিকে রেডিয়ানে পরিণত কর :—
   (i) 30° (ii) 75°30′.

5. কোন বৃত্তের পরিধি 176 মিটার, উহার ব্যাসার্ধ কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

6. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. ; উহার 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

7. ব্যাসার্ধ 17·6 সে. মি. হইলে যে চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ $22\frac{1}{2}°$ হয়, তাহার দৈর্ঘ্য কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

8. 2618 ফুট দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। $(\pi=3·1416)$। [C. U.]

9. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4000 মাইল। উহার যে চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ 5″ তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10. $5\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা একটি লোককে অর্ধ মাইল দূর হইতে দেখা গেল। লোকটি কি পরিমাণ সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে ? [W. B. S. F. '52]

11. যদি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের চাপ যথাক্রমে 60° ও 75° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '53]

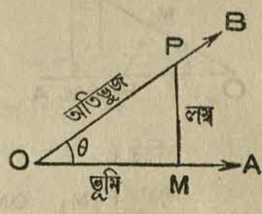
[**সংকেত :** $\because$ $180° = \pi^c$, $\therefore$ $60° = \frac{\pi^c}{3}$ এবং $75° = \frac{5\pi^c}{12}$. যদি বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r ও R হয়, তবে প্রথম বৃত্তের চাপ $= \frac{\pi}{3} . r$ এবং দ্বিতীয় বৃত্তের চাপ $= \frac{5\pi}{12} . R$. আবার, $\because$ চাপদ্বয় সমান (স্বীকার),

$$\therefore \frac{\pi}{3} \cdot r = \frac{5\pi}{12} \cdot R. \quad \therefore r : R = \frac{5\pi}{12} : \frac{\pi}{3} = 5 : 4.]$$

দ্বিতীয় অধ্যায়

সূক্ষ্মকোণের কোণানুপাত (Trigonometrical Ratios of Acute Angles)

§ 2·1, **সংজ্ঞা :** মনে কর, AOB এই সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণ θ (থিটা)। $\overrightarrow{OB}$ বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে $\overrightarrow{OA}$-র উপর PM লম্ব টানা হইয়াছে। এখন POM সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ-র সম্পর্কে PMকে ইহার লম্ব, OM কে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলে। আবার, P সূক্ষ্মকোণের সম্পর্কে OMকে ইহার লম্ব, PMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলিতে হইবে। এখন ∠ POM বা θ কোণের কোণানুপাতগুলি নিম্নরূপ হইবে :—



চিত্র 5

$\frac{PM}{OP}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{লম্বের দৈর্ঘ্য}}{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Sine (সাইন)

$\frac{OM}{OP}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমির দৈর্ঘ্য}}{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Cosine (কোসাইন)

$\frac{PM}{OM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{লম্বের দৈর্ঘ্য}}{\text{ভূমির দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Tangent (ট্যান্‌জেন্ট)

$\frac{OM}{PM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমির দৈর্ঘ্য}}{\text{লম্বের দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Cotangent (কোট্যান্‌জেন্ট)

$\frac{OP}{OM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}{\text{ভূমির দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Secant (সেকান্ট)

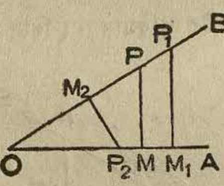
$\frac{OP}{PM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য}}{\text{লম্বের দৈর্ঘ্য}}$) $= \theta$ কোণের Cosecant (কোসেকান্ট).

সংক্ষেপে এই অনুপাতগুলিকে $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, এবং $\operatorname{cosec}\theta$ লেখা হয় এবং লম্বের দৈর্ঘ্য ইত্যাদিকে লম্ব বলা হয়।

এইগুলি ব্যতীত $1-\cos\theta$কে **ভার্স** θ (vers θ) এবং $1-\sin\theta$কে **কোভার্স** θ (co-vers θ) বলে।

§ 2·2. একই কোণের কোণানুপাতগুলি সর্বদাই সমান।

চিত্র 6-এ AOB-কোণের $\overrightarrow{OB}$ বাহুর উপর অপর যে কোন বিন্দু P_1 হইতে $\overrightarrow{OA}$ বাহুর উপর P_1M_1 লম্ব টানা হইল। এখানে দেখান হইবে যে পূর্বে $\triangle POM$ হইতে O-কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছিল, $\triangle P_1OM_1$ হইতেও তাহাই পাওয়া যায়। POM ও P_1OM_1 এই ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle O$ সাধারণ-কোণ, $\angle M \cong \angle M_1$ (সমকোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট $\angle P \cong \angle P_1$. অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।



চিত্র 6

$\therefore \quad \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1},$

$\frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}$......ইত্যাদি।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, $\overrightarrow{OB}$-র উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থিতিতে O-কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

এইরূপে যদি $\overrightarrow{OA}$ রেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু P_2 হইতে $\overrightarrow{OB}$-র উপর P_2M_2 লম্ব টানা হয়, তাহা হইলে $\triangle OP_2M_2$ হইতে O-কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায় সেগুলিও পূর্ব কোণানুপাতগুলির সমান।

কারণ, $\triangle POM$ এবং $\triangle P_2OM_2$ সদৃশকোণী বলিয়া উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও সমানুপাতী।

§ 2·3. **কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ ঃ—**

$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, বা, $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$;

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, বা, $\cos\theta \sec\theta = 1$;

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, বা, $\tan\theta \cot\theta = 1$.

প্রমাণ ঃ চিত্র 6এ মনে কর $m\angle POA = \theta$.

$$\therefore \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{\frac{OP}{PM}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}; \quad \therefore \sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1;$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\frac{OP}{OM}} = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \therefore \cos\theta \sec\theta = 1;$$

এবং $$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{1}{\frac{OM}{PM}} = \frac{1}{\cot\theta}, \quad \therefore \tan\theta \cot\theta = 1.$$

অতএব $\sin\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$; $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ পরস্পরের **অন্যোন্যক** (Reciprocal).

মনে রাখিবার উপায় ঃ—ত্রিকোণমিতিক অনুপাত **ছয়টিকে** সাধারণতঃ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ এই ক্রমে লেখা হয়। এই ক্রমে উভয় প্রান্ত হইতে প্রথম দুইটি (অর্থাৎ $\sin\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$), দ্বিতীয় দুইটি (অর্থাৎ $\cos\theta$ ও $\sec\theta$) এবং তৃতীয় দুইটি (অর্থাৎ $\tan\theta$ ও $\cot\theta$) পরস্পরের অন্যোন্যক।

(ii) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

প্রমাণ। চিত্র 6এ মনে কর $m\angle POA = \theta$. $\therefore$ OP-র যে কোন অবস্থানে,

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}; \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\frac{OM}{OP}}{\frac{PM}{OP}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

(iii) (ক) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$;

(খ) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ এবং (গ) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$.

প্রমাণ : চিত্র 6এ মনে কর $m\angle POA=\theta$.

(ক) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{PM}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2$

$=\frac{PM^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=\frac{PM^2+OM^2}{OP^2}=\frac{OP^2}{OP^2}$ [সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে]

$=1.$

(খ) $1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{PM}{OM}\right)^2=1+\frac{PM^2}{OM^2}=\frac{OM^2+PM^2}{OM^2}$

$=\frac{OP^2}{OM^2}=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=(\sec\theta)^2=\sec^2\theta.$

(গ) $1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2+1+\frac{OM^2}{PM^2}=\frac{PM^2+OM^2}{PM^2}$

$=\frac{OP^2}{PM^2}=\left(\frac{OP}{PM}\right)^2=(\text{cosec}\,\theta)^2=\text{cosec}^2\theta.$

উদাহরণমালা 2A

উদা. 1. প্রমাণ কর : $\sin^4\theta-\cos^4\theta+1=2\sin^2\theta.$

$\sin^4\theta-\cos^4\theta+1=(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2+1$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+1$

$=1\times(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+\sin^2\theta+\cos^2\theta$ [$\because \sin^2+\cos^2\theta=1$]

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2\sin^2\theta.$

উদা. 2. প্রমাণ কর : $\cos A+\tan A\sin A=\sec A.$ [C.U. '50]

বামপক্ষ $=\cos A+\frac{\sin A}{\cos A}\times\sin A=\cos A+\frac{\sin^2 A}{\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}=\sec A.$

উদা. 3, প্রমাণ কর : $\frac{1}{\cot A+\tan A}=\sin A\cos A.$ [C.U. '46]

বামপক্ষ $=\frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}}=\frac{1}{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}}=\frac{1}{\frac{1}{\sin A\cos A}}$

$=\sin A\cos A.$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta.$

বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\sec\theta-\tan\theta.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $1+\frac{\cot^2 A}{1+\operatorname{cosec} A}=\operatorname{cosec} A.$ [C.U. '47]

বামপক্ষ $=1+\frac{\operatorname{cosec}^2 A-1}{1+\operatorname{cosec} A}=1+\frac{(\operatorname{cosec} A+1)(\operatorname{cosec} A-1)}{\operatorname{cosec} A+1}$
$$=1+\operatorname{cosec} A-1=\operatorname{cosec} A.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর : $\cos^2 A-\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ [G.U. '50]

বামপক্ষ $=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$ $(\because \cos^2 A+\sin^2 A=1)$

$=\frac{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$ [লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করা হইল, ইহাতে মানের কোন পরিবর্তন হইবে না ;]

$=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

উদা. 7. প্রমাণ কর : $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}.$

বামপক্ষ $=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)+(\tan^2\theta-\sec^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

[$\because$ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$, $\therefore$ $-1=\tan^2\theta-\sec^2\theta$]

$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1+\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}=\tan\theta+\sec\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}.$

উদা. 8. $\sin A+\sin^2 A=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A+\cos^4 A=1.$ [E.B.S.B. '51]

$\because$ এখানে $\sin A+\sin^2 A=1$, $\therefore$ $\sin A=1-\sin^2 A=\cos^2 A$,

$\therefore$ $\sin^2 A=\cos^4 A.$

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^4 A=\cos^2 A+\sin^2 A=1.$

উদা. 9. $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A$, হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin A.$

$\because$ $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A\cdots(1)$

$\therefore$ $\cos^2 A+\sin^2 A+2\cos A\times\sin A=2\cos^2 A$ (বর্গ করিয়া),

বা, $\cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos A \sin A \cdots(2)$ (পক্ষান্তর করিয়া)

এখন $(2) \div (1)$ করিয়া $\cos A - \sin A = \dfrac{2 \cos A \sin A}{\sqrt{2} \cos A} = \sqrt{2} \sin A.$

উদা. 10. সরল কর : $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2 A}.$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 A}} = \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{\dfrac{\sin^2 A+1}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = 1.$$

উদা. 11. $x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$, এবং $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$, হইলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 1.$ [C. U. '37 : P.U. '43]

$\because \; x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, \quad \therefore \; x \sin \alpha = y \cos \alpha.$

$\therefore \; \dfrac{x}{\cos \alpha} = \dfrac{y}{\sin \alpha} = k$ (মনে কর), $\therefore \; x = k \cos \alpha, \; y = k \sin \alpha.$

এক্ষণে, $\because \; x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha,$

$\therefore \; k \cos \alpha \sin^3 \alpha + k \sin \alpha \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha,$

বা, $k \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha,$

বা, $k \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \quad [\because \; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1]$

$\therefore \; k = 1. \quad \therefore \; x = \cos \alpha$ এবং $y = \sin \alpha$

$\therefore \; x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

প্রশ্নমালা 2A

প্রমাণ কর :

1. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1.$
2. $\dfrac{1}{\sin A \cos A} = \tan A + \cot A.$ [E. B. S. B. '48]
3. $\cos^6 A + \sin^6 A + 3 \sin^2 A \cos^2 A = 1.$
4. $\sqrt{\dfrac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} = \text{cosec}\, \theta + \cot \theta.$ [C. U. '43]
5. $\tan^2 A \cot A + \cot^2 A \tan A = \sec A \,\text{cosec}\, A.$
6. $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta.$ [E. B. S. B. '50]
7. $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta.$
8. $\sec^4 A - 2 \tan^2 A = 1 + \tan^4 A.$
9. $\text{cosec}^4 \theta - \cot^4 \theta - 1 = 2 \cot^2 \theta,$

10. $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta)+\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=2.$ [C. U. '51]

11. $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$ [C. U. '40]

12. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta.$

13. $4\tan^2 A+3=3\sec^2 A+\tan^2 A.$

14. $1+\dfrac{\cos A}{\sec A}+\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}=2.$

14.(*a*). $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta.$ [G. U. '52]

15. $\operatorname{cosec}^2 A\cos^2 B-\cot^2 A\sin^2 B+\operatorname{cosec}^2 A\sin^2 B-\cot^2 A\cos^2 B=1.$

16. $\sqrt{\sec^2 A-1}=\sin A\sec A.$

17. $\dfrac{\tan\theta+\cot A}{\cot\theta+\tan A}=\cot A\tan\theta.$

18. $\dfrac{\sec^4\theta-2\sec^2\theta\tan^2\theta+\tan^4\theta}{\operatorname{cosec}^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta+\cot^4\theta}=1.$ [C. U. '42]

19. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A.$

20. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$ [C. U. '34]

21. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}=2\operatorname{cosec} A.$

22. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}.$ [C. U.]

23. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)=1.$

24. $(1+\tan\theta-\sec\theta)(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)=2.$

25. $\dfrac{1}{1+\cos^2 A}+\dfrac{1}{1+\sec^2 A}=1.$

26. $\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}.$ 27. $1+\dfrac{\tan^2\theta}{1+\sec\theta}=\sec\theta.$

28. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}.$

29. $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}+\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A.$

30. $\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$

31. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0.$

32. $\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}-1}+\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}+1}=2\sec^2 A.$ [W.B.S.F. '53]

সরল কর :—

33. $\frac{\sin A}{\text{cosec A}}+\frac{\cos A}{\sec A}+1.$ 34. $\frac{1-\tan\theta}{\cot\theta-1}-\frac{1+\tan\theta}{\cot\theta+1}.$

35. $\frac{\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A}{\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta}.$ [G. U. '49]

36. $\frac{1}{\text{cosec A}-\cot A}+\frac{1}{\text{cosec A}+\cot A}-\frac{2}{\sin A}.$

37. $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}+\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}.$

38. $\frac{\sec A-\sec B}{\tan B+\tan A}+\frac{\tan B-\tan A}{\sec A+\sec B}.$

39. $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$ হইলে দেখাও যে, $\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$ [C. U. '38]

40. প্রমাণ কর :—

$\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\text{cosec}\,\theta.$ [C.U. '35]

41. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta.$ [B. H. U. '46]

42. দেখাও যে, θ-র সকল মানে $6\sin^4\theta-4\sin^6\theta$ ও $6\cos^4\theta-4\cos^6\theta$ রাশিদ্বয়ের সমষ্টি একই হইবে।

§ 2·4. কোন প্রদত্ত কোণানুপাত হইতে অন্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় :

যেহেতু $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\therefore\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta.$

$$\therefore\ \cos\theta=+\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}};\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}};\ \text{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

বিকল্প পদ্ধতি : চিত্র 6-এ মনে কর $m\angle \text{MOP}=\theta$, $\text{OP}=1$ দৈর্ঘ্য একক এবং $\text{PM}=a$ দৈর্ঘ্য একক

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\text{PM}}{\text{OP}}=\frac{a}{1}=a.$$

$\because$ $OP^2 = PM^2 + OM^2$, $\therefore$ $OM^2 = OP^2 - PM^2$, $\therefore$ $OM = \sqrt{1-a^2}$

এক্ষণে, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$,

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}, \text{ ইত্যাদি।}$$

[দ্রষ্টব্য : যে অনুপাতে প্রকাশ করিতে হইবে তাহার মান যেন a একক হয় এরূপভাবে ত্রিভুজের বাহুগুলির মান ধরিবে ।]

(2) কোণানুপাতগুলিকে tangent-এ প্রকাশ কর ।

(চিত্র 6-এ) মনে কর, $PM = a$ এবং $OM = 1$, সুতরাং $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = a$.

$\because$ $OP^2 = OM^2 + PM^2$, $\therefore$ $OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{1+a^2}$.

এক্ষণে, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$.

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}; \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta};$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\tan^2\theta}; \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $\sin A = \frac{1}{3}$ হইলে, $\cos A$, $\tan A$ ও $\sec A$-র মান নির্ণয় কর ।

$$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{3}.$$

(চিত্র 6-এ) মনে কর, $PM = 1$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OP = 3$ দৈর্ঘ্য একক ।

$\therefore$ $OM^2 = OP^2 - PM^2 = 9 - 1 = 8$; $\therefore$ $OM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

এক্ষণে $\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A = \frac{PM}{OM} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

এবং $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

উদা. 2. $\cos x = \frac{2}{3}$ হইলে, $\tan x$, $\sec x$ এবং $\operatorname{cosec} x$-এর মান নির্ণয় কর । [D. B. '48]

(চিত্র 6-এ) মনে কর, $OM = 2$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OP = 3$ দৈর্ঘ্য একক ।

অতএব, $PM^2 = OP^2 - OM^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, $\therefore$ $PM = \sqrt{5}$.

এক্ষণে, $\tan x = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec x = \frac{OP}{OM} = \frac{3}{2}$;

এবং $\operatorname{cosec} x = \frac{OP}{PM} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

উদা. 3. একটি কোণের tangent $\frac{3}{4}$. কোণটির অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় কর।

এখানে $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{3}{4}$.

(চিত্র 6-এ) মনে কর, PM = 3 দৈর্ঘ্য একক এবং OM = 4 দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore\ OP^2 = PM^2 + OM^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad \therefore\ OP = 5.$

এক্ষণে, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{4}{5}$, $\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{4}{3}$,

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{5}{4} \text{ এবং } \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{5}{3}.$$

উদা. 4. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ হইলে, $\cot\theta$-র মান নির্ণয় কর।

এখানে $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{3}{5}$.

(চিত্র 6-এ) মনে কর, OM = 3 দৈর্ঘ্য একক এবং OP = 5 দৈর্ঘ্য একক।

$\because\ PM^2 + OM^2 = OP^2, \quad \therefore\ PM^2 = OP^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 16,$

$\therefore\ PM = 4. \quad \therefore\ \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{3}{4}.$

উদা. 5. কোন সূক্ষ্মকোণের cosine $\sqrt{1-a^2}$ হইলে উহার sine-এর মান নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে ঐ কোণটির cotangent-এর মান $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

মনে কর, কোণটি θ, সুতরাং $\cos\theta = \sqrt{1-a^2}$ (স্বীকার)।

$\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \therefore\ \sin^2\theta + (\sqrt{1-a^2})^2 = 1,$

বা, $\sin^2\theta + 1 - a^2 = 1$, বা, $\sin^2\theta = a^2$, $\therefore\ \sin\theta = a.$

অতএব, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$

উদা. 6. একটি কোণের tangent-এর মান c, প্রমাণ কর যে উহার sine-এর মান $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$. [C. U. '42]

মনে কর, প্রদত্ত কোণটি θ, সুতরাং $\tan\theta = c$.

(চিত্র 6-এ) মনে কর, PM = c দৈর্ঘ্য একক এবং OM = 1 দৈর্ঘ্য একক।

$\because\ OP^2 = PM^2 + OM^2 = c^2 + 1, \quad \therefore\ OP = \sqrt{1+c^2}.$

এক্ষণে, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$

[**অন্য প্রণালী**] $\therefore \tan\theta = c, \quad \therefore \cot\theta = \frac{1}{c}.$

এক্ষণে, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+1}{c^2},$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}, \quad \therefore \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$

উদা. 7. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

[উদা. 3-এর মত কর। মনে কর, PM $= \sqrt{3}$ দৈর্ঘ্য একক এবং OM $=1$ দৈর্ঘ্য একক।]

প্রশ্নমালা 2B

1. cosine দ্বারা অন্য কোণানুপাতগুলি প্রকাশ কর।
2. $\sin A = \frac{3}{5}$ হইলে, tan A এবং sec A-এর মান নির্ণয় কর।
3. $\cos A = \frac{12}{13}$ হইলে, cot A ও cosec A-এর মান নির্ণয় কর।
4. $\tan A = \frac{3}{4}$ হইলে, sin A এবং sec A-এর মান নির্ণয় কর।
5. $\cot A = \sqrt{7}$ হইলে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$-এর মান নির্ণয় কর।
6. $\sec A = \frac{61}{11}$ হইলে, tan A এবং cosec A-এর মান নির্ণয় কর।
7. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}.$
8. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{4}{3}.$
9. $\sec A = \frac{4}{3}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cot A = \frac{3}{\sqrt{7}}.$
10. $\cot A = \frac{x}{y}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$
11. $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$ হইলে, দেখাও যে $\tan A = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$
12. একটি সূক্ষ্মকোণের sine-এর মান x. প্রমাণ কর যে, কোণটির cosine $= \sqrt{1-x^2}$ এবং tangent $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$ [C. U. '41 ; E. B. S. B. '51]
13. একটি কোণের tangent-এর মান $\frac{4}{3}$; কোণটির অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান নির্ণয় কর। [E.B.S.B. '51]
14. $\cot A + \operatorname{cosec} A = 3.$ হইলে cos A-এর মান নির্ণয় কর।

15. $\tan A + \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ হইলে, sin A-এর মান নির্ণয় কর।

16. $\sin A = \frac{3}{5}$ এবং $\cos B = \frac{12}{13}$ হইলে, $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '58]

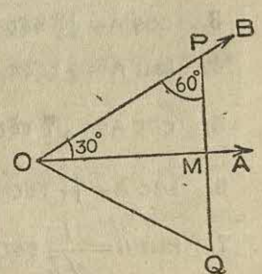
তৃতীয় অধ্যায়

কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত নির্ণয়

§ 3·1. 30° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, $m\angle AOB = 30°$ এবং $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{OA}$.

এখন $m\angle OPM = 60°$ হইল। PMকে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন MQ = PM হয়। QO যোগ কর।



চিত্র 7

POM ও QOM ত্রিভুজের
$PM \cong QM$, OM বাহু সাধারণ এবং
$\angle OMP \cong \angle OMQ$ (সমকোণ বলিয়া);

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $m\angle QOM = 30°$. $\therefore$ $m\angle POQ = 60°$.

$\because$ OPQ ত্রিভুজের $m\angle P$ ও $m\angle POQ$ প্রত্যেকটি 60°,

$\therefore$ $m\angle Q = 60°$, $\therefore$ OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ $PO = PQ = 2PM$. $\therefore$ $PM = \frac{1}{2}OP$.

আবার, $OM^2 = OP^2 - PM^2 = OP^2 - (\frac{1}{2}OP)^2 = OP^2 - \frac{1}{4}OP^2 = \frac{3}{4}OP^2$,

$\therefore$ $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OP$. $\therefore$ $\sin 30° = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \frac{1}{2}$;

সুতরাং $\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

$$\cos 30° = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

সুতরাং $\sec 30^\circ = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OP}{\frac{\sqrt{3}}{2}OP} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

সুতরাং $\cot 30^\circ = \dfrac{1}{\tan 30^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$.

§ 3·2. 60° **কোণের** কোণানুপাত নির্ণয়।

(চিত্র 7-এ) $m\angle OPM = 60^\circ$, উহার সম্পর্কে লম্ব $= OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OP$,

ভূমি $= PM = \frac{1}{2}OP$ এবং অতিভুজ $= OP$.

$\therefore\ \sin 60^\circ = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; সুতরাং $\operatorname{cosec} 60^\circ = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$\cos 60^\circ = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \dfrac{1}{2}$; সুতরাং $\sec 60^\circ = \dfrac{1}{\cos 60^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

$\tan 60^\circ = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{\frac{1}{2}OP} = \sqrt{3}$; সুতরাং $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

[**দ্রষ্টব্য** : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$
$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ$, $\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ$.]

§ 3·3. 45° **কোণের** কোণানুপাত নির্ণয়।

(চিত্র 6-এ) মনে কর, $m\angle AOB = 45^\circ$; $\overrightarrow{OB}$-স্থিত P বিন্দু হইতে $PM \perp \overrightarrow{AO}$ টানা হইল। সুতরাং $m\angle OMP = 90^\circ$.

$\therefore$ অবশিষ্ট $m\angle OPM = 45^\circ = m\angle AOB$.

$\therefore$ $OM = PM$. আবার, $OP^2 = OM^2 + PM^2 = 2PM^2 = 2MO^2$.

$\therefore$ $PM^2 = \frac{1}{2}OP^2$; $\therefore$ $PM = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OP$ এবং $OM = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OP$.

$\therefore\ \sin 45^\circ = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; সুতরাং $\operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

$\cos 45^\circ = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; সুতরাং $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$.

$\tan 45^\circ = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{OM}{OM} = 1$; সুতরাং $\cot 45^\circ = 1$.

30°, 45° ও 60° কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান মনে রাখিতে হইবে। নিম্নে তালিকা দেখ—

কোণ	30°	45°	60°
সাইন	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
কস	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
ট্যান	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

দ্রষ্টব্য : Sine ও cosine জানা থাকিলে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যায়। আবার দেখ, 30° ও 45° কোণের কেবল sine ও cosine জানা থাকিলে, তাহা হইতে তালিকার অন্যান্য কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। অতএব, ঐগুলি মুখস্থ রাখিবে। Sine-এর মান মনে রাখিবার কৌশল আছে। 1, 2 ও 3 লিখিয়া প্রত্যেকটিকে 4 দিয়া ভাগ করিয়া তারপর বর্গমূল নির্ণয় কর। এই বর্গমূলগুলিই অর্থাৎ $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$ ও $\sqrt{\frac{3}{4}}$ যথাক্রমে 30°, 45° ও 60° কোণের sine হইবে।]

§ 3·4. পূরক কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

চিত্র 6-এ P কোণটি θ কোণের পূরক কোণ।

আমরা পাই $\sin \angle P=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$. সুতরাং $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

অনুরূপে, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$,
$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$, $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$,
$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$.

উদাহরণমালা 3A

উদা. 1. দেখাও যে, $\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ=1$.

বামপক্ষ $=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$

উদা. 2. দেখাও যে, $\cos 60^\circ=1-2\sin^2 30^\circ$. [E.B.S.B. '49]

বামপক্ষ $=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$;

আবার, $1-2\sin^2 30^\circ=1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-2\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\ \cos 60^\circ=1-2\sin^2 30^\circ$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\sqrt{3}$. [C. U. '50]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}.$$

উদা. 4. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :
$\tan^2 30^\circ+2\sin 60^\circ+\sin 90^\circ-\tan 60^\circ+\cos^2 30^\circ$. [G.U. '48]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$=\tfrac{1}{3}+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{3}+1+\tfrac{3}{4}=\tfrac{25}{12}=2\tfrac{1}{12}.$$

উদা. 5. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :
$\sin^3 30^\circ+4\cot^2 45^\circ-\sec^2 60^\circ$. [C. U. '50]

প্রদত্ত রাশি $=(\frac{1}{2})^3+4.(1)^2-(2)^2=\frac{1}{8}+4-4=\frac{1}{8}$.

উদা. 6. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :
$\tan^2 45^\circ.\sin 60^\circ.\tan 30^\circ.\tan^2 60^\circ$. [C. U. '49]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=(1)^2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\ \frac{1}{\sqrt{3}}.\ (\sqrt{3})^2=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times 3=1\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 7. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :
$3\tan^2 45^\circ-\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\cot^2 30^\circ+\frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$. [C. U. '51]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=3.(1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2}(\sqrt{3})^2+\tfrac{1}{8}(\sqrt{2})^2$$
$$=3-\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}=1.$$

উদা. 8. দেখাও যে, $\sin 30^\circ\ \cos 45^\circ+\cos 30^\circ\ \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\text{ডানপক্ষ}$$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}}=\sec 60^\circ+\tan 60^\circ$.

[C. U. '42]

$$\text{বামপক্ষ}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}$$
$$=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}}=2+\sqrt{3}.$$

আবার, ডানপক্ষ $=\sec 60^\circ+\tan 60^\circ=2+\sqrt{3}$. $\therefore$ উভয়পক্ষ সমান।

উদা. 10. প্রমাণ কর : $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{6}.$$

এখানে কোণগুলির বৃত্তীয় মান দেওয়া আছে। π রেডিয়ান $=180°$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin 60°\cos 30°+\sin 30°\tan 45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1\tfrac{1}{4},$$

এবং ডানপক্ষ $=\sin 30°\cos 60°+2\sin 30°$

$$=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}+2\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}+1=1\tfrac{1}{4}.$$

$\therefore$ উভয়পক্ষ সমান।

উদা. 11. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1+2\sin 60°\cos 60°}{\sin 60°+\cos 60°}+\frac{1-2\sin 60°\cos 60°}{\sin 60°-\cos 60°}=2\cos 30°,$$

[C. U. '41]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1+2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{1-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3+2-\sqrt{3}}{3-1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

ডানপক্ষ $=2\cos 30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. $\therefore$ উভয়পক্ষ সমান।

উদা. 12. সরল কর : $\frac{2\tan^2 30°}{1-\tan^2 30°}+(\sec^2 45°-\cot^2 45°)$

$-(\sin^2 30°+\sin^2 60°)$ [G. U. '50]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\{(\sqrt{2})^2-(1)^2\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\{2-1\}-\{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}+1-1=1.$$

প্রশ্নমালা 3A

মান নির্ণয় কর :

1. $4 \sin^2 45° + \tan^2 60° + \operatorname{cosec}^2 30°$. [C. U. '40]

2. $\cot^2\frac{\pi}{4} + \sin^3\frac{\pi}{6} - \cos^3\frac{\pi}{3}$.

3. $4 \sin^2 30° + 2 \cos^2 45° - 3 \cos^2 60°$.

4. সরল কর : $\dfrac{2 \tan^2 45° - \cot^2 45°}{\sin^2 60° + \cos^2 30°} + \dfrac{2 \sin\frac{\pi}{6} - \cos^2 60°}{\frac{1}{4}\tan^2 30°}$.

প্রমাণ কর যে,

5. $\tan 30° \sin 60° + \tan 60° \cos 30° = 2$.

6. $\tan^2\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6} \tan^2\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$.

7. $\sin\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6} + 2 \cos^2\frac{\pi}{3} = 1$.

8. $\sqrt{\dfrac{1+\sin 30°}{1-\sin 30°}} = \sec 60° \sin 60°$.

9. $\dfrac{1+2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° + \cos 60°} + \dfrac{1-2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° - \cos 60°} = 2 \cos 30°$. [C. U. '41]

10. $\cot^2 30° - 2 \cos^2 60° - \frac{3}{4} \sec_2 45° - 2 \sin^2 30°$-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

11. $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1+\tan 60° \tan 30°} + \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '53]

§ 3·5. অপনয়ন (Elimination)

উদাহরণমালা 3B

উদা. 1. $x = a \sin A$, $y = b \cos A$ সমীকরণ দুইটি হইতে A অপনয়ন কর।

$\because x = a \sin A$, $\therefore \frac{x}{a} = \sin A$; এবং $\because y = b \cos A$, $\therefore \frac{y}{b} = \cos A$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 A + \cos^2 A = 1$. $\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক অর্থাৎ A-বর্জিত সমীকরণ।

উদা. 2. $x=a\sin B,\ y=\dfrac{a}{\sec B}$ হইতে B অপনয়ন কর।

$\because\ x=a\sin B,\quad \therefore\ \dfrac{x}{a}=\sin B.$

আবার, $\because\ y=\dfrac{a}{\sec B},\quad \therefore\ y=a\times\dfrac{1}{\sec B}=a\cos B,$

$\therefore\ \dfrac{y}{a}=\cos B,$

এক্ষণে, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\sin^2 B+\cos^2 B=1.$

$\therefore\ x^2+y^2=a^2$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 3. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$ [G. U. '51]

$\because\ x=a\sec\theta,\quad \therefore\ \dfrac{x}{a}=\sec\theta,\quad \therefore\ \dfrac{x^2}{a^2}=\sec^2\theta\ ;$

$\because\ y=b\tan\theta,\quad \therefore\ \dfrac{y}{b}=\tan\theta,\quad \therefore\ \dfrac{y^2}{b^2}=\tan^2\theta\ ;$

এক্ষণে, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1.\quad \therefore\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

উদা. 4. $\sin\theta+\cos\theta=a$ এবং $\tan\theta+\cot\theta=b$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $b(a^2-1)=2.$

$\tan\theta+\cot\theta=b$, বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=b$, বা, $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=b,$

বা, $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=b,\quad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{b}\cdots(1)$

আবার, $\because\ \sin\theta+\cos\theta=a,\ \therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=a^2,$

বা, $1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$, বা, $2\sin\theta\cos\theta=a^2-1\cdots(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে পাই $2\times\dfrac{1}{b}=a^2-1,$

বা, $\dfrac{2}{b}=a^2-1,\quad \therefore\ b(a^2-1)=2.$

উদা. 5. $\sin A+\cos A=m$ এবং $\sec A+\operatorname{cosec} A=n$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $n(m^2-1)=2m.$ [B. U.]

$n(m^2-1)=(\sec A+\operatorname{cosec} A)\{(\sin A+\cos A)^2-1\}$

$=\left(\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}\right)(\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A-1)$

$$=\left(\frac{\sin A+\cos A}{\cos A \sin A}\right)(1+2 \sin A \cos A-1)$$

$$=\frac{m}{\sin A \cos A}\times 2 \sin A \cos A=2m.$$

উদা. 6. $\tan A+\sin A=m$, এবং $\tan A-\sin A=n$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$. [H. S. '64 ; C. U. '14]

এখানে $m+n=\tan A+\sin A+\tan A-\sin A=2 \tan A$.

এবং $m-n=2 \sin A$.

আবার, $mn=(\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)=\tan^2 A-\sin^2 A$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\sin^2 A\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)=\sin^2 A\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\sin^2 A\times\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A \tan^2 A, \quad \therefore \quad \sqrt{mn}=\sin A \tan A$$

এক্ষণে $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$

$$=2 \tan A.\ 2 \sin A=4 \tan A \sin A=4\sqrt{mn}.$$

উদা. 7. $\sin A=m$ এবং $\tan A=n$, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}=1$.

এখানে $\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{m}$ এবং $\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{n}$,

$\therefore \quad \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{1}{m^2}$ এবং $\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{n^2}$.

$\therefore \quad \frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$, বা, $\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$

বা, $1+\cot^2 A-\cot^2 A=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$, $\therefore \quad \frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}=1$.

প্রশ্নমালা 3B

নিম্নের সমীকরণগুলি হইতে θ অপনয়ন কর :

1. $x=b \cos \theta, y=b \sin \theta$.
2. $x=a(\sec \theta+\tan \theta), y=a(\sec \theta-\tan \theta)$.
3. $a=b(\operatorname{cosec} \theta+\cot \theta), c=b(\operatorname{cosec} \theta-\cot \theta)$.
4. $x=a \tan \theta, y=b \cot \theta$.
5. $\sin A=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$ হইলে দেখাও যে, $n \cos A=m \sin A$.

6. $\cos\theta = p$ এবং $\cot\theta = q$ হইলে দেখাও যে, $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} = 1.$

7. $\cos\theta = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ হইলে দেখাও যে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{p}{q}.$

[**সংকেত** :—প্রথমে $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ হইতে $\cos\theta$-র মান বসাইয়া $\sin\theta$-র মান নির্ণয় কর। $\sin\theta = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ হইবে। তারপর $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ ধর।…]

8. $\sin\theta - \cos\theta = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \cos\theta = \pm 1.$

9. $\sin\theta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sec\theta + \tan\theta = \frac{m+n}{m-n}.$

10. $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$ [C.U. '37]

---

§ 3.6. বিবিধ সমীকরণের সমাধান।

উদা. 1. সমাধান কর : $2\cos\theta = \sec\theta.$

$2\cos\theta = \sec\theta$, বা, $2\cos\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, বা, $2\cos^2\theta = 1$, বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$,

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; কিন্তু $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore \cos\theta = \cos 45^\circ.$

$\therefore \theta = 45^\circ.$

উদা. 2. $2\sin A = 2 - \cos A$ হইলে, $\sin A$-এর মান নির্ণয় কর।

$2\sin A = 2 - \cos A$,

বা, $2\sin A - 2 = -\cos A$, বা, $(2\sin A - 2)^2 = (-\cos A)^2.$

বা, $4\sin^2 A - 8\sin A + 4 = \cos^2 A = 1 - \sin^2 A.$

বা, $5\sin^2 A - 8\sin A + 3 = 0$,

বা, $5\sin^2 A - 5\sin A - 3\sin A + 3 = 0$,

বা, $(\sin A - 1)(5\sin A - 3) = 0$, $\therefore \sin A = 1$, বা $\frac{3}{5}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\cos 12A = \sin 6A$,

কোন কোণের sine তাহার পূরক কোণের cosine-এর সমান হয়।

$\therefore \cos 12A = \sin 6A = \cos(90^\circ - 6A)$

$\therefore 12A = 90^\circ - 6A$, বা, $18A = 90^\circ$, $\therefore A = 5^\circ.$

উদা. 4. $r\cos\theta=2\sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta=2$ হইলে, r এবং θ-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '45 ; G. U. '49]

$\because$ $r\cos\theta=2\sqrt{3}\cdots(1)$ এবং $r\sin\theta=2\cdots(2)$

$\therefore$ (1)÷(2) করিয়া পাই $\dfrac{r\cos\theta}{r\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$, বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}$,

বা, $\cot\theta=\sqrt{3}=\cot 30°$. $\therefore$ $\theta=30°$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $r\cos 30°=2\sqrt{3}$, বা, $r.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore$ $r=\dfrac{2\sqrt{3}\times 2}{\sqrt{3}}=4$. অতএব, $r=4$ এবং $\theta=30°$.

উদা. 5. $\tan^2 45°-\cos^2 60°=x\sin 45°\cos 45°\tan 60°$ হইলে, x-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $(1)^2-(\frac{1}{2})^2=x.\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{3}$,

বা, $1-\frac{1}{4}=x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, বা, $\dfrac{3}{4}=x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ $x=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

উদা. 6. সমাধান কর : $\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা পাই $\dfrac{2\sin A}{2\cos A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$, বা, $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\sqrt{3}$,

বা, $\tan A=\sqrt{3}=\tan 60°$, $\therefore$ $A=60°$.

উদা. 9. $1+\sin^2 A=3\sin A\cos A$ হইলে $\tan A$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '50]

$1+\sin^2 A=3\sin A\cos A$,

বা, $\cos^2 A+\sin^2 A+\sin^2 A=3\sin A\cos A$.

বা, $\cos^2 A-3\sin A\cos A+2\sin^2 A=0$,

বা, $\cos^2 A-2\sin A\cos A-\sin A\cos A+2\sin^2 A=0$,

বা, $(\cos A-2\sin A)(\cos A-\sin A)=0$,

$\therefore$ $\cos A-2\sin A=0\cdots(1)$, অথবা, $\cos A-\sin A=0\cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $\cos A=2\sin A$,

বা, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ (উভয় পক্ষকে $2\cos A$ দ্বারা ভাগ করিয়া), $\therefore$ $\tan A=\frac{1}{2}$.

(2) হইতে পাই $\cos A = \sin A$, বা, $1 = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$.

$\therefore \tan A = 1$, বা, $\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 3C

সমাধান কর (θ সূক্ষ্মকোণ):

1. $3 \tan\theta = \cot\theta$.
2. $4 \cos A = \sec A$.
3. $\tan A + \cot A = \frac{4}{\sqrt{3}}$.
4. $\sin A + \cos A = 1$.
5. $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$.
6. $2 \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$.
7. $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
8. $\cot 5\theta = \tan 10\theta$.
9. $\sin 10\theta = \cos 8\theta$.
10. $\tan A + \cot A - 2 = 0$ হইলে, $\sin A$-এর মান নির্ণয় কর।
11. $x \tan\theta = \sqrt{3}$ এবং $x \cot\theta = 3\sqrt{3}$ হইলে, x এবং θ-র মান নির্ণয় কর।
12. $p \sin\theta = \sqrt{3}$ এবং $p \cos\theta = 1$ হইলে p এবং θ-র মান নির্ণয় কর।
13. $x \sin 30^\circ \tan 60^\circ \cos 30^\circ = \sin^2 60^\circ - \sec^2 45^\circ$ হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।
14. $\cot^2 \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\pi}{3} = x \cot \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$ হইলে, x-এর মান নির্ণয় কর।
15. $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$ হইলে প্রমাণ কর যে $\cot\theta = \sqrt{3}$. [C. U. '51]
16. সমাধান কর: $\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.
17. সমাধান কর: $\sec A + \tan A = \sqrt{3}$.

চতুর্থ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতির ব্যবহারিক প্রয়োগ

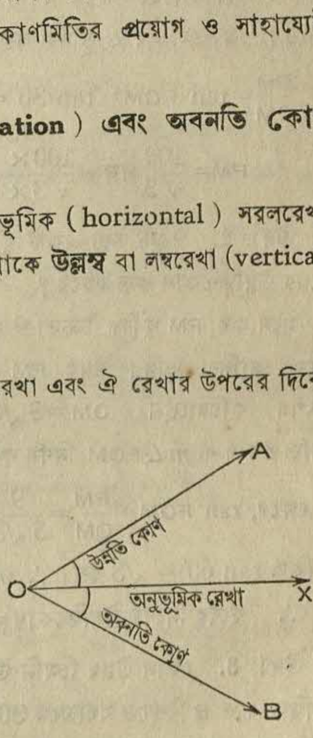
উচ্চতা ও দূরত্ব (Height and distance)

§ 4·1. দুর্গম গিরিশৃঙ্গের উচ্চতা, দুস্তর বিশাল নদীর বিস্তার এবং চন্দ্র, সূর্য, নক্ষত্রাদির দূরত্ব প্রভৃতি নির্ণয় ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ ও সাহায্যেই হইয়া থাকে।

উন্নতি কোণ (Angle of elevation) এবং অবনতি কোণ (Angle of depression) :

ভূমিতলের সমান্তরাল সরলরেখাকে অনুভূমিক (horizontal) সরলরেখা এবং উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব** বা লম্বরেখা (vertical line) বলে।

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ একটি অনুভূমিক সরলরেখা এবং ঐ রেখার উপরের দিকে A বিন্দু এবং নীচের দিকে B বিন্দু অবস্থিত। যদি কোন ব্যক্তি O বিন্দুতে তাহার চক্ষু নিবদ্ধ রাখিয়া A ও B বিন্দুর প্রতি দৃষ্টিপাত করে, তবে XOA কোণটিকে A বিন্দুর **উন্নতি কোণ** বা কৌণিক উন্নতি এবং XOB কোণটিকে B বিন্দুর **অবনতি কোণ** বা কৌণিক অবনতি বলে।

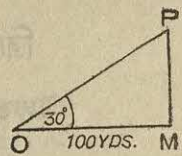


চিত্র 8

এখানে মনে রাখিবে যে, পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থান-বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত বা কল্পিত অনুভূমিক রেখার উপর দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক উন্নতি বলে এবং ঐ রেখার নীচের দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক অবনতি বলে।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. মনে কর, PM একটি পাহাড় এবং উহার তলদেশ হইতে 100 গজ দূরে O বিন্দুতে ঐ পাহাড়ের চূড়া P বিন্দুর উন্নতি-কোণ 30°, ঐ পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 9

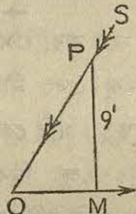
এখানে PM উচ্চতা, OM = 100 গজ এবং $m\angle$ POM = 30°, অর্থাৎ POM সমকোণী ত্রিভুজটির ভূমি দেওয়া আছে, লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব, লম্ব ও ভূমির অনুপাত হইতে উহা নির্ণয় করা যাইবে।

$$\frac{PM}{OM} = \tan POM = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \therefore \frac{PM}{100 \text{ গজ}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore PM = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ গজ} = 57{\cdot}7 \text{ গজ।}$$

উদা. 2. 9 ফুট উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ ফুট হইলে তখন সূর্যের উন্নতি-কোণ কত হইবে? [C. U. 1956]

মনে কর, PM খুঁটির উচ্চতা 9 ফুট, S সূর্যের অবস্থান এবং সূর্যরশ্মি PO-র দিকে আসিয়া ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM উৎপন্ন করিয়াছে। OM = $3\sqrt{3}$ ফুট। সূর্যের উন্নতি-কোণ বা $m\angle$POM নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 10

এক্ষণে, $\tan POM = \frac{PM}{OM} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$,

কিন্তু $\tan 60° = \sqrt{3}$ হয়। $\therefore m\angle POM = 60°$.

$\therefore$ সূর্যের নির্ণেয় উন্নতিকোণ = 60°.

উদা. 3. কোন উল্লম্ব চিমনি উহার অনুভূমিক সরলরেখায় একই দিকে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 30° ও 60° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে। AB = 100 ফুট হইলে চিমনির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. '40]

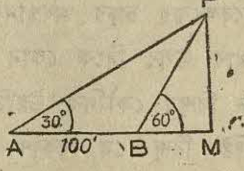
মনে কর, চিমনির উচ্চতা PM,

$\angle PAM = 30°$,

$\angle PBM = 60°$ এবং AB = 100 ফুট।

এক্ষণে, $\frac{AM}{PM} = \cot 30° = \sqrt{3} \cdots (1)$

এবং $\frac{BM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots (2)$



চিত্র 11

$\therefore$ (1)−(2) করিয়া পাই $\frac{AM-BM}{PM}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3-1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

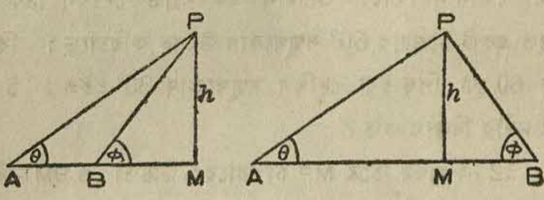
বা, $\frac{100 \text{ ফু.}}{PM}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $2PM=100\sqrt{3}$ ফু. $\therefore$ $PM=50\sqrt{3}$ ফু.

$\therefore$ চিমনির নির্ণেয় উচ্চতা $=50\sqrt{3}$ ফুট $=86·6$ ফুট।

উদা 4. একই অনুভূমিক সরলরেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে কোন স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ যথাক্রমে θ ও ϕ, এবং স্তম্ভের উচ্চতা h হইলে ঐ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত? [C. U. '42]

যে বিন্দুদ্বয় হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ দেখা যাইতেছে, তাহারা স্তম্ভের একই পার্শ্বে অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিতে পারে। মনে কর, PM স্তম্ভের উচ্চতা h এবং প্রথম চিত্রে উহার একই পার্শ্বস্থিত এবং দ্বিতীয় চিত্রে উহার দুই পার্শ্বস্থিত A ও B বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি-কোণ যথাক্রমে θ ও ϕ. AB-র দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

উভয় চিত্রে $\frac{AM}{PM}=\cot\theta\cdots\cdots(1)$ এবং $\frac{BM}{PM}=\cot\phi\cdots\cdots(2)$



চিত্র 12

প্রথম পক্ষে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $\frac{AM-BM}{PM}=\cot\theta-\cot\phi$,

বা, $\frac{AB}{h}=\cot\theta-\cot\phi$, $\therefore$ $AB=h(\cot\theta-\cot\phi)$.

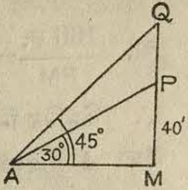
দ্বিতীয় পক্ষে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $\frac{AM+BM}{PM}=\cot\theta+\cot\phi$,

বা, $\frac{AB}{h}=\cot\theta+\cot\phi$, $\therefore$ $AB=h(\cot\theta+\cot\phi)$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=h(\cot\theta-\cot\phi)$ বা $h(\cot\theta+\cot\phi)$.

উদা. 5. 40 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের উপর একটি খুঁটি আছে। স্তম্ভের পাদদেশের সহিত অনুভূমিক সরলরেখায় দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি ঐ স্তম্ভের ও

খুঁটির শীর্ষদ্বয়ের উন্নতি-কোণ যথাক্রমে 30° ও 45° দেখিল। খুঁটির দৈর্ঘ্য এবং স্তম্ভ হইতে লোকটির দূরত্ব নির্ণয় কর।



চিত্র 13

মনে কর, PM স্তম্ভের উপর PQ খুঁটি অবস্থিত এবং A বিন্দু হইতে P ও Q বিন্দুর উন্নতি-কোণদ্বয় $m\angle PAM=30^\circ$ এবং $m\angle QAM=45^\circ$.

PM=40 ফুট।

PQ ও AM নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে, $\frac{QM}{AM}=\tan 45^\circ=1$, $\therefore$ QM=AM.

আবার, $\frac{PM}{AM}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{40 \text{ ফু.}}{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ AM=$40\sqrt{3}$ ফু.

$\therefore$ PQ=QM−PM=AM−PM=$(40\sqrt{3}-40)$ ফু.
$=40(\sqrt{3}-1)$ ফু.$=40(1{\cdot}732-1)$ ফু.$=29{\cdot}28$. ফু.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব$=40\sqrt{3}$ ফুট$=69{\cdot}28$ ফুট, এবং খুঁটির দৈর্ঘ্য$=29{\cdot}28$ ফুট।

উদা. 6. কোন নদীতীরে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি দেখিল ঠিক বিপরীত তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ার 60° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে; কিন্তু সে ঐ স্থান হইতে 60 ফুট পিছাইয়া দেখিল সম্মুখকোণ 30° হইল। টাওয়ারটির উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার কত?

মনে কর, 12 নং প্রথম চিত্রে MP টাওয়ারের উচ্চতা ও BM নদীর প্রস্থ; অতএব, $m\angle PBM=60^\circ$; লোকটি B বিন্দু হইতে সরিয়া 60 ফুট পিছনে A বিন্দু হইতে দেখিল $m\angle PAM=30^\circ$.

এক্ষণে, $\frac{AM}{PM}=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$, এবং $\frac{BM}{PM}=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $\frac{AM-BM}{PM}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{60 \text{ ফু.}}{PM}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

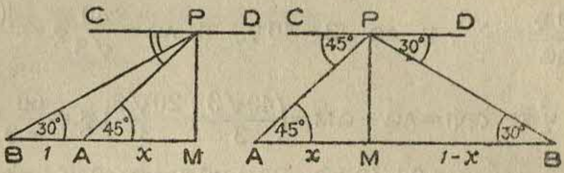
$\therefore$ PM$=30\sqrt{3}$ ফু. $\therefore$ নির্ণেয় টাওয়ারের উচ্চতা$=30\sqrt{3}$ ফুট
$=30\times 1{\cdot}732$ ফুট$=51{\cdot}96$ ফুট।

আবার, $\frac{BM}{PM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ BM$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times$PM$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 30\sqrt{3}$ফু.$=30$ফু.।

অতএব, নদীর নির্ণেয় বিস্তার=30 ফুট।

উদা. 7. কোন ঋজু পথ হইতে সোজা উচ্চে অবস্থিত কোন এরোপ্লেন হইতে ঐ পথের উপর পর পর দুইটি মাইল ফলকের অবনতি কোণ 45° ও 30° দেখা গেল। পথ হইতে প্লেনটির উচ্চতা কত? [C. U. '41; G. U. '49]

মনে কর, উভয় চিত্রে A ও B দুইটি মাইল-পোস্ট এবং P বিন্দু এরোপ্লেনের অবস্থান, সুতরাং লম্ব PM উহার উচ্চতা। এখানে $m\angle PAM=45^\circ$,



চিত্র 14

$m\angle PBM=30^\circ$ এবং $AB=1$ মাইল। মনে কর, $AM=x$ মাইল, সুতরাং প্রথম চিত্রে $BM=(1+x)$ মাইল এবং দ্বিতীয় চিত্রে $BM=(1-x)$ মাইল।

এক্ষণে, $\frac{PM}{AM}=\tan 45^\circ=1$, বা, $\frac{PM}{x}=1$. $\therefore$ $PM=x$.

প্রথম চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $x\sqrt{3}=1+x$,

বা, $x\sqrt{3}-x=1$, বা, $x(\sqrt{3}-1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1{\cdot}37$ (আসন্ন)।

দ্বিতীয় চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $x\sqrt{3}=1-x$,

বা, $x\sqrt{3}+x=1$, বা, $x(\sqrt{3}+1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}={\cdot}37$ (আসন্ন)।

$\therefore$ এরোপ্লেনের নির্ণেয় উচ্চতা $=1{\cdot}37$ মাইল, বা, ·37 মাইল।

উদা. 8. একটি লম্ব উচ্চ খুঁটি একস্থানে ভাঙ্গিয়া গেলে ভগ্ন খণ্ডের একপ্রান্ত অবশিষ্ট খুঁটির শীর্ষে বাঁধা হইল এবং অপর প্রান্তটি খুঁটির পাদদেশ হইতে 20 ফুট দূরে ভূমির উপর পড়িল। ভগ্নখণ্ডটি যদি ভূমির সহিত 30° কোণে নত থাকে, তবে প্রথমে খুঁটিটি কত উচ্চ ছিল? [E. B. S. B. '49]

মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ অর্থাৎ P বিন্দু ভূমির উপর A বিন্দুতে পড়িয়াছে। সুতরাং $AM=20$ ফুট, $m\angle QAM=30^\circ$,

এবং $PM=AQ+QM$ হইল।

এক্ষণে, $\frac{QM}{AM}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{QM}{20 \text{ ফু.}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $QM=\frac{20 \text{ ফু.}}{\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ফু.



চিত্র 15

আবার, $\frac{AM}{AQ} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

বা, $\frac{20 \text{ ফু.}}{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, বা, $AQ\sqrt{3} = 40$ ফু., বা, $AQ = \frac{40}{\sqrt{3}}$ ফু. $= \frac{40\sqrt{3}}{3}$ ফু,

$\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য $= AQ + QM = \left(\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$ ফু. $= \frac{60\sqrt{3}}{3}$ ফুট

$= 20\sqrt{3}$ ফুট $= 20 \times 1{\cdot}732$ ফুট $= 34{\cdot}64$ ফুট।

উদা. 9. 150 ফুট উচ্চ একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি-কোণ যথাক্রমে 30° ও 60°; স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, PM পাহাড়টি 150 ফুট এবং AB স্তম্ভটি x ফুট উচ্চ। $\overrightarrow{PC} \parallel \overrightarrow{MA}$ টানা হইল, $\overrightarrow{AB}$-র বর্ধিত অংশ যেন $\overrightarrow{PC}$কে C বিন্দুতে ছেদ করিল, সুতরাং $m\angle CPB = 30°$ ও $m\angle CPA = 60°$ হইল।

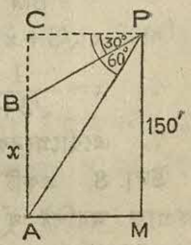
সুতরাং $BC = AC - AB = PM - AB = 150 - x$ হইল।

এক্ষণে $m\angle PAM = m\angle APC = 60°$,

$\therefore \frac{AM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore AM = \frac{PM}{\sqrt{3}} = \frac{150 \text{ ফু.}}{\sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3} \text{ ফু.}}{3}$

$= 50\sqrt{3}$ ফু.



চিত্র 16

আবার, $\frac{BC}{AM} = \frac{BC}{PC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $\frac{(150 - x) \text{ ফু.}}{50\sqrt{3} \text{ ফু.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because$ AM $= 50\sqrt{3}$ ফু.], বা, $150 - x = 50$,

$\therefore x = 100$. $\therefore$ স্তম্ভের নির্ণেয় উচ্চতা $= 100$ ফুট।

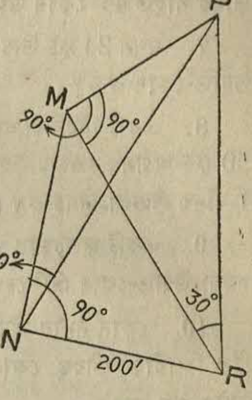
উদা. 10. এক ব্যক্তি একটি স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে কোন বিন্দু হইতে দেখিল স্তম্ভটির উন্নতি-কোণ 60°; সে তখন অনুভূমিক তলে ঠিক পূর্ব দিকে 200 ফুট গিয়া দেখিল যে উহার উন্নতিকোণ 30°; ঐ স্তম্ভের উচ্চতা কত?

চিত্রে PM স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে N বিন্দু হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ 60°, লোকটি N বিন্দু হইতে ঠিক পূর্বদিকে 200 ফুট গিয়া R বিন্দু হইতে দেখিল

উন্নতি-কোণ 30° ; সুতরাং এখানে $m\angle MNP = 60°$, $m\angle MRP = 30°$.

$m\angle MNR = 90°$, $m\angle PMR = 90°$,

$m\angle PMN = 90°$. এক্ষণে PMN ত্রিভুজের ভূমি MN এবং PM লম্ব,



চিত্র 17

$\therefore \quad \frac{PM}{MN} = \tan 60° = = \sqrt{3},$

$\therefore \quad MN = \frac{PM}{\sqrt{3}}.$

আবার, $\frac{PM}{MR} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$\therefore \quad MR = PM\sqrt{3}.$

আবার, $\angle MNR$ সমকোণ-বলিয়া

$$MR^2 = MN^2 + NR^2,$$

বা, $(PM\sqrt{3})^2 = \left(\frac{PM}{\sqrt{3}}\right)^2 + 200^2$, বা, $3PM^2 = \frac{PM^2}{3} + 200^2$

বা, $8PM^2 = 3 \times 200^2$, বা, $PM^2 = \frac{3 \times 200^2}{8}$.

$\therefore \quad PM = \frac{\sqrt{3} \times 200 \text{ ফু.}}{2\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3} \text{ ফু.}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{6} \text{ ফু.}}{2} = 50\sqrt{6}$ ফু.

$= 50$ ফু. $\times 2{\cdot}44949\cdots = 122{\cdot}47\cdots$ ফু.

$\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $= 122{\cdot}47$ ফুট (আসন্ন)।

প্রশ্নমালা 4

1. একটি টাওয়ার উহার পাদদেশ হইতে 300 ফুট দূরে 30° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে। উহার উচ্চতা কত ?

2. কোন মনুমেণ্টের পাদমূল হইতে 150 গজ দূরে উহার শীর্ষের উন্নতি-কোণ 60° ; উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

3. কোন চিমনির অনুভূমিক সমতলে কোন স্থান হইতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° দেখা যায়। উহার উচ্চতা 60 ফুট হইলে ঐ স্থানের দূরত্ব কত ?

4. যখন সূর্যের উন্নতি-কোণ 30°, তখন লম্বভাবে অবস্থিত 6 ফুট উচ্চ একটি যষ্টির অনুভূমিক সমতলের উপর ছায়ার দৈর্ঘ্য কত হইবে ? [C. U. 50]

5. যখন সূর্যের উন্নতি-কোণ 60°, তখন একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ ফুট। খুঁটিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

6. 30 ফুট দীর্ঘ একখানি মই একটি দেওয়ালের মাথায় পৌঁছিয়াছে ও ভূমির সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত ?

7. যখন 24 ফুট উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য 24 $\sqrt{3}$ ফুট, তখন সূর্যের উন্নতি-কোণ কত ?

8. একটি চিমনির অনুভূমিক সরলরেখায় কোন স্থান হইতে উহার দিকে 50 ফুট অগ্রসর হওয়ায় উহার শীর্ষের উন্নতি-কোণ 30° হইতে 45° হইল। চিমনির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. '51]

9. একটি স্তম্ভচূড়ার উন্নতি-কোণ 30° এবং উহার দিকে 20 ফুট অগ্রসর হইয়া উন্নতি-কোণ 60° দেখা গেল। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ? [G. U. '58]

10. কোন নদীর তীরে 45 ফুট উচ্চ একটি বৃক্ষ আছে। উহার সোজা ঠিক বিপরীত তীরস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃক্ষশীর্ষের উন্নতি-কোণ 60° হইলে নদীর প্রস্থ কত ?

11. একটি টাওয়ারের দিকে 60 ফুট অগ্রসর হওয়ায় উহার চূড়ার উন্নতি-কোণ 45° হইতে 60°-তে পরিণত হইল। টাওয়ারটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [E.B.S.B. '48]

12. PQR ত্রিভুজে বর্ধিত $\overrightarrow{QR}$-এর উপর P বিন্দুর অভিক্ষেপ S ; যদি $m\angle PQR=30^\circ$, $m\angle PRS=45^\circ$ এবং QR = 2 ফুট হয়, তবে RS-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. 51]

13. যখন সূর্যের উন্নতি-কোণ 60° তখন সমতল ক্ষেত্রের উপর অবস্থিত কোন টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা সূর্যের উন্নতি-কোণ 45° হইলে ঐ ছায়ার দৈর্ঘ্য 40 ফুট বেশী হয়। টাওয়ারটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. '50 ; D. B. '51]

14. দুইটি স্তম্ভের অনুভূমিক দূরত্ব 60 ফুট এবং দ্বিতীয়টি 200 ফুট উচ্চ। উহার চূড়া হইতে দেখিলে প্রথম স্তম্ভের চূড়ার অবনতি-কোণ 30° দেখা যায়। প্রথম স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

15. 120 ফুট উচ্চ কোন উল্লম্ব খুঁটি কিছু উপরে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উপরের অংশ সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হইয়া ভূমির সহিত 30° কোণে মিলিত হইল। উহা কতটা উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল ? [C. U. '50]

16. একটি ভগ্ন বৃক্ষের উপরের অংশ বৃক্ষমূল হইতে 10 ফুট দূরে ভূমিতে স্পর্শ করিয়া 60° কোণ উৎপন্ন করিল। বৃক্ষটি মোট কত উচ্চ ছিল ?

17. কোন স্মৃতিস্তম্ভের সহিত অনুভূমিক সরলরেখার উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুইটি হইতে উহার চূড়ার উন্নতি-কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। যদি PQ = 80 ফুট হয়, তবে স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. '45 ; G. U. '52 ; E.B.S.B. '50]

18. একটি অসমাপ্ত স্তম্ভের ভূমি হইতে 150 ফুট দূরবর্তী কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতি-কোণ 30° ছিল। স্তম্ভটিকে আর কতটা উঁচু করিলে ঐ বিন্দুতে চূড়ার উন্নতি-কোণ 45° হইবে?

19. একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য ও উহার উচ্চতার অনুপাত যখন $\sqrt{3} : 1$, তখন সূর্যের উন্নতিকোণের পরিমাণ কত?

20. নদীতীরে দণ্ডায়মান একব্যক্তি দেখিল সেস্থানে ঠিক বিপরীত তীরস্থ একটি খুঁটির সম্মুখ কোণ 60°; কিন্তু সে তীর হইতে 100 ফুট পিছনে সরিয়া গিয়া দেখিল সেস্থানে ঐ কোণ 30° হইল। খুঁটিটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার কত?

21. 300 ফুট উচ্চ একটি পাহাড় হইতে কোন স্তম্ভের চূড়ার ও পাদদেশের অবনতি-কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

22. কোন ঋজুপথের ঠিক সোজা উপরে অবস্থিত একটি বাষ্পীয় যান হইতে দুইটি পর পর মাইল-ফলকের অবনতি-কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। ঐ পথ হইতে বাষ্পীয় যানটি কত উচ্চে ছিল?

23. একটি ঋজু নদীর AB তীরের A বিন্দুতে অবস্থিত এক ব্যক্তি দেখিল যে, নদীর বিপরীত তীরস্থ C বিন্দু হইতে A বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা AB-র সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সে তীর বরাবর 200 গজ দূরে B বিন্দুতে গিয়া দেখিল AB-র সহিত BC, 60° কোণ করিয়াছে। নদীটির প্রস্থ কত? [C. U. '44]

24. 40 ফুট প্রশস্ত কোন পথের দুই পার্শ্বে সমান উচ্চ দুইটি খুঁটি আছে। উভয়ের মধ্যে পথের উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে খুঁটি দুইটির শীর্ষের উন্নতি-কোণ 60° ও 30° হইলে, উহাদের উচ্চতা ও বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

25. কোন টাওয়ারের চূড়ার উন্নতি-কোণ সোজা পূর্বদিকে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে 60°, সোজা উত্তরে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে 45° দেখা গেল। ঐ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব 200 গজ হইলে টাওয়ারের উচ্চতা কত?

26. সূর্যের উন্নতি-কোণ যখন 45° তখন সমতলে অবস্থিত কোন টাওয়ারের ছায়ার যে দৈর্ঘ্য, ঐ উন্নতি-কোণ 30° হইলে দৈর্ঘ্যটি তদপেক্ষা 60 ফুট অধিক হয়। ঐ টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [W.B.S.F. '52]

27. একটি বৃক্ষশীর্ষ হইতে ভূমিতলের উপর অবস্থিত কোন বস্তুর অবনতি-কোণ 60° এবং ঐ শীর্ষ হইতে 20 ফুট নীচে নামিয়া ঐ অবনতি-কোণ 30° দেখা গেল। ঐ বৃক্ষের উচ্চতা কত? [U. U. '52]

যে কোন কোণের কোণানুপাত

(Trigonometrical Ratios of any angle)

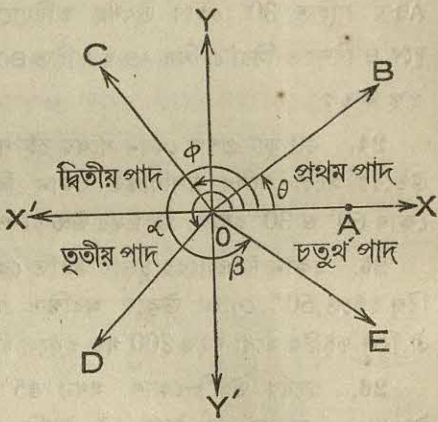
§ 5·1. কোন প্রদত্ত পরিমাপের কোণের আদর্শ অবস্থান

তোমরা মাধ্যমিকস্তরে কোন সমতলের অক্ষদ্বয় (x-অক্ষ বা ভুজাক্ষ এবং y-অক্ষ বা কোটি-অক্ষ) সম্বন্ধে শিখিয়াছ। উচ্চ-মাধ্যমিক পাঠক্রমে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতেও অক্ষদ্বয় ও বিন্দুর স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে।

মনে কর, $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে। $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু মনে কর। $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OX'}$ যথাক্রমে x-অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিক এবং $\overrightarrow{OY}$ ও $\overrightarrow{OY'}$ যথাক্রমে y-অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিক।

কোন প্রদত্ত পরিমাপের কোণের শীর্ষবিন্দু মূল বিন্দু হইলে এবং প্রারম্ভিক রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে সমাপতিত হইলে, বলা হয় যে ঐ পরিমাপের কোণটি **আদর্শ অবস্থানে** আছে।

যদি উৎপাদক রেখা প্রথম পাদে (অর্থাৎ $\angle$XOY-এর ভিতরে) থাকে, তবে ঐ প্রদত্ত পরিমাপের কোণটি একটি প্রথম পাদের কোণ। অনুরূপে উৎপাদক রেখা দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে থাকিলে কোণটি যথাক্রমে দ্বিতীয় পাদের, তৃতীয় পাদের ও চতুর্থ পাদের কোণ।



চিত্র 18

চিত্রে $m\angle AOB=\theta$, $m\angle AOC=\phi$, $m\angle AOD=\alpha$ এবং $m\angle AOE=\beta$. সুতরাং $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle AOD$ ও $\angle AOE$ যথাক্রমে θ, ϕ, α ও β পরিমাপের কোণের আদর্শ অবস্থান। θ, ϕ, α ও β যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদের কোণ।

অর্থাৎ (i) কোণগুলি **ধনাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

$0°$ ও $90°$-এর মধ্যে হইলে তাহারা **প্রথম পাদে** অবস্থিত হয়,

$90°$ ও $180°$,, ,, ,, ,, **দ্বিতীয় পাদে** ,, ,,

$180°$ ও $270°$,, ,, ,, ,, **তৃতীয় পাদে** ,, ,,

$270°$ ও $360°$,, ,, ,, ,, **চতুর্থ পাদে** ,, ,,

(ii) কোণগুলি **ঋণাত্মক** হইলে এবং তাহাদের পরিমাণ

$0°$ ও $-90°$-এর মধ্যে হইলে তাহারা **চতুর্থ পাদে** অবস্থিত হইবে ;

$-90°$ ও $-180°$,, ,, ,, ,, **তৃতীয় পাদে** ,, ,,

$-180°$ ও $-270°$,, ,, ,, ,, **দ্বিতীয় পাদে** ,, ,,

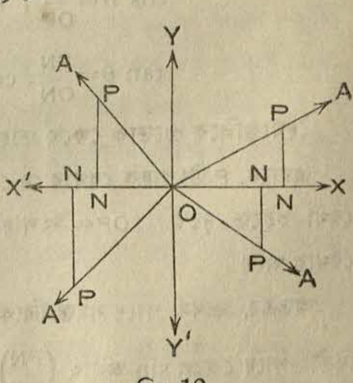
$-270°$ ও $-360°$,, ,, ,, ,, **প্রথম পাদে** ,, ,,

যদি কোনও কোণের পরিমাণ $750°$ হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে, $\overrightarrow{OP}$ রেখা প্রথম অবস্থান $\overrightarrow{OX}$ হইতে ধনাত্মক দিকে সম্পূর্ণ দুইবার ঘুরিয়া আরও $30°$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। কারণ, $750° = 2 \times 360° + 30°$, সুতরাং সেস্থলে $\overrightarrow{OP}$ রেখাটি **প্রথম পাদে** অবস্থিত হইবে।

আবার, যদি কোন কোণের পরিমাণ $-1235°$ হয়, তবে বুঝিতে হইবে যে $\overrightarrow{OP}$ রেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে। কারণ, $-1235° = -360° \times 3 - 155°$, সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ রেখা ঋণাত্মক দিকে পূরা 3 বার ঘুরিয়া $\overrightarrow{OX}$ অবস্থানে আসিবার পর আরও $-155°$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। অতএব, উহা তৃতীয় পাদে আসিয়াছে।

§ 5·2. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দৈর্ঘ্য :

তোমরা লেখ অঙ্কনের সময় শিখিয়াছ যে $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ অক্ষদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রথা অনুসারে O হইতে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর দূরত্বগুলিকে ধনাত্মক (Positive) এবং $\overrightarrow{OX'}$ ও $\overrightarrow{OY'}$ বরাবর দূরত্বগুলিকে ঋণাত্মক (negative) ধরা হয়।



চিত্র 19

ত্রিকোণমিতিতেও এই প্রথা অনুসরণ করা হয়। কেবল ঘূর্ণায়মান $\overrightarrow{OP}$ রেখাটি যে-কোন পাদেই থাকুক না কেন OP দৈর্ঘ্যকে সতত ধনাত্মক ধরিতে হইবে। মনে কর, $\overrightarrow{OA}$ প্রথম পাদে অবস্থিত এবং $PN \perp \overrightarrow{OX}$, এক্ষেত্রে OPN সমকোণী ত্রিভুজের OP, ON ও NP দৈর্ঘ্য তিনটি অর্থাৎ অতিভুজ, ভূমি ও লম্ব তিনটি দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। $\overrightarrow{OA}$ যদি দ্বিতীয় পাদে থাকে এবং $PN \perp \overrightarrow{OX'}$ হয়, তবে OP ও NP ধনাত্মক এবং ON ঋণাত্মক। অনুরূপে তৃতীয়পাদে কেবল OP ধনাত্মক, কিন্তু ON এবং PN উভয়েই ঋণাত্মক। আর, চতুর্থপাদে কেবল PN লম্বটি ঋণাত্মক হইবে।

§ 5·3. যে কোন পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

মনে কর θ পরিমাপের কোণের আদর্শ অবস্থান $\angle AOX$. $\overrightarrow{OA}$ রশ্মির যে কোন একটি বিন্দু P লও এবং P হইতে $PN \perp \overleftrightarrow{XX'}$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{OA}$, প্রথম অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইলে, N বিন্দুটি $\overrightarrow{OX}$ এর উপর অবস্থিত হইবে। আর, $\overrightarrow{OA}$ দ্বিতীয় বা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইলে N বিন্দু $\overrightarrow{OX'}$ এর উপর অবস্থিত হইবে। $\overrightarrow{OA}$-র যে কোন অবস্থানে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$\sin \theta = \frac{PN}{OP}\ ;\ \cot \theta = \frac{ON}{PN}$$

$$\cos \theta = \frac{ON}{OP}\ ;\ \sec \theta = \frac{OP}{ON}$$

$$\tan \theta = \frac{PN}{ON}\ ;\ \text{cosec}\ \theta = \frac{OP}{PN}.$$

দৈর্ঘ্যগুলিকে প্রত্যেক ক্ষেত্রে তাহাদের যথাযথ চিহ্নসহ লইতে হইবে।

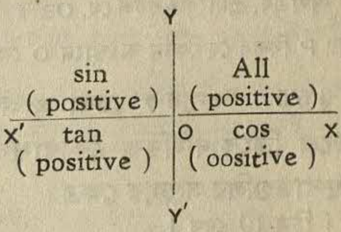
এখানে, P উৎপাদক রেখার যে কোন বিন্দু হইলে PN=P বিন্দুর প্রারম্ভিক রেখা হইতে দূরত্ব। OP=উৎপাদক রেখার অংশ এবং ON=প্রারম্ভিক রেখার অংশ।

অতএব, প্রথম পাদে সমস্ত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক। দ্বিতীয় পাদে কেবল sin অর্থাৎ $\left(\frac{PN}{OP}\right)$ ধনাত্মক (সুতরাং sin-এর অন্যোন্যক

cosecও ধনাত্মক), কিন্তু অন্য অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদে কেবল tan (সুতরাং তাহার অন্যোন্যক cotও) ধনাত্মক, কিন্তু অপর অনুপাতগুলি ঋণাত্মক। চতুর্থ পাদে কেবল cos (সুতরাং উহার অন্যোন্যক secও) ধনাত্মক, কিন্তু অন্য অনুপাতগুলি ঋণাত্মক।

এইরূপে $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে ঘূর্ণায়মান $\overrightarrow{OA}$ রেখাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোনও কোণ উৎপন্ন করুক না কেন, উহা যে পাদে অবস্থিত থাকিবে সেই অনুসারে কোণানুপাতগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন (signs) নির্ধারিত হইবে।

ইহাকে সংক্ষেপে বলা হয় (All, sin, tan, cos) অর্থাৎ প্রথম পাদে সমস্ত কোণানুপাত, দ্বিতীয়ে কেবল sin, তৃতীয়ে কেবল tan এবং চতুর্থ পাদে কেবল cos ধনাত্মক।



দ্রষ্টব্য : 1. যে কোণানুপাতগুলি ধনাত্মক তাহাদের অন্যোন্যকগুলিও ধনাত্মক হইবে। কোন একটি কোণ চারি সমকোণের কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে বা হ্রাস পাইলে ঘূর্ণায়মান বাহুটি (radius vector) সম্পূর্ণ এক বা একাধিকবার ঘুরিয়া পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসে। সুতরাং অসংখ্য কোণের একই সীমারেখা হইতে পারে। ঐরূপ কোণগুলিকে সমপ্রান্তিক বা coterminal angles বলে এবং $n.360° + \theta$ দ্বারা কোণগুলিকে প্রকাশ করা হয় (n এখানে যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা)।

2. পূর্বে বলা হইয়াছে যে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি এক একটি সংখ্যা। তোমরা সহজেই বুঝিতে পার θ-র মান যাহাই হউক না কেন, θ-র ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি পূর্বের ন্যায়ই সংখ্যা হইবে।

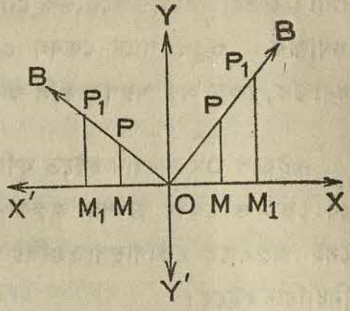
§ 5·4. একই পরিমাপের কোণের কোণানুপাতগুলি সর্বদাই সমান।

চিত্র 20-তে AOB কোণের $\overrightarrow{OB}$ বাহুর উপর অপর যে কোন বিন্দু P_1 হইতে $\overrightarrow{OA}$ বাহুর উপর P_1M_1 লম্ব টানা হইল। এখানে দেখান হইবে যে ΔPOM হইতে O কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায়, ΔP_1OM_1 হইতেও তাহাই পাওয়া যায়। POM ও P_1OM_1 এই ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle O$

সাধারণ কোণ, $\angle M \cong \angle M_1$ (সমকোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট $\angle P \cong \angle P_1$. অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$$\therefore \frac{PM}{OP}=\frac{P_1M_1}{OP_1}, \quad \frac{OM}{OP}=\frac{OM_1}{OP_1},$$

$$\frac{PM}{OM}=\frac{P_1M_1}{OM_1}. \ \ldots \text{ইত্যাদি।}$$



চিত্র 20

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, $\overrightarrow{OB}$-র উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থানে θ কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

§ 5·5. উৎপাদক রেখা x-অক্ষ বা y-অক্ষের সহিত সমাপতিত হইলে ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির মান। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্র।

[চিত্র 19 দেখ]

যখন $\theta=90^\circ$ বা 270° অথবা উহাদের সহিত সমপ্রান্তিক কোন কোণ, তখন উৎপাদক রেখা যথাক্রমে $\overrightarrow{OY}$ বা $\overrightarrow{OY'}$-এর সহিত সমাপতিত হয় এবং O এবং N একই বিন্দু হয়। ফলে ON $=0$ হয় এবং OP ও ON-এর একই দৈর্ঘ্য হয়। $\overrightarrow{PN}$, P বিন্দুর যে কোন অবস্থানে P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্ব।

সুতরাং যখন $\theta=90^\circ$ বা উহার সহিত সমপ্রান্তিক কোন কোণ,

তখন $\sin\theta=\frac{PN}{OP}=\frac{OP}{OP}=1$; $\cos\theta=\frac{ON}{OP}=\frac{0}{OP}=0$;

$\tan\theta=\frac{PN}{ON}=\frac{PN}{0}=$ অসংজ্ঞেয় (কারণ, শূন্য দ্বারা ভাগের সংজ্ঞা নাই);

$\cot\theta=\frac{ON}{PN}=\frac{0}{PN}=0.$ $\sec\theta=\frac{OP}{ON}=\frac{OP}{0}=$ অসংজ্ঞেয়

এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PN}=\frac{OP}{OP}=1.$

$\therefore$ $\sin 90^\circ=1$; $\cos 90^\circ=0$; $\tan 90^\circ$ অসংজ্ঞেয় ;
$\cot 90^\circ=0$; $\sec 90^\circ$ অসংজ্ঞেয় এবং $\operatorname{cosec} 90^\circ=1.$

আবার যখন উৎপাদক রেখা $\overrightarrow{OY'}$-এর সহিত সমাপতিত হয়, অর্থাৎ $\theta=270^\circ$ বা উহার সহিত সমপ্রান্তিক কোন কোণ, তখন O এবং N একই বিন্দু হয় এবং ON $=0$ হয়।

এইক্ষেত্রে OP ও PN রেখাংশ দুইটির পরিমাপ সমান, কিন্তু OP = − PN.

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{-PN}{OP} = \dfrac{-PN}{PN} = -1\ ;\ \cos\theta = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{0}{OP} = 0\ ;$

$\tan\theta = \dfrac{-PN}{ON} = \dfrac{-PN}{0}$ অর্থাৎ অসংজ্ঞেয়।

$\cot\theta = \dfrac{ON}{-PN} = -\dfrac{0}{PN} = 0\ ;\ \sec\theta = \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{OP}{0}$ অর্থাৎ অসংজ্ঞেয় ;

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{-PN} = \dfrac{OP}{-OP} = -1.$

$\therefore \quad \sin 270^\circ = -1\ ;\ \cos 270^\circ = 0\ ;\ \tan 270^\circ$ অসংজ্ঞেয় ;
$\cot 270^\circ = 0\ ;\ \sec 270^\circ$ অসংজ্ঞেয় এবং $\operatorname{cosec} 270^\circ = -1.$

যখন θ, 0° অথবা উহার সহিত সমপ্রান্তিক কোন কোণ, তখন উৎপাদক রেখা $\overrightarrow{OX}$-এর উপর সমপাতিত হয় এবং P ও N একই বিন্দু হয়। ফলে PN-এর দৈর্ঘ্য 0 হয় এবং OP ও ON উভয়েই ধনাত্মক এবং একই দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট হয়।

সুতরাং তখন $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{0}{OP} = 0, \quad \cos\theta = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{OP}{OP} = 1.$

$\tan\theta = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{0}{ON} = 0,\ \cot\theta = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{ON}{0}$ অর্থাৎ অসংজ্ঞেয়।

$\sec\theta = \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{OP}{OP} = 1$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PN} = \dfrac{OP}{0}$ যাহা অসংজ্ঞেয়।

$\therefore \quad \sin 0^\circ = 0\ ;\ \cos 0^\circ = 1\ ;\ \tan 0^\circ = 0\ ;\ \cot 0^\circ$ অসংজ্ঞেয় ;
$\sec 0^\circ = 1$ এবং $\operatorname{cosec} 0^\circ$ অসংজ্ঞেয়।

উৎপাদক রেখা যখন $\overrightarrow{OX'}$-এর উপর সমাপতিত হয়, তখন $\theta = 180^\circ$ বা উহার সহিত সমপ্রান্তিক কোন কোণ। এইক্ষেত্রে PN = 0 এবং ON = − OP.

অতএব $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{0}{OP} = 0\ ;\ \cos\theta = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{-OP}{OP} = -1\ ;$

$\tan\theta = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{0}{ON} = 0\ ;\ \cot\theta = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{ON}{0}$ যাহা অসংজ্ঞেয়।

$\sec\theta = \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{OP}{-OP} = -1$

এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PN} = \dfrac{OP}{0}$ যাহা অসংজ্ঞেয়।

$\therefore \quad \sin 180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1\ ;\ \tan 180^\circ = 0\ ;$
$\cot 180^\circ$ অসংজ্ঞেয় ; $\sec 180^\circ = -1$ এবং $\operatorname{cosec} 180^\circ$ অসংজ্ঞেয়

যেহেতু উৎপাদক রেখা অক্ষদ্বয়ের কোনটির সহিত সমাপতিত না হইলে, OP, PN ও ON প্রত্যেকটির একটি নির্দিষ্ট মান ($\neq 0$) থাকে, সুতরাং θ-র মান

90°-র কোন গুণিতক নয় এরূপ সকলক্ষেত্রে θ-র ত্রিকোণমিতিক অনুপাত-সমূহের নির্দিষ্ট মান থাকে। উপরের আলোচনায় দেখা গেল θ-র মান 90°-র কোন গুণিতক হইলেও $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র নির্দিষ্ট মান থাকে; কিন্তু θ-র মান 90°-র অযুগ্ম গুণিতক হইলে অর্থাৎ $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}\,[n=0, \pm1, \pm2,\cdots]$ হইলে $\tan\theta$ ও $\sec\theta$ অসংজ্ঞেয় হয় এবং θ-র মান 90°-র যুগ্ম গুণিতক হইলে অর্থাৎ $\theta=n\pi[n=0,\pm1,\pm2,\cdots]$ হইলে $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ অসংজ্ঞেয় হয়।

সুতরাং $\sin\theta$ ও $\cos\theta$, θ-এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞাযুক্ত; $\tan\theta$ ও $\sec\theta$, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ব্যতীত সকল মানের জন্য সংজ্ঞাযুক্ত; এবং $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$, $\theta=n\pi$ ব্যতীত সকল মানের জন্য সংজ্ঞাযুক্ত। কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত θ-র যে সকল মানের জন্য সংজ্ঞাযুক্ত, θ-র সেই সকল মানকে ঐ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের **সংজ্ঞার ক্ষেত্র** (**domain of definition**) বলা হয়।

নীচে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণের বিভিন্ন কোণানুপাতের পূর্ণাঙ্গ তালিকা দেওয়া হইল।

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

[মনে রাখিবার কৌশল: $\sin 0^\circ=\sqrt{\frac{0}{4}}=0$; $\sin 30^\circ=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$; $\sin 45^\circ=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 60^\circ=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 90^\circ=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$.]

§ 5·6. দ্বিতীয় অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইয়াছে যে, θ একটি সূক্ষ্মকোণ হইলে,

(i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ (iv) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(v) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (vi) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ এবং

(vii) $\operatorname{coscc}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

বর্তমান অধ্যায়ে θ-র যে-কোন মানের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে এবং ঐ অনুপাতসমূহের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে উপরিলিখিত অভেদগুলি সর্বদা সিদ্ধ হয়।

প্রমাণ। [চিত্র 19 দেখ] (i) $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{PN}{OP} \times \dfrac{OP}{PN} = 1$

[উৎপাদক রেখা $\overrightarrow{OA}$-র $\overrightarrow{OX}$ বা $\overrightarrow{OX'}$ ভিন্ন যে-কোন অবস্থানে ; এই দুই অবস্থানে cosec θ-র সংজ্ঞা নাই।]

$\therefore$ সংশ্লিষ্ট অনুপাত দুইটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$.

অনুরূপে, সংশ্লিষ্ট অনুপাতসমূহের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে (ii), (iii) এবং (iv) অভেদ তিনটি প্রমাণ করা যায়।

আবার উৎপাদক রেখা $\overrightarrow{OA}$-র যে-কোনে অবস্থানে OP, PN এবং ON-এর চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইলে উহাদের বর্গ সর্বদা ধনাত্মক। যখন PN, ON-এর মান শূন্য, তখন উহাদের বর্গগুলিও শূন্য।

$$\therefore \text{ (v) } \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PN}{OP}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PN^2}{OP^2} + \frac{ON^2}{OP^2} = \frac{PN^2 + ON^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1.$$

অনুরূপে সংশ্লিষ্ট অনুপাতসমূহের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে (vi) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ এবং (vii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

সুতরাং যে-সকল ত্রিকোণমিতিক সম্পর্ক ও অভেদ সূক্ষ্ম কোণের জন্য সিদ্ধ তাহারা সংশ্লিষ্ট সকল অনুপাতের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে যে কোন পরিমাপের কোণের জন্যও সিদ্ধ হয়।

§ 5·7. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের সীমা।

θ-র যে কোন মানের জন্য যেহেতু $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP}$ ও $\cos\theta = \dfrac{ON}{OP}$ এবং

PN, ON ও OP সমকোণীত্রিভুজ OPN-এর বাহুত্রয়, অতএব PN ও ON কখনও অতিভুজ OP অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। অতএব sin θ ও cos θ-র সাংখ্যমান কখনও 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

$\therefore \quad -1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$ এবং $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$

(θ-র যে-কোন মানের জন্য)।

আবার যেহেতু $\sec\theta = \frac{OP}{ON}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PN}$,

সুতরাং θ-র কোন মানের জন্য sec θ ও cosec θ-র সাংখ্যমান উহাদের সংজ্ঞারক্ষেত্রে কখনও 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে না।

§ 5·8. একটি প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হইতে অন্য অনুপাতগুলি নির্ণয়ঃ

যেহেতু $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$,

$\therefore \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}.$

যেহেতু সূক্ষ্মকোণের প্রত্যেকটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক,

$\therefore$ θ সূক্ষ্মকোণ হইলে $\cos\theta = +\sqrt{1-\sin^2\theta}.$

কিন্তু θ-র যে-কোন মানের জন্য $\sqrt{1-\sin^2\theta}$, ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। যেহেতু cos θ, প্রথম ও চতুর্থ পাদে ধনাত্মক এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পাদে ঋণাত্মক, সুতরাং θ, প্রথম অথবা চতুর্থ পাদের কোণ হইলে $\cos\theta = +\sqrt{1-\sin^2\theta}$ এবং θ দ্বিতীয় অথবা তৃতীয় পাদের কোণ হইলে $\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}$.

অন্য যে-কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হইতে অপর যে-কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের জন্যও এই পদ্ধতি অনুসরণ করিবে। কয়েকটি উদাহরণদ্বারা পদ্ধতিটি আরও পরিষ্কার করিয়া ব্যাখ্যা করা হইল।

উদা. 1. $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ হইলে, sin 120° ও tan 120°-র মান নির্ণয় কর।

120° দ্বিতীয় পাদের একটি কোণ,

সুতরাং sin 120° ধনাত্মক ও tan 120° ঋণাত্মক।

$$\therefore \quad \sin 120° = +\sqrt{1-\cos^2 120°} = +\sqrt{1-(-\tfrac{1}{2})^2}$$

$$= +\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = +\sqrt{\tfrac{3}{4}} = +\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

উদা. 2. $\tan 135° = -1$ হইলে $\cos 135°$-র মান নির্ণয় কর।

$$\sec^2 135° = 1 + \tan^2 135° = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore \sec 135° = \pm\sqrt{2}.$$

$$\therefore \cos 135° = \frac{1}{\sec 135°} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

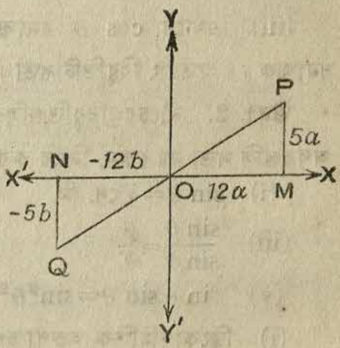
এক্ষণে, 135° দ্বিতীয় পাদের একটি কোণ এবং দ্বিতীয় পাদে cos ঋণাত্মক,

$$\therefore \cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

উদা. 3. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ হইলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-র মান নির্ণয় কর।

যেহেতু θ পরিমাপের কোণের আদর্শ অবস্থানে $\tan\theta$, প্রথম ও তৃতীয় পাদে ধনাত্মক, সুতরাং এই-ক্ষেত্রে, θ-কোণের উৎপাদক রেখা প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

মনে কর, $\angle XOP$ অথবা $\angle X'OQ$, θ-পরিমাপের কোণের আদর্শ অবস্থান এবং PM ও QN যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OX'}$-এর উপর লম্ব,



চিত্র 21

মনে কর, $PM = 5a$, $OM = 12a$ অথবা $QN = -5b$, $ON = -12b$ (a ও b ধনাত্মক)

$$\therefore OP = \sqrt{(5a)^2 + (12a)^2} = 13a$$

$$OQ = \sqrt{(-5b)^2 + (-12b)^2} = 13b.$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{5a}{13a} = \frac{5}{13}.$$ অথবা,

$$\sin\theta = \frac{QN}{OQ} = \frac{-5b}{13b} = -\frac{5}{13}.$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{12a}{13a} = \frac{12}{13}$$

অথবা, $$\cos\theta = \frac{ON}{OQ} = \frac{-12b}{13b} = -\frac{12}{13}.$$

দ্রষ্টব্য : $\tan\theta$-র প্রত্যেক মানের জন্য $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র দুইটি করিয়া সম্ভাব্য মান পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. নীচের কোন্‌গুলি সত্য বল।

(i) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং θ একটি দ্বিতীয় পাদের কোণ ;

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = -5$ এবং θ একটি প্রথম পাদের কোণ ;

(iii) $\cos\theta = \frac{12}{13}$ এবং θ একটি চতুর্থ পাদের কোণ।

(i) এখানে $\tan\theta$ ধনাত্মক আবার tangent অনুপাত দ্বিতীয় পাদে ঋণাত্মক। সুতরাং বিবৃতিটি সত্য নয়।

(ii) এখানে $\operatorname{cosec}\theta$ ঋণাত্মক এবং প্রথম পাদে cosec অনুপাত ধনাত্মক। সুতরাং বিবৃতিটি সত্য নয়।

(iii) এখানে $\cos\theta$ ধনাত্মক ; আবার চতুর্থ পাদে cos অনুপাত ধনাত্মক। সুতরাং বিবৃতিটি সত্য।

উদা. 2. নীচের বিবৃতিগুলির একটি মাত্র সত্য। সেটি কোন্‌টি এবং অপরগুলি সত্য নয় কেন, নির্ণয় কর।

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ সে. মি. (ii) $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta + \sin\phi$

(iii) $\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{\theta}{\phi}$. (iv) $\sin\theta.\sin\phi = \sin^2\theta\phi$.

(v) $\sin\theta.\sin\theta = \sin^2\theta^2$ (vi) $\sin\theta.\sin\theta = \sin^2\theta$.

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি শুদ্ধ সংখ্যা ; কিন্তু $\frac{1}{2}$ সে.মি. শুদ্ধ সংখ্যা নয়। সুতরাং বিবৃতিটি অসত্য।

(ii) 'sine' পদটি অর্থহীন এবং কোন সংখ্যা নয়। যদিও $\sin\theta$ বা $\sin\phi$ বা, $\sin(\theta+\phi)$ এক একটি সংখ্যা। $\sin\theta$-র অর্থ sine ও θ-র গুণফল নয়। সুতরাং এখানে গুণের বিচ্ছেদ নিয়ম (distributive law) প্রয়োগ করা যাইবে না এবং $\sin(\theta+\phi) \neq \sin\theta + \sin\phi$. সুতরাং বিবৃতিটি অসত্য।

(iii) যেহেতু 'sine' কোন সংখ্যা নয় এবং $\sin\theta$, sin ও θ-র গুণফল নয়, সুতরাং লব ও হর হইতে sin অপসারণ (cancel) করিয়া $\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{\theta}{\phi}$ লেখা যাইবে না অর্থাৎ $\frac{\sin\theta}{\sin\phi} \neq \frac{\theta}{\phi}$ এবং বিবৃতিটি অসত্য।

(iv) যেহেতু 'sin' কোন সংখ্যা নয়, সুতরাং গুণের সংযোগ নিয়ম প্রয়োগ করিয়া $\sin\theta.\sin\phi = \sin.\sin\,\theta\phi = \sin^2\theta\phi$ লেখা যায় না। সুতরাং বিবৃতিটি অসত্য।

(v).(iv)-এ উল্লিখিত কারণে $\sin\theta.\sin\theta \neq \sin^2\theta^2$ এবং বিবৃতিটি অসত্য।

(vi) $\sin\theta.\sin\theta$ দুইটি শুদ্ধ সংখ্যার গুণফল এবং এই গুণফলকে $\sin^2\theta$ রূপে লেখাই প্রথা। সুতরাং বিবৃতি সত্য।

উদা. 3. নীচের বিবৃতি দুইটি θ-র কোন মানের জন্যই সত্য নয় কেন ?

(i) $\cos\theta=2$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta=-\frac{1}{2}$.

(i) যেহেতু $\cos\theta$-র সাংখ্যমান কখনও 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, সুতরাং θ-র কোন মানের জন্যই $\cos\theta=2$ হইতে পারে না।

(ii) যেহেতু $\operatorname{cosec}\theta$-র সাংখ্যমান কখনও 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না, সেজন্য θ-র কোন মানের জন্যই $\operatorname{cosec}\theta=-\frac{1}{2}$ হইতে পারে না।

উদা. 4. a এবং b দুইটি অসমান বাস্তব সংখ্যা হইলে দেখাও যে

$\sec^2\theta=\dfrac{4ab}{(a+b)^2}$ সমীকরণের কোন সমাধান সম্ভব নহে।

যেহেতু a এবং b দুইটি অসমান বাস্তব সংখ্যা, $\therefore\ (a-b)^2>0$,

বা, $(a+b)^2-4ab>0$, বা, $(a+b)^2>4ab$.

বা, $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}>1$, বা, $\dfrac{4ab}{(a+b)^2}<1$.

এক্ষণে, θ-র কোন মানের জন্যই $\sec\theta$-র সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। সুতরাং $\sec^2\theta$-র মান কখনও 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

এক্ষণে $\sec^2\theta=\dfrac{4ab}{(a+b)^2}<1$; সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের কোন সমাধান থাকা সম্ভব নহে।

উদা. 5. $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হইলে $\cos\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$-র মান নির্ণয় কর।

$\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\therefore\ \tan^2\theta=\frac{9}{16}$ বা $1+\tan^2\theta=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$.

বা, $\sec^2\theta=\frac{25}{16}$ $\therefore\ \sec\theta=\pm\frac{5}{4}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}=\pm\frac{4}{5}$.

$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$.

$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\pm\frac{3}{5}}=\pm\frac{5}{3}$.

উদা. 6. সমাধান কর : $2\sin^2\theta=3\cos\theta$ এবং θ একটি সূক্ষ্মকোণ।

$2\sin^2\theta=3\cos\theta$, বা, $2(1-\cos^2\theta)=3\cos\theta$

বা, $2-2\cos^2\theta=3\cos\theta$, বা, $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$,

বা, $(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$,

$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2}$ বা -2.

কিন্তু $\cos\theta$-র সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

$\therefore\quad \cos\theta\neq-2$. $\quad\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ \quad\therefore\quad \theta=60^\circ$.

প্রশ্নমালা 5

1. নীচের বিবৃতিসমূহের কোন্‌গুলি সত্য ?

(i) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং θ একটি প্রথম পাদের কোণ।

(ii) $\tan\theta=\frac{5}{12}$ এবং θ একটি প্রথম অথবা তৃতীয় পাদের কোণ।

(iii) $\sec\theta=-\frac{5}{4}$ এবং θ একটি প্রথম অথবা তৃতীয় পাদের কোণ।

2. নীচের বিবৃতিসমূহের কোন্‌গুলি সত্য ?

(i) $\tan(\theta-\phi)=\tan\theta-\tan\phi$ (ii) $\dfrac{\tan\theta}{\tan\phi}=\dfrac{\theta}{\phi}$

(iii) $\tan\theta\ \cos\theta=\tan\ \cos\theta^2$ (iv) $(\sin\theta)^3=\sin^3\theta$.

3. নীচের বিবৃতি দুইটি θ বা ϕ-এর কোন মানের জন্য সত্য হইতে পারে কিনা বল।

(i) $\sec\theta=\frac{1}{4}$ (ii) $\sin\phi=-3$.

4. a কোন বাস্তব সংখ্যা হইলে $\sin x=a+\dfrac{1}{a}$ সমীকরণের সমাধান সম্ভব কিনা বল।

5. x ও y দুইটি বাস্তব সংখ্যা হইলে $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ সমীকরণের সমাধান থাকা সম্ভব কিনা বল।

6. $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ হইলে $\cot 120^\circ$-র মান নির্ণয় কর।

7. $\tan 240^\circ=\sqrt{3}$ হইলে $\cos 240^\circ$-র মান নির্ণয় কর।

8. $\sec 120^\circ=-2$ হইলে $\sin 120^\circ$-র মান নির্ণয় কর।

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর $(0\leqslant\theta\leqslant90^\circ)$:

9. $2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$

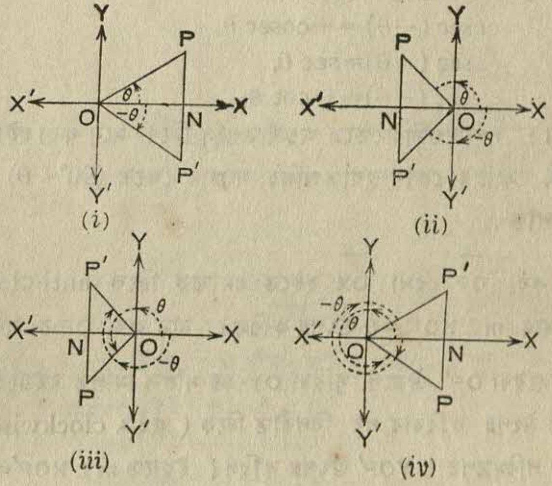
10. (*a*) $\cos^2\theta-5\cos\theta+6=0$ (*b*) $2\sin^2\theta-5=0$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত সংযুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত

§ 6·1. θ-র যে কোন মানে ($-\theta$) **কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।**

মনে কর, $\overrightarrow{OP}$ রেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে $\overrightarrow{OP}$ অবস্থানে আসিয়া XOP কোণ উৎপন্ন করিল



চিত্র 22

এবং উহার মান θ, সুতরাং θ কোণটি ধনাত্মক। আবার মনে কর, $\overrightarrow{OP'}$ রেখা ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে $\overrightarrow{OP'}$ অবস্থানে আসিয়া XOP′ কোণ উৎপন্ন করিল এবং $\angle XOP' \cong \angle XOP$ হইল। অতএব, $m\angle XOP'$ ঋণাত্মক অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোণটির পরিমাপ হইল $-\theta$.

এখন, $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{OX}$ টানিয়া $\overrightarrow{PN}$কে বর্ধিত কর। উহা যেন $\overrightarrow{OP'}$কে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\angle NOP \cong \angle NOP'$, $\angle PNO \cong P'NO$ (সমকোণ বলিয়া),

এবং $ON \cong ON$, $\therefore$ PON ও P′ON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইল।

অতএব, ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলি সমান হইবে।

$\therefore$ PN = −P′N′, এবং OP = OP′ ($\because$ ঘূর্ণায়মান রেখা OP-র দৈর্ঘ্যকে সতত ধনাত্মক ধরা হয়)।

অতএব, $\sin(-\theta) = \frac{P'N}{OP} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta$,

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

$$\tan(-\theta) = \frac{P'N}{ON} = \frac{-PN}{ON} = -\tan\theta$$

এক্ষণে উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta,$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

দ্রষ্টব্য : সম্পর্কগুলির ক্ষেত্রে অনুপাতগুলি নির্ণেয় মনে করা হইয়াছে।

§ 6·2. সংশ্লিষ্ট কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে $(90° - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, $\overrightarrow{OP}$ রেখা $\overrightarrow{OX}$ হইতে ধনাত্মক দিকে (anti-clockwise) ঘুরিয়া প্রথমে $m\angle XOP = \theta$ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OP-র সর্বসম আর একটি সরলরেখা OP′ ঐরূপে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OY}$-এর সহিত মিলিত হইয়া 90° কোণ ($\angle XOY$) উৎপন্ন করিবার পর বিপরীত দিকে (অর্থাৎ clockwise) ঘুরিয়া আসিয়া θ পরিমাপের $\angle YOP'$ উৎপন্ন করিল। ইহাতে $m\angle XOP' = 90° - \theta$ হইল।

এখন, $\overleftrightarrow{XX'}$ এর উপর PN ও P′N′ লম্ব টান এবং $\overleftrightarrow{YY'}$ এর উপর P′M লম্ব টান। এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে অঙ্কন অনুসারে $\angle XOP$ ও $\angle YOP'$এর পরিমাণ সমান।

$\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON \cong \angle MOP' \cong \angle OP'N'$ ($\because$ OM ∥ P′N′) এবং OPN ও OP′N′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

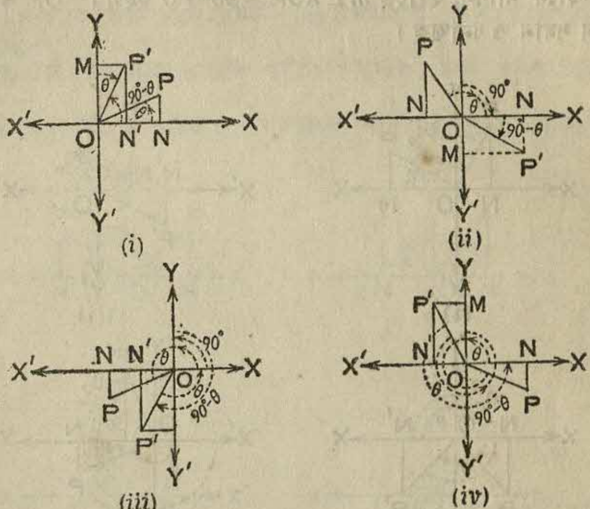
$\therefore$ ON ≅ P′N′, P′N ≅ ON′ (পরিমাণে) এবং OP ≅ OP′.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে ON ও P′N′ একই চিহ্নযুক্ত (উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক) এবং PN ও ON′ একই চিহ্নযুক্ত।

অতএব, $\sin(90° - \theta) = \sin m\angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$,

$$\cos(90°-\theta)=\cos m\angle XOP=\frac{ON'}{OP'}=\frac{PN}{OP}=\sin\theta,$$

$$\tan(90°-\theta)=\tan m\angle XOP'=\frac{P'N'}{ON'}=\frac{ON}{PN}=\cot\theta$$



চিত্র 23

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$\therefore\ \operatorname{cosec}(90°-\theta)=\sec\theta,$

$\sec(90°-\theta)=\operatorname{cosec}\theta,$

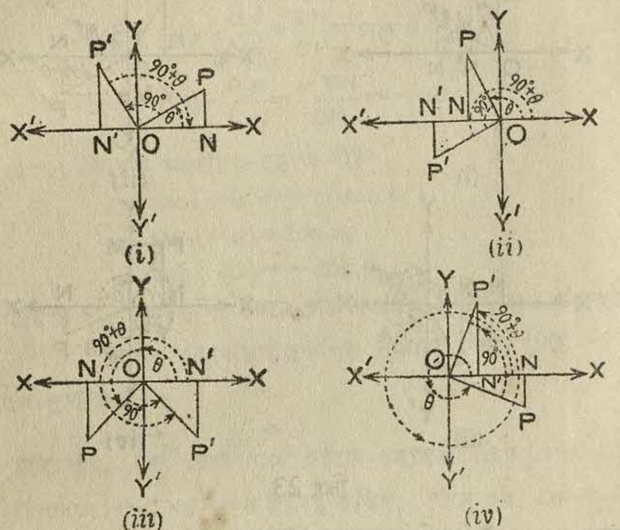
$\cot(90°-\theta)=\tan\theta.$

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে $(90°-\theta)$ ও θ কোণ দুইটির সমষ্টি 90° বলিয়া উভয়ে পরস্পর পূরক কোণ (complementary angles)। এখানে জানা গেল যে, দুইটি পরস্পর পূরক কোণের (i) একটির sine অন্যটির cosine-এর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির sine প্রথমটির cosine-এর সমান হয়, (ii) একটির tangent অপরটির cotangent-এর সমান এবং বিপরীতক্রমে (vice-versa) দ্বিতীয়টির tangent প্রথমটির cotangent-এর সমান ; এবং (iii) একটির secant অপরটির cosecant-এর সমান এবং বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির secant প্রথমটির cosecant-এর সমান।

§ **6·3.** θ-র যে-কোন মানে $(90°+\theta)$ **কোণের কোণানুপাত।**

মনে কর, ঘূর্ণায়মান $\overrightarrow{OP}$ রেখা (radius vector) $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে

ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করিয়া $\overrightarrow{OP}$ অবস্থানে আসিল। তৎপরে উহা একই দিকে আরও এক সমকোণ ঘুরিয়া $\overrightarrow{OP}$ হইতে $\overrightarrow{OP'}$ অবস্থানে আসিল, ইহাতে $m\angle XOP' = 90^\circ + \theta$ হইল। OP ও OP′ সর্ব অবস্থানে সমান ও ধনাত্মক।



চিত্র 24

P ও P′ হইতে $\overleftrightarrow{XX'}$ এর উপর যথাক্রমে PN ও P′N′ লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, প্রত্যেক চিত্রে POP′ সমকোণ হওয়ায় $\angle PON$ ও $\angle P'ON'$এর সমষ্টি এক সমকোণ, সুতরাং $m\angle PON = 90^\circ - m\angle P'ON' = m\angle OP'N'$. অতএব, PON ও P′ON′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ON ও P′N′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের এবং PN ও ON′ অনুরূপ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সাংখ্যমান সমান।

আবার প্রত্যেক চিত্রে ON ও P′N′-এর একই চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) এবং PN ও ON′ পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, অর্থাৎ $P'N' = +ON$ এবং $ON' = -PN$.

অতএব, $\mathbf{sin}\,(\mathbf{90^\circ}+\theta) = \sin m\angle XOP' = \dfrac{P'N'}{OP'} = \dfrac{ON}{OP} = \cos\theta.$

$$\mathbf{cos}\,(\mathbf{90^\circ}+\theta) = \cos m\angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta.$$

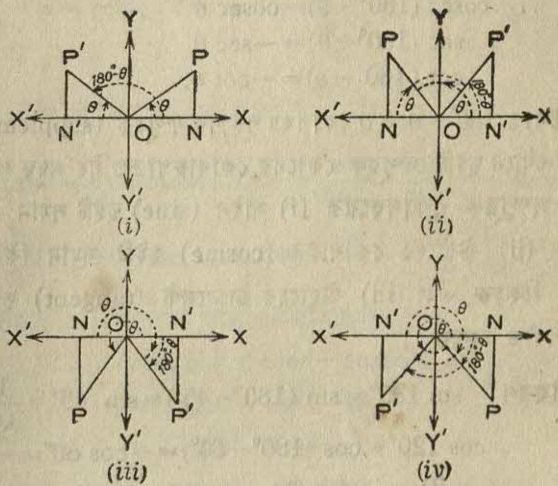
$$\mathbf{tan}\,(\mathbf{90^\circ}+\theta) = \tan m\angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{ON}{-PN} = -\cot\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \ \operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta,$$
$$\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta.$$

§ 6·4. θ-র যে-কোন মানে **($180^\circ-\theta$) কোণের কোণানুপাত।**

মনে কর, $\overrightarrow{OP}$ রেখা $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করিয়া $\overrightarrow{OP}$ অবস্থানে আসিল। আবার মনে কর,



চিত্র 25

$\overrightarrow{OP}$ রেখা $\overrightarrow{OX}$ অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OX'}$ অবস্থানে আসিয়া (অর্থাৎ 2 সমকোণ বা 180° ঘুরিয়া) পুনরায় $\overrightarrow{OX'}$ হইতে বিপরীত দিকে θ কোণ ঘুরিয়া $\overrightarrow{OP'}$ অবস্থানে আসিল। ইহাতে $\angle XOP$ এবং $\angle X'OP'$ পরিমাণে সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত অর্থাৎ যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইল। অতএব, $m\angle XOP'=180^\circ-\theta$ হইল। OP′-কে OP-এর সর্বসম করিয়া P ও P′ হইতে $\overleftrightarrow{XX'}$এর উপর যথাক্রমে PN ও P′N′ লম্বপাত কর।

এক্ষণে প্রত্যেক চিত্রে $\angle PON \cong P'ON'$ এবং $OP \cong OP'$, সুতরাং PON ও P′ON′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে ON ও ON′ সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং PN ও P′N′ সমান ও একই চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ $ON' = -ON$ এবং $P'N' = +PN$ হইবে।

অতএব, $\sin(180° - \theta) = \sin m\angle XOP' = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta$,

$$\cos(180° - \theta) = \cos m\angle XOP' = \frac{ON'}{OP'} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan m\angle XOP' = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{PN}{-ON} = -\tan\theta.$$

আবার, $\because$ উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান,

$$\therefore \operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$$
$$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta.$$

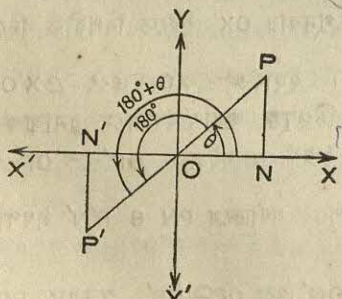
[**দ্রষ্টব্য :** $180° - \theta$ ও θ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক (supplementary), সুতরাং এখানে দুইটি সম্পূরক কোণের কোণানুপাতগুলির সম্বন্ধ পাওয়া গেল এই যে, **সম্পূরক কোণদ্বয়ের** (i) সাইন (sine) দুইটি সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত, (ii) উহাদের কোসাইন (cosine) দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (iii) উহাদের ট্যানজেন্ট (tangent) দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।]

উদাহরণ। $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ **6·5.** θ-র যে-কোন মানে $(180° + \theta)$ **কোণের কোণানুপাত।**



চিত্র 26

মনে কর, $\vec{OP}$ সরলরেখা $\vec{OX}$ অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া প্রথমে θ কোণ উৎপন্ন করিয়া $\vec{OP}$ অবস্থানে আসিল এবং মনে কর, উহা একই দিকে আরও 180° ঘুরিয়া $\vec{OP'}$ অবস্থানে (অর্থাৎ $\vec{OP}$-র সহিত এক সরলরেখায় $\vec{OP}$-র বিপরীত দিকে) আসিল। ইহাতে $m\angle XOP' = 180° + \theta$ হইল।

OP′ কে OP-র সর্বসম করিয়া P ও P′ হইতে $\overleftrightarrow{XX'}$ এর উপর PN ও P′N′ লম্ব টান।

এক্ষণে, ∵ OP≅OP′

এবং ∠PON≅বিপ্রতীপ ∠P′ON′,

∴ PON ও P′ON′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমান।

∴ P′N′ = − PN, ON′ = − ON এবং OP′ = OP.

অতএব,

$$\sin(180°+\theta)=\sin m\angle XOP'=\frac{P'N}{OP'}=\frac{-PN}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(180°+\theta)=\cos m\angle XOP'=\frac{ON'}{OP'}=\frac{-ON}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180°+\theta)=\tan m\angle XOP'=\frac{P'N'}{ON'}=\frac{-PN}{-ON}=\frac{PN}{ON}=\tan\theta.$$

আবার, ∵ উহাদের অন্যোন্যকগুলি সমান

$$\therefore\ \text{cosec}(180+\theta)=-\text{cosec}\,\theta$$
$$\sec(180°+\theta)=-\sec\theta$$
$$\cot(180°+\theta)=\cot\theta.$$

অনুরূপে প্রমাণ : পূর্বে $90°+\theta$ কোণের যে কোণানুপাত নির্ণয় করা হইয়াছে তাহা হইতেই $180°+\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়।

$\sin(180°+\theta)=\sin(90°+\overline{90°+\theta})\ =\cos(90°+\theta)=-\sin\theta,$

$\cos(180°+\theta)=\cos(90°+\overline{90°+\theta})=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta,$

এবং $\tan(180°+\theta)=\tan(90°+\overline{90°+\theta})=-\cot(90°+\theta)=\tan\theta,$

ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য : এখানে কেবল একটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে, উহাতে $\overrightarrow{OP}$ প্রথম পাদে অবস্থিত। $\overrightarrow{OP}$ অন্যান্য পাদে থাকিলে যে তিনটি চিত্র হইবে তাহা অঙ্কন করা সহজ।

উদাহরণ। $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\cos 240°=\cos(180°+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}.$

§ 6·6. **$(270°+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।**

পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে এক্ষেত্রেও কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে বিকল্প প্রণালী দেখান হইতেছে :

$$\sin(270°+\theta)=\sin(180°+\overline{90°+\theta})=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\cos(270°+\theta)=\cos(180°+\overline{90°+\theta})=-\cos(90°+\theta)$$
$$=-(-\sin\theta)=\sin\theta.$$

$$\tan(270°+\theta)=\frac{\sin(270°+\theta)}{\cos(270°+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই $\operatorname{cosec}(270°+\theta)=-\sec\theta,$

$$\sec(270°+\theta)=\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(270°+\theta)=-\tan\theta,$$

§ 6·7. **$(360°\pm\theta)$ ও $(n.360°\pm\theta)$ কোণগুলির কোণানুপাত।**

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে ত্রিকোণমিতিক কোণ উৎপাদনের সময় ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OP}$ (radius vector) যে-কোন কোণ θ উৎপন্ন করিয়া প্রথমে যে অবস্থানে $(\vec{OP})$ আসিল, উহা যদি তৎপরে আরও এক বা একাধিক সম্পূর্ণ পাক (অর্থাৎ যদি 360° বা তাহার কোন গুণিতক $n.360°$ কোণ) ঘোরে তবে উহা পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ($\vec{OP}$-র সহিত) মিলিত হইবে। অতএব, ঐরূপ কোণদ্বয়ের কোণানুপাতগুলি সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, $\sin(360°+\theta)=\sin\theta$
$\cos(360°+\theta)=\cos\theta$
$\tan(360°+\theta)=\tan\theta.$

আবার, $\sin(360°-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(360°-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(360°-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ইত্যাদি।

সাধারণ সূত্রাকারে বলা যায় যে, n যদি যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $n.360\pm\theta$ (বা $2\pi n\pm\theta$) কোণের কোণানুপাতগুলি $\pm\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলির সমান হইবে।

§ 6·8. **নিয়ম।** এ পর্যন্ত যে সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গিয়াছে সেগুলি সহজে **মনে রাখিবার জন্য** একটি নিয়ম করা যাইতে পারে। যথা—

(*a*) **θ যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন জোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলির আকার **পরিবর্তিত হয় না**

(অর্থাৎ সাইনটি সাইন, কসটি কস, ইত্যাদি থাকিবে) উহাদের (sign) নির্ণয়ের জন্য θকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে (quadrant) অবস্থিত তাহা স্থির করিয়া "All, sin, tan, cos." নিয়মানুসারে চিহ্নগুলি নির্ণয় করিবে।

(*b*) θ **যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন বিজোড় গুণিতকের** সহিত+ বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলি **পরিবর্তিত হয়** (অর্থাৎ সাইনটি কোসাইন, কোসাইনটি সাইন ইত্যাদি)। তাহাদের চিহ্নগুলি নিয়ম-(*a*)র মত নির্ণয় করিবে।

এইরূপ ক্ষেত্রে মনে রাখিবার নিয়ম, কোন কোণানুপাতের পূর্বে co উপসর্গ থাকিলে উহা কাটিয়া দিবে, না থাকিলে উহা পূর্বে যোগ করিবে।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. (i) $\sin 480°$, (ii) $\cos 405°$, (iii) $\tan(-1485°)$ এবং (iv) $\cot 1410°$, ইহাদের মান নির্ণয় কর।

(i) এখানে $480° = 5 \times 90° + 30°$

$\because$ এখানে 90°-র গুণিতকটি (5) বিজোড়, $\therefore$ কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে অর্থাৎ sin স্থানে cos হইবে। আবার, 480° কোণটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া sin-এর চিহ্ন ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \sin 480° = \sin(5 \times 90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) $405° = 5 \times 90° - 45°$, এখানে 90°-র গুণিতক বিজোড় হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইয়া cos-এর স্থানে sin হইবে। আর 405° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cosটি ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \cos 405° = \cos(5 \times 90° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) $\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$,

$$\therefore \tan(-1485°) = -\tan 1485°$$

এক্ষণে, $1485° = 16.90° + 45°$, এখানে 90°-র গুণিতক 16 জোড় সংখ্যা হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না। আর, 1485° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার tan ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \tan(-1485°) = -\tan(1485°) = -\tan(16.90° + 45°)$$
$$= -\tan 45° = -1.$$

§ 6·6. $(270°+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

পূর্বের ন্যায় চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে এক্ষেত্রেও কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে বিকল্প প্রণালী দেখান হইতেছে :

$$\sin(270°+\theta)=\sin(180°+\overline{90°+\theta})=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\cos(270°+\theta)=\cos(180°+\overline{90°+\theta})=-\cos(90°+\theta)$$
$$=-(-\sin\theta)=\sin\theta.$$

$$\tan(270°+\theta)=\frac{\sin(270°+\theta)}{\cos(270°+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যক হইতে পাই $\operatorname{cosec}(270°+\theta)=-\sec\theta,$
$\sec(270°+\theta)=\operatorname{cosec}\theta,$
$\cot(270°+\theta)=-\tan\theta,$

§ 6·7. $(360°\pm\theta)$ ও $(n.360°\pm\theta)$ কোণগুলির কোণানুপাত।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে ত্রিকোণমিতিক কোণ উৎপাদনের সময় ঘূর্ণায়মান রেখা $\overrightarrow{OP}$ (radius vector) যে-কোন কোণ θ উৎপন্ন করিয়া প্রথমে যে অবস্থানে ($\overrightarrow{OP}$) আসিল, উহা যদি তৎপরে আরও এক বা একাধিক সম্পূর্ণ পাক (অর্থাৎ যদি 360° বা তাহার কোন গুণিতক $n.360°$ কোণ) ঘোরে তবে উহা পুনরায় তাহার পূর্ব অবস্থানে ($\overrightarrow{OP}$-র সহিত) মিলিত হইবে। অতএব, ঐরূপ কোণদ্বয়ের কোণানুপাতগুলি সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, $\sin(360°+\theta)=\sin\theta$
$\cos(360°+\theta)=\cos\theta$
$\tan(360°+\theta)=\tan\theta.$

আবার, $\sin(360°-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(360°-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(360°-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ইত্যাদি।

সাধারণ সূত্রাকারে বলা যায় যে, n যদি যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $n.360\pm\theta$ (বা $2\pi n\pm\theta$) কোণের কোণানুপাতগুলি $\pm\theta$ কোণের কোণানুপাতগুলির সমান হইবে।

§ 6·8. নিয়ম। এ পর্যন্ত যে সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গিয়াছে সেগুলি সহজে **মনে রাখিবার জন্য** একটি নিয়ম করা যাইতে পারে। যথা—

(a) **θ যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন জোড় গুণিতকের** সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলির আকার **পরিবর্তিত হয় না**

(অর্থাৎ সাইনটি সাইন, কসটি কস, ইত্যাদি থাকিবে) উহাদের (sign) নির্ণয়ের জন্য θকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন্ পাদে (quadrant) অবস্থিত তাহা স্থির করিয়া "All, sin, tan, cos." নিয়মানুসারে চিহ্নগুলি নির্ণয় করিবে।

(b) **θ যদি 90 ডিগ্রীর যে-কোন বিজোড় গুণিতকের** সহিত+ বা − চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে কোণানুপাতগুলি **পরিবর্তিত হয়** (অর্থাৎ সাইনটি কোসাইন, কোসাইনটি সাইন ইত্যাদি)। তাহাদের চিহ্নগুলি নিয়ম-(a)র মত নির্ণয় করিবে।

এইরূপ ক্ষেত্রে মনে রাখিবার নিয়ম, কোন কোণানুপাতের পূর্বে co উপসর্গ থাকিলে উহা কাটিয়া দিবে, না থাকিলে উহা পূর্বে যোগ করিবে।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. (i) $\sin 480°$, (ii) $\cos 405°$, (iii) $\tan(-1485°)$ এবং (iv) $\cot 1410°$, ইহাদের মান নির্ণয় কর।

(i) এখানে $480° = 5 \times 90° + 30°$

$\because$ এখানে 90°-র গুণিতকটি (5) বিজোড়, $\therefore$ কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে অর্থাৎ sin স্থানে cos হইবে। আবার, 480° কোণটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া sin-এর চিহ্ন ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \sin 480° = \sin(5 \times 90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) $405° = 5 \times 90° - 45°$, এখানে 90°-র গুণিতক বিজোড় হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইয়া cos-এর স্থানে sin হইবে। আর 405° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cosটি ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \cos 405° = \cos(5 \times 90° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) $\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$,

$$\therefore \tan(-1485°) = -\tan 1485°$$

এক্ষণে, $1485° = 16.90° + 45°$, এখানে 90°-র গুণিতক 16 জোড় সংখ্যা হওয়ায় কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না। আর, 1485° কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার tan ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \tan(-1485°) = -\tan(1485°) = -\tan(16.90° + 45°)$$
$$= -\tan 45° = -1.$$

(iv) $1410^\circ = 16.90^\circ - 30^\circ$, এখানে 90°-র গুণিতক জোড় সংখ্যা বলিয়া কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না এবং 1410° কোণটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cot ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \quad \cot 1410^\circ = \cot(16.90^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}.$

উদা. 2. (*a*) 180°, (*b*) 270°, (*c*) 2π কোণগুলির sine, cosine ও tangent-এর মান নির্ণয় কর।

(*a*) $\because \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$

$\therefore \quad \sin(180^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0.$

আবার, $\because \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta,$

$\therefore \quad \cos(180^\circ - 0^\circ) = -\cos 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1.$

অতএব, $\tan 180^\circ = \dfrac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \dfrac{0}{-1} = 0.$

(*b*) $\because \quad \sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta,$

$\therefore \quad \sin 270^\circ = -\cos 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$= -1.$

অনুরূপে $\cos 270^\circ = \cos(270^\circ + 0^\circ) = \sin 0^\circ = 0,$

এবং $\tan 270^\circ =$ অসংজ্ঞেয়

(*c*) $2\pi = 2 \times 180^\circ = 360^\circ,$

$\because \quad \sin(360^\circ + \theta^\circ) = \sin\theta,$

$\therefore \quad \sin(360^\circ + 0^\circ) = \sin 0^\circ$ [$\theta = 0^\circ$ ধরিয়া]

$\therefore \quad \sin 2\pi = \sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0.$

অনুরূপে $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1.$

$\therefore \quad \tan 360^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0.$

উদা. 3. $\cot \dfrac{17\pi}{4}$-এর মান এবং উহার সহিত একই সীমারেখাবিশিষ্ট (coterminal) ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ নির্ণয় কর।

$\dfrac{17\pi}{4} = 4\pi + \dfrac{\pi}{4} = 2 \times 360^\circ + 45^\circ$ [$\because \quad 2\pi = 360^\circ$]

$\therefore$ একই সীমারেখাবিশিষ্ট কোণটি $= \dfrac{\pi}{4}.$

আবার, $\cot \dfrac{17\pi}{4} = \cot(2 \times 360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$

উদা. 4. মান নির্ণয় কর :

$$3 \cos 270'' \sec 180° + 2 \operatorname{cosec} 90° - \cos 360°.$$

প্রদত্ত রাশি $= 3 \times \sin 0° \times \dfrac{1}{-\cos 0°} + 2 \times \operatorname{cosec} 90° - \cos 0°$

$$= 3 \times 0 \times \frac{1}{-1} + 2 \times 1 - 1 = 0 + 2 - 1 = 1.$$

উদা. 5. সমাধান কর : $\sin A = -\frac{1}{2}$ $(-360° \leqslant A \leqslant 360°)$

$\because \quad \frac{1}{2} = \sin 30°,$

$\therefore \quad -\frac{1}{2} = -\sin 30°;$

অতএব, সাংখ্যমানে 360° অপেক্ষা ছোট যে সকল কোণের sine $= -\sin 30°$, সেই কোণগুলিই A-এর মান হইবে।

এক্ষণে, $\sin(-30°) = -\sin 30° \cdots\cdots(1)$

আবার, $\sin(180° - 30°) = \sin 30°,$

বা, $\sin 150° = \sin 30°$

$\therefore \quad \sin(-150°) = -\sin 150° = -\sin 30° \cdots\cdots(2)$

আবার, $\sin(180° + 30°) = -\sin 30°,$

বা, $\sin 210° = -\sin 30° \cdots\cdots(3)$

আবার, $\sin(360° - 30°) = -\sin 30°,$

বা, $\sin 330° = -\sin 30° \cdots\cdots(4)$

$\therefore \quad A = -30°, \ -150°, \ 210°$ ও $330°.$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$$\sin 420° \cos 390° + \cos(-300°) \sin(-330°) = 1.$$

বামপক্ষ $= \sin(360° + 60°) \cos(360° + 30°)$

$\qquad + \cos(-360° + 60°) \sin(-360° + 30°)$

$= \sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1.$

উদা. 7. 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণানুপাতে প্রকাশ কর :

(i) $\tan(-1385°)$ and (ii) $\cos 294°$.

এক্ষণে, (i) $\tan(-1385°) = \tan(-4 \times 360° + 55°) = \tan 55°$

$\qquad = \tan(90° - 35°) = \cot 35°$

(ii) $\cos 294° = \cos(3 \times 90° + 24°) = \sin 24°.$

উদা. 8. সরল কর : $\dfrac{\cos 255^\circ+\tan 285^\circ}{\cot 165^\circ-\sin 375^\circ}$

$$\frac{\cos 255^\circ+\tan 285^\circ}{\cot 165^\circ-\sin 375^\circ}=\frac{\cos(270^\circ-15^\circ)+\tan(270^\circ+15^\circ)}{\cot(180^\circ-15^\circ)-\sin(360^\circ+15^\circ)}$$
$$=\frac{-\sin 15^\circ-\cot 15^\circ}{-\cot 15^\circ-\sin 15^\circ}=1.$$

উদা. 9. প্রমাণ কর : $\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}=2.$

$$\text{বামপক্ষ}=\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+3\sin^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2=\frac12+\frac32=2.$$

উদা. 10. $\tan\theta=\frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হইলে $\dfrac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\tan\theta=\frac{5}{12}$, $\therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144}$,

$\therefore\ \sec\theta=\pm\frac{13}{12}$, এখানে $\because$ $\cos\theta$ ঋণাত্মক (স্বীকার)

$\therefore\ \sec\theta=-\frac{13}{12}$, $\therefore\ \cos\theta=-\frac{12}{13}$.

অতএব $\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\frac{5}{12}\times-\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\dfrac{-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}}{-\frac{13}{12}+\frac{5}{12}}=\frac{51}{26}$.

উদা. 11. $\cos\theta+\sqrt3\sin\theta=2$ সমীকরণটি সমাধান করিয়া θ-র সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর ; $(0^\circ<\theta<360^\circ)$.

$\cos\theta+\sqrt3\sin\theta=2$, বা, $\cos\theta-2=-\sqrt3\sin\theta$,

বা, $\cos^2\theta-4\cos\theta+4=3\sin^2\theta=3(1-\cos^2\theta)$

বা, $4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0$,

বা, $(2\cos\theta-1)^2=0$, বা, $2\cos\theta-1=0$,

বা, $2\cos\theta=1$, $\therefore\ \cos\theta=\frac12=\cos 60^\circ$, $\therefore\ \theta=60^\circ$.

এখানে $\cos\theta$ ধনাত্মক বলিয়া কোণটি প্রথম অথবা চতুর্থ পাদে থাকিতে পারে। চতুর্থ পাদে $\cos\theta=\cos(360^\circ-\theta)=\cos(360^\circ-60^\circ)$ $=\cos 300^\circ$, সুতরাং $\theta=300^\circ$ হইতে পারে, কিন্তু এই মানে প্রদত্ত

সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অতএব, এখানে θ-র একমাত্র মান 60° হইল। 300° এখানে একটি অবাস্তব বীজ।

উদা. 12. 0° ও 360°-র মধ্যবর্তী θ-র কোন্ মানগুলি দ্বারা $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$ সমীকরণ সিদ্ধ হয় ?

$$3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5,$$

বা. $3(1+\tan^2\theta+\tan^2\theta)=5$, বা, $3+6\tan^2\theta=5$,

বা, $6\tan^2\theta=2$, বা, $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$, $\therefore$ $\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

এক্ষণে, যদি $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ধনাত্মক বলিয়া θ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$, বা, $\tan(180^\circ+30^\circ)$,

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ বা 210°.

আবার, যদি $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া θ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan 30^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)$,

অথবা $=\tan(360^\circ-30^\circ)$

$\therefore$ $\theta=180^\circ-30^\circ$, অথবা, $360^\circ-30^\circ$,

$\therefore$ $\theta=150^\circ$ বা 330°.

$\therefore$ θ-র নির্ণেয় মান $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ হইতে পারে।

উদা. 13. মান নির্ণয় কর : $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$, (n একটি অখণ্ড সংখ্যা)।

এখানে n কোন জোড় বা বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা।

(i) যদি n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর, $n=2p$ (p যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা),

$\therefore$ $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{2p\pi+(-1)^{2p}\frac{\pi}{6}\right\}$

$=\sin\left(2p\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ [$2p$ জোড় বলিয়া $(-1)^{2p}=1$]

$=\sin\frac{\theta}{6}=\frac{1}{2}$.

(ii) যদি n বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর $n=2p+1$ (p যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা)।

$$\therefore \sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{(2p+1)\pi+(-1)^{2p+1}\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$=\sin\left\{(2p+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\left\{2p\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

[দ্রষ্টব্য : $2p+1$ বিজোড় বলিয়া এখানে $(-1)^{2p+1}=-1$]

উদা. 14. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ কর : $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=0$.

$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি = দুই সমকোণ বা $180°$,

$\therefore$ $A+C=180°$, বা, $A=180°-C$,

এবং $B+D=180°$, বা, $B=180°-C$.

এক্ষণে, $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$=\tan(180°-C)+\tan(180°-D)+\tan C+\tan D$

$=-\tan C-\tan D+\tan C+\tan D=0$.

প্রশ্নমালা 6

নিম্নলিখিতগুলিকে সম-প্রান্তিক ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের অনুপাতরূপে প্রকাশ করিয়া মান নির্ণয় কর :

1. $\cos 420°$ **2.** $\tan(-315°)$ **3.** $\sec\frac{25\pi}{6}$.

মান নির্ণয় কর :

4. $\cot 585°$ **5.** $\sin(-1215°)$ **6.** $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

7. $\sin 960°$ **8.** $\tan 675°$ **9.** $\sec(-1575°)$

10. $\operatorname{cosec}(-1470°)$ **11.** $\tan 1200°$

12. $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ **13.** $\sin(-1125°)+\cos(-1125°)$

14. $\dfrac{\cot 315°-\cos(-240°)}{\cot 990°+\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)}$

প্রমাণ কর :

15. $\cos(A-270°)=-\sin A.$

16. $\sin(780°)\cos(390°)-\sin(330°)\cos(-300°)=1.$

17. $\cos(n\pi+\theta)=(-1)^n\cos\theta.$

18. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}=1.$

19. $\sec\dfrac{2\pi}{3}=-2$ হইলে $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ এর মান নির্ণয় কর।

20. $\cot\theta=-\frac{8}{15}$, হইলে $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

21. n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হইলে $\sin\theta+\sin(\pi+\theta)+\sin(2\pi+\theta)$ $+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিতগুলিকে $45°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণানুপাতে প্রকাশ কর :

22. $\tan 142°$ 23. $\cos(-930°)$ 24. $\sin\dfrac{17\pi}{9}.$

25. $\tan\theta=-\sqrt{3}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ সাংখ্যমানে $360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর θ-র মানগুলি নির্ণয় কর।

26. যদি $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ হয়, তবে $0°$ ও $360°$-র মধ্যে θ-র কি কি মান হইতে পারে ?

$0°<\theta<360°$ হইলে নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া θ-র সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর :

27. $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta.$ 28. $\sec\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

29. $2\sin^2\theta+\cos\theta=2.$ 30. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2.$

31. $2(\sec^2\theta+\sin^2\theta)=5.$

32. n একটি অখণ্ড সংখ্যা হইলে নিম্নলিখিতগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$ (ii) $\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$

(iii) $\tan\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}.$

33. A-র মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin A=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (A, $180°$ ও $270°$-র মধ্যবর্তী।)

(ii) $\tan A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (A, 270° ও 360°-র মধ্যবর্তী।)

(iii) $\sec A = \sqrt{2}$ এবং $360° < A < 450°$.

34. θ কোণটি 270° ও 360°-এর মধ্যবর্তী এবং $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ হইলে $\sec\theta$ নির্ণয় কর।

35. $\cot\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হইলে,
$\frac{\cot(-\theta)+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta+\sin(-\theta)}$, এর মান নির্ণয় কর।

36. $\theta = 240°$ হইলে মান নির্ণয় কর :

(i) $$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\pi+\theta)} \cdot \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi-\theta)}{\sin(-\theta)}$$

(ii) $$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)} - \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

37. $\triangle ABC$-এ প্রমাণ কর : $\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)$
$= \sin A + \sin B + \sin C$.

38. ABCD একটি চতুর্ভুজ, প্রমাণ কর :
$\tan\frac{1}{2}(A+B) + \tan\frac{1}{2}(C+D) = 0.$

39. ABC একটি ত্রিভুজ হইলে
$\frac{\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-C\right)+\sin(2\pi-A)+\sin(\pi+B)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

মিশ্র কোণ

(Compound Angles)

§ 7·1. দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টি বা অন্তরফলকে একটি মিশ্র কোণ (Compound Angle) বলে।

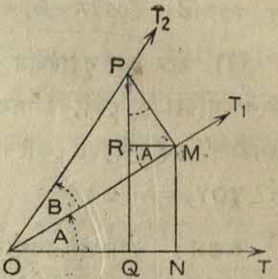
যথা, A+B কোণ, A−B কোণ, A+B+C কোণ ইত্যাদি। মিশ্র কোণ সম্বন্ধে উপপাদ্যগুলি দেখ।

§ 7·2. উপপাদ্য 1. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A+B<90°$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং (2) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

(1) মনে কর ঘূর্ণায়মান $\overrightarrow{OT}$ সরলরেখা প্রথম অবস্থান $\overrightarrow{OT}$ হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান TOT_1 কোণ উৎপন্ন করিল। পরে উহা একই দিকে আরও ঘুরিয়া B কোণের সমান T_1OT_2 কোণ উৎপন্ন করিল।



চিত্র 27

অতএব, $m\angle TOT_2=A+B$ হইল।

অঙ্কন : ঘূর্ণায়মান রেখাটির শেষ অবস্থান $\overrightarrow{OT_2}$-এর উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে $\overrightarrow{OT}$ ও $\overrightarrow{OT_1}$-এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার M বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OT}$ ও PQ-এর উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

প্রমাণ : $\because$ MR ও $\overrightarrow{QT}$ একই সরলরেখা PQ-এর উপর লম্ব,

$\therefore \overline{MR}\parallel\overrightarrow{TO}$, $\therefore m\angle OMR=$ একান্তর $m\angle MON=A$.

আবার, $m\angle OMR+m\angle PMR=1$ সমকোণ $=m\angle PMR+m\angle RPM$.

$m\angle RPM=m\angle OMR=A$.

এক্ষণে সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই, $\sin(A+B)=\sin m\angle POQ$

$=\frac{PQ}{OP}=\frac{RQ+PR}{OP}=\frac{MN+PR}{OP}$ [$\because$ MNQR আয়তের $RQ=MN$]

$=\frac{MN}{OP}+\frac{PR}{OP}=\frac{MN}{OM}\cdot\frac{OM}{OP}+\frac{PR}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

(2) $\cos(A+B)=\cos m\angle POQ=\frac{OQ}{OP}=\frac{ON-QN}{OP}$

$=\frac{ON-MR}{OP}$ [$\because$ MNQR আয়তক্ষেত্রের $MR=QN$]

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{MR}{OP}=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP}-\frac{MR}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}$$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

§ 73. **উপপাদ্য 2.** A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$ হইলে প্রমাণ কর যে,

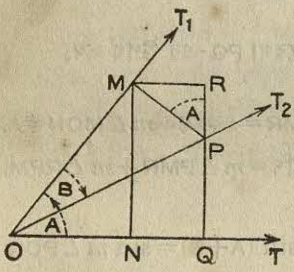
(1) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

এবং (2) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

(1) মনে কর, ঘূর্ণায়মান $\overrightarrow{OT}$ সরলরেখা প্রথম অবস্থান $\overrightarrow{OT}$ হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান TOT_1 কোণ উৎপন্ন করিল এবং তৎপরে বিপরীত দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান T_1OT_2 কোণ উৎপন্ন করিল। অতএব, $m\angle TOT_2=A-B$ হইল।

অঙ্কন: ঘূর্ণায়মান রেখার শেষ অবস্থান $\overrightarrow{OT_2}$ রেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া উহা হইতে $\overrightarrow{OT}$ ও $\overrightarrow{OT_1}$-এর উপর যথাক্রমে PQ ও PM লম্ব টান। আবার, M বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OT}$ ও বর্ধিত $\overrightarrow{QP}$-এর উপর যথাক্রমে MN ও MR লম্ব টান।

প্রমাণ: OQ এবং MR একই সরলরেখা RQ-এর উপর লম্ব,



চিত্র 28

$\therefore$ MR ∥ OQ.

$\therefore$ $m\angle T_1MR=$

অনুরূপ $m\angle MON=A$

আবার $m\angle MPR+m\angle PMR=$

1 সমকোণ $=m\angle PMR+m\angle T_1MR,$

$\therefore$ $m\angle MPR=m\angle T_1MR=A.$

এক্ষণে, সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে পাই

$$\sin(A-B)=\sin m\angle POQ=\frac{PQ}{OP}=\frac{RQ-PR}{OP}$$

$$=\frac{MN-PR}{OP}\quad[\because\ RQ=MN]$$

$$=\frac{MN}{OP}-\frac{PR}{OP}=\frac{MN}{OM}\cdot\frac{OM}{OP}-\frac{PR}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}$$

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

(2) $\cos(A-B)=\cos m\angle POQ=\frac{OQ}{OP}=\frac{ON+NQ}{OP}$

$=\frac{ON+MR}{OP}$ [∵ MNQR আয়তের $NQ=MR$] $=\frac{ON}{OP}+\frac{MR}{OP}$

$=\frac{ON}{OM}.\frac{OM}{OP}+\frac{MR}{PM}.\frac{PM}{OP}=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উপপাদ্যে A ও B সূক্ষ্মকোণ, A+B এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং A−B ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন পরিমাপের কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র আঁকিয়া উপরের প্রণালীতে উপপাদ্য দুইটি প্রমাণ করা যায় (সংশ্লিষ্ট রেখাগুলিকে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নসহ লইতে হইবে)]।

কোন চিত্র না আঁকিয়া উপরে প্রমাণিত সূত্রগুলির সাহায্যে নিম্নের প্রণালীতেও প্রমাণ করা যায় যে উপপাদ্যগুলি যে-কোন পরিমাপের কোণের পক্ষেও সত্য।

মনে কর, $X=90^\circ+A$, সুতরাং $\sin X=\sin(90^\circ+A)=\cos A$ এবং $\cos X=\cos(90^\circ+A)=-\sin A.$

$$\therefore\ \sin(X+B)=\sin\{(90^\circ+A)+B\}=\sin\{90^\circ+(A+B)\}$$
$$=\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\sin X\cos B+\cos X\sin B.$$

আবার, $\cos(X+B)=\cos\{90^\circ+(A+B)\}=-\sin(A+B)$
$$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$=\cos X\cos B-\sin X\sin B.$$

অনুরূপে $X=90^\circ+B$ বা $X_1=90^\circ+X$ লিখিয়াও ঐ সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়।

আবার, মনে কর $X=-A$.

$$\therefore\ \sin(X+B)=\sin(-A+B)=\sin\{-(A-B)\}=-\sin(A-B)$$
$$=-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=-\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$=\sin(-A)\cos B+\cos(-A)\sin B$$
$$=\sin X\cos B+\cos X\sin B.$$

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে, উপপাদ্য 2-এর সূত্রগুলিও যে-কোন পরিমাণ কোণের পক্ষে সত্য।

অতএব, ঐ উপপাদ্যগুলি সর্বক্ষেত্রে সত্য। উহাদিগকে Addition Theorems বা Subtraction Theorems বলা হয়।

§ 7·4. **কতিপয় অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণ :**

অনু. সি. 1. $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B \cdots\cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A \cdots\cdots(ii).$$

প্রমাণ : $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B \cdots$ (i) [প্রমাণিত হইল]

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)=1-\cos^2 A-1+\cos^2 B$

$=\cos^2 B-\cos^2 A \cdots\cdots$(ii). [প্রমাণিত]

অনু. সি. 2. $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$=\cos^2 A-\sin^2 B \cdots(i)$$
$$=\cos^2 B-\sin^2 A \cdots(ii).$$

প্রমাণ : $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B \cdots\cdots$(i) [প্রমাণিত হইল]

$=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=1-\sin^2 A-1+\cos^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A \quad \cdots$(ii).

§ 7·5. **সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে,**

(i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

প্রমাণ : (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

ডান পক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

($\because$ tan A ও tan B সংজ্ঞেয়, $\therefore$ $\cos A \cos B \neq 0$)

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B}+\frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}-\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}.$$

(ii) $$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A \cos B-\cos A \sin B}{\cos A \cos B+\sin A \sin B}$$

এক্ষণে, ডান পক্ষের লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

($\because$ tan A ও tan B সংজ্ঞেয়, $\therefore$ $\cos A \cos B \neq 0$)

$$\tan(A-B)=\frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B}-\frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}+\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A \tan B}.$$

অনু. সি. 3. সংশ্লিষ্ট প্রত্যেকটি অনুপাত সংজ্ঞেয় হইলে

(i) $$\cot(A+B)=\frac{\cot A \cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(ii) $$\cot(A-B)=\frac{\cot A \cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

প্রমাণ : (i) $$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\cos A \cos B-\sin A \sin B}{\sin A \cos B+\cos A \sin B}$$

এক্ষণে, ডানপক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

(এখানে $\sin A \sin B \neq 0$)

$$\cot(A+B)=\frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B}-\frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}}{\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B}+\frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}}=\frac{\cot A \cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(ii) $$\cot(A-B)=\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\frac{\cos A \cos B+\sin A \sin B}{\sin A \cos B-\cos A \sin B}$$

এক্ষণে ডানপক্ষের লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\cot(A-B)=\frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B}+\frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}}{\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B}-\frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}}=\frac{\cot A \cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

§ 7·6. বিস্তৃতি নির্ণয় :—

(i) $\sin(A+B+C)$

(ii) $\cos(A+B+C)$

(iii) $\tan(A+B+C)$.

[$\tan(A+B+C)$, $\tan A$, $\tan B$ ও $\tan C$ সংজ্ঞেয় হইলে]

এক্ষণে, (i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$

$$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$$

[দ্রষ্টব্য : $\sin(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিটিকে (expansionকে) $\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$ এই আকারে লেখা যায়।]

অনুরূপে (ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin A\sin C\cos B-\sin B\sin C\cos A.$$

[দ্রষ্টব্য : $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিকে (expansion-কে) $\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C)$ এই আকারে লেখা যায়।]

(iii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B}}{\dfrac{1-\tan A\tan B-(\tan A+\tan B)\tan C}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}.$$

[দ্রষ্টব্য : (1) এই সূত্রটি স্মরণ রাখিবে। $\tan(A+B+C) = \dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$ এইরূপে লিখিয়া তৎপরে $\sin(A+B+C)$ ও $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতি দুইটি লিখিবে। তৎপরে লব ও হরকে $\cos A \cos B \cos C$ দিয়া ভাগ করিলেই $\tan(A+B+C)$-এর উপরের বিস্তৃতিটি পাওয়া যাইবে।

(2) উপরের প্রদর্শিত প্রণালীতে 4, 5 বা তদধিক সংখ্যক কোণের সমষ্টির ত্রিকোণমিতিক বিস্তৃতিগুলির (functions বা expansions-এর) সূত্র পাওয়া যায়।]

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. মান নির্ণয় কর : $\sin 75°$, $\cos 75°$ ও $\tan 75°$.

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 75° = \tan(45°+30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

উদা. 2. $\tan 15°$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

উদা. 3. $\sin A=\frac{3}{5}$ এবং $\sin B=\frac{5}{13}$ হইলে,

$\sin(A-B)$-এর মান নির্ণয় কর : (A এবং B উভয়েই ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)

$\because \sin A=\frac{3}{5}$ ও $\sin B=\frac{5}{13}$.

$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

এক্ষণে, $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}$$
$$=\frac{36-20}{65}=\frac{16}{65}.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $\tan(45^\circ+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$.

$$\tan(45^\circ+A)=\frac{\tan 45^\circ+\tan A}{1-\tan 45^\circ\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}\ [\because \tan 45^\circ=1]$$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $\tan(A+B)\tan(A-B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$.

[C. U. '44]

প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\cos(A+B).\cos(A-B)}$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$$ [অনু. সি. 1 ও 2 দেখ]

উদা. 6. দেখাও যে, $\frac{\cos 6^\circ+\sin 6^\circ}{\cos 6^\circ-\sin 6^\circ}=\tan 51^\circ$.

$\cos 6^\circ+\sin 6^\circ=\cos(51^\circ-45^\circ)+\sin(51^\circ-45^\circ)$

$=\cos 51^\circ\cos 45^\circ+\sin 51^\circ\sin 45^\circ+\sin 51^\circ\cos 45^\circ-\cos 51^\circ\sin 45^\circ$

$=\cos 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=2\sin 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin 51^\circ$.

অনুরূপে, $\cos 6^\circ-\sin 6^\circ=\cos(51^\circ-45^\circ)-\sin(51^\circ-45^\circ)$

$$=2\cos 51^\circ.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cos 51^\circ.$$

$$\therefore \frac{\cos 6^\circ+\sin 6^\circ}{\cos 6^\circ-\sin 6^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin 51^\circ}{\sqrt{2}\cos 51^\circ}=\frac{\sin 51^\circ}{\cos 51^\circ}=\tan 51^\circ.$$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$.

$$\cot A - \cot 2A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$
$$= \frac{\sin 2A \cos A - \cos 2A \sin A}{\sin A \sin 2A} = \frac{\sin (2A - A)}{\sin A \sin 2A}$$
$$= \frac{\sin A}{\sin A \sin 2A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

উদা. 8. প্রমাণ কর : $\tan 10^\circ + \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 35^\circ = 1$.

$\because \quad \frac{\tan 10^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 35^\circ} = \tan (10^\circ + 35^\circ) = \tan 45^\circ = 1,$

$\therefore \quad \tan 10^\circ + \tan 35^\circ = 1 - \tan 10^\circ \tan 35^\circ$

$\therefore \quad \tan 10^\circ + \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 35^\circ = 1.$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\tan 10A \tan 6A \tan 4A$
$= \tan 10A - \tan 6A - \tan 4A.$

$$\tan 10A = \tan (6A + 4A) = \frac{\tan 6A + \tan 4A}{1 - \tan 6A \tan 4A}$$

$\therefore \quad \tan 10A - \tan 10A \tan 6A \tan 4A = \tan 6A + \tan 4A$

বা, $\tan 10A - \tan 6A - \tan 4A = \tan 10A \tan 6A \tan 4A.$

উদা. 10. $a \cos \alpha + b \sin \alpha$-কে $r \cos (\alpha - \theta)$ আকারে প্রকাশ কর।

মনে কর, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$.

$\therefore \quad a \cos \alpha + b \sin \alpha = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha$
$= r (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = r \cos (\alpha - \theta)$

[এখানে, $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$
$= \sqrt{r^2 \cos^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{b}{a}.$$

উদা. 11. প্রমাণ কর যে, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে

$$\sec (x + y) = \frac{\sec x \sec y}{1 - \tan x \tan y}.$$

$$\sec (x + y) = \frac{1}{\cos (x + y)} = \frac{1}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\sec x \sec y}{1 - \tan x \tan y}$$

[লব ও হরকে $\cos x \cos y$ দ্বারা ভাগ করিয়া। লক্ষ্য কর, যেহেতু $\sec x$ বা $\sec y$-এর সংজ্ঞা আছে, $\therefore$ $\cos x \cos y$ দ্বারা ভাগ সিদ্ধ।]

উদা. 12. সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে
$\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$ হইলে দেখাও যে,
$\cot A.\cot B.\cot C=\cot D.$ [C. U. '30]

$\because\ \cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D),$

$\therefore\ \dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin(C-D)}{\sin(C+D)},$

বা, $\dfrac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{\cos(A+B)-\cos(A-B)}=\dfrac{\sin(C-D)+\sin(C+D)}{\sin(C-D)-\sin(C+D)}$
[যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\dfrac{2\cos A\cos B}{-2\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin C\cos D}{-2\cos C\sin D}.$ [বিস্তৃতি লিখিয়া]

বা, $\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin C\cos D}{\cos C\sin D}$

বা, $\cot A\cot B=\tan C\cot D=\dfrac{\cot D}{\cot C}\left[\because\ \tan C=\dfrac{1}{\cot C}\right]$

$\therefore\ \cot A\cot B\cot C=\cot D.$

উদা. 13. $\sin(A+B)=n\sin(A-B)$ এবং $n\neq-1$ হইলে দেখাও যে, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে $\cot A=\dfrac{n-1}{n+1}\cot B.$

$\because\ \sin(A+B)=n\sin(A-B),$

$\therefore\ \sin A\cos B+\cos A\sin B=n(\sin A\cos B-\cos A\sin B),$

বা, $\cos A\sin B+n\cos A\sin B$
$=n\sin A\cos B-\sin A\cos B$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\cos A\sin B(1+n)=\sin A\cos B(n-1),$

বা, $\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}=\dfrac{n-1}{n+1},$ বা, $\cot A\tan B=\dfrac{n-1}{n+1},$

বা, $\cot A.\dfrac{1}{\cot B}=\dfrac{n-1}{n+1},$ $\therefore\ \cot A=\dfrac{n-1}{n+1}\cot B.$

উদা. 14. যদি α কোণকে দুই অংশে বিভক্ত করায় ঐ অংশদ্বয়ের tangent দুইটির অনুপাত λ হয়, তবে প্রমাণ কর যে. $\sin x=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha$ সমীকরণ হইতে ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর x পাওয়া যায়। [A. U. '45]

মনে কর, α কোণের অংশদ্বয় m ও n.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\dfrac{\tan m}{\tan n}=\lambda\cdots(1)$

$m-n=x\cdots(2)$ এবং $m+n=\alpha\cdots(3).$

একক্ষণে, $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha=\frac{\frac{\tan m}{\tan n}-1}{\frac{\tan m}{\tan n}+1}.\sin\alpha=\frac{\tan m-\tan n}{\tan m+\tan n}\sin\alpha$

$$=\frac{\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\sin n}{\cos n}}{\frac{\sin m}{\cos m}+\frac{\sin n}{\cos n}}.\sin(m+n)\quad[\because \alpha=m+n]$$

$$=\frac{\sin m\cos n-\cos m\sin n}{\sin m\cos n+\cos m\sin n}.\sin(m+n)$$

$$=\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}.\sin(m+n)=\sin(m-n)=\sin x.$$

উদা. 15. $\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)=-\frac{3}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sin A+\sin B+\sin C=0=\cos A+\cos B+\cos C$.

$\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)=-\frac{3}{2}$

বা, $2\{\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)\}=-3$

বা, $2\{(\cos B\cos C+\sin B\sin C)+(\cos C\cos A+\sin C\sin A)$
$+(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\}=-(\sin^2A+\cos^2A)$
$-(\sin^2B+\cos^2B)-(\sin^2C+\cos^2C)$

বা, $(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C+2\sin C\sin A$
$+2\sin A\sin B)+(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos B\cos C$
$+2\cos C\cos A+2\cos A\cos B)=0.$

বা, $(\sin A+\sin B+\sin C)^2+(\cos A+\cos B+\cos C)^2=0,$

$\therefore\ (\sin A+\sin B+\sin C)^2=0=(\cos A+\cos B+\cos C)^2$

কারণ, দুইটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার প্রত্যেকটি ধনাত্মক অথবা শূন্য হওয়ায়, উহাদের যোগফল শূন্য হওয়ার অর্থ উহারা প্রত্যেকে শূন্য।

$\therefore\ \sin A+\sin B+\sin C=0=\cos A+\cos B+\cos C.$

উদা. 16. $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হইলে প্রমাণ কর যে, (i) $\tan A=\tan B+\tan C$, (ii) $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

(i) যেহেতু, $A+B+C=\pi$, $\therefore\ \pi-\overline{B+C}=A$.

একক্ষণে, বামপক্ষ $=\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin(\pi-\overline{B+C})}{\cos B\cos C}=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$

$$=\frac{\sin B \cos C+\cos B \sin C}{\cos B \cos C}=\frac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C}+\frac{\cos B \sin C}{\cos B \cos C}$$

$$=\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\tan B+\tan C=\text{ডানপক্ষ।}$$

(ii) $\cos B \cos C=\cos A=\cos(\pi-\overline{B+C})=-\cos(B+C)$

$=-\cos B \cos C+\sin B \sin C,$

বা, $2 \cos B \cos C=\sin B \sin C$, বা, $\frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \cot B \cot C=\frac{1}{2}.$

প্রশ্নমালা 7

[এই প্রশ্নমালায় প্রত্যেক ক্ষেত্রে অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে বিভিন্ন মান নির্ণয় অথবা প্রমাণ করিতে হইবে বলিয়া মনে করিবে।]

1. মান নির্ণয় কর :—

(i) $\sin(-15°)$, (ii) $\cot 15°$, (iii) $\tan(-75°)$.

2. একটিমাত্র অনুপাতে প্রকাশ কর :—

(i) $\sin 4\alpha \cos 2\alpha+\cos 4\alpha \sin 2\alpha$,

(ii) $\cos 38° \cos 22°-\sin 38° \sin 22°$.

(iii) $\sin(\alpha-\beta) \cos \alpha-\cos(\alpha-\beta) \sin \alpha$.

(iv) $\frac{\tan \alpha-\tan(\alpha-\theta)}{1+\tan \alpha \tan(\alpha-\theta)}$.

3. $\sin(A-B+C)$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

4. $\sin 105°+\cos 105°+\cos \frac{\pi}{4}$-এর মান নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর :

$(\sin \theta \cos \phi-\cos \theta \sin \phi)^2+(\cos \theta \cos \phi+\sin \theta \sin \phi)^2=1.$

6. A এবং B সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$; $\cos(A+B)$-এর মান নির্ণয় কর।

7. $\sin B=\frac{4}{5}$ এবং $\cos A=\frac{8}{17}$; $\sec(A+B)$-এর মান নির্ণয় কর।

8. $\tan A=\frac{2}{11}$ এবং $\cot B=\frac{24}{7}$; $\cot(A-B)$-এর মান নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে, $\cos \theta-\sin \theta=2 \cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$.

অভেদগুলি প্রমাণ কর :—

10. $2 \sin\left(\frac{\pi}{6}-\quad\right)=\cos \theta-\sqrt{3} \sin \theta.$

11. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B}=\cot B-\cot A.$

12. $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0.$ [C. U. '53]

13. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$
$=\sin(\theta+\alpha).$

14. $2\cos(45^\circ+A)\cos(45^\circ-A)=\cos^2 A-\sin^2 A.$

15. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}.$

16. $\dfrac{\tan(2\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(2\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan 2\alpha.$

17. $\cos 69^\circ22'\cos 9^\circ22'+\cos 80^\circ38'\cos 20^\circ38'=\frac{1}{2}.$

18. $\cos 38^\circ15'\sin 68^\circ15'-\cos 51^\circ45'\sin 21^\circ45'=\frac{1}{2}.$

19. $\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta=\sin 2\theta.$

20. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$ [C. U. '47]

21. $1+\dfrac{\tan 2A}{\cot A}=\sec 2A.$ 22. $\dfrac{\cos 9^\circ+\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}=\tan 54^\circ.$

23. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{1-\sin^2 A-\sin^2 B}.$

24. $\sin(m+1)\theta.\sin(m-1)\theta+\cos(m+1)\theta.\cos(m-1)\theta$
$=\cos 2\theta.$

25. $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin\theta.\sin\frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos\theta.\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta).$

26. $\tan^2 A-\tan^2 B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}.$ [C. U. '36]

27. $\tan 27^\circ+\tan 18^\circ+\tan 18^\circ\tan 27^\circ=1$

28. (i) $\operatorname{cosec}(x+y)=\dfrac{\operatorname{cosec} x\operatorname{cosec} y}{\cot y+\cot x}.$

(ii) $\sec(x-y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1+\tan x\tan y}.$

(iii) $\operatorname{cosec}(x-y)=\dfrac{\operatorname{cosec} x\operatorname{cosec} y}{\cot y-\cot x}.$

29. $\tan\alpha=\dfrac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta}$ এবং $\tan\beta=\dfrac{y\sin\alpha}{1-y\cos\alpha}$ হইলে,
প্রমাণ কর $y\sin\alpha=x\sin\beta.$

30. $\tan\alpha-\tan\beta=a$ এবং $\cot\beta-\cot\alpha=b$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x+y=xy\cot(\alpha-\beta).$

সরল কর :—

31. $\frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C \sin A}$.

32. $1+\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A}$.

33. $\sin\alpha \sin\beta-\cos\alpha \cos\beta+1=0$ হইলে দেখাও যে.

$1+\cot\alpha \tan\beta=0$. [C. U. '39]

34. $\tan\beta=\frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1-n \sin^2\alpha}$ হইলে দেখাও যে,

$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$. [P. U. '50]

অষ্টম অধ্যায়

গুণফলকে যোগফলরূপে এবং যোগফলকে গুণফলরূপে প্রকাশ

§ 8·1. গুণফলকে যোগফল অথবা বিয়োগফলের আকারে প্রকাশ করিয়া রূপান্তর করা যায়। আবার, যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফলের আকারে প্রকাশ করা যায়।

গুণফলকে যোগফল বা অন্তরফলের আকারে রূপান্তর :

(1) পূর্বে প্রমাণিত § 7·2 ও § 7·3 অনুচ্ছেদ হইতে পাই।

$\sin A \cos B+\cos A \sin B=\sin(A+B)\cdots$(i)

$\sin A \cos B-\cos A \sin B=\sin(A-B)\cdots$(ii)

∴ (যোগ করিয়া) $2\sin A \cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

আবার, (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই

$2\cos A \sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$.

উপরের সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে আমরা একটি sine ও একটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি sine-এর সমষ্টি বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ করিতে পারি।

(2) পূর্বে প্রমাণিত § 7·2 ও § 7·3 অনুচ্ছেদ হইতে পাই

$\cos A \cos B-\sin A \sin B=\cos(A+B)\cdots$(iii)

$\cos A \cos B+\sin A \sin B=\cos(A-B)\cdots$(iv)

∴ (যোগ করিয়া) $2\cos A \cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

আবার, (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B).$$

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে (i) দুইটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি cosine-এর যোগফলরূপে এবং (ii) দুইটি sine-এর গুণফলকে দুইটি cosine-এর অন্তরফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র চারিটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। নিম্নে ঐগুলি একত্রে দেওয়া হইল,

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \cdots (1)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \cdots (2)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \cdots (3)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \cdots (4)$$

[**দ্রষ্টব্য :** মনে রাখিবার সুবিধার জন্য মুখে মুখে বলা হয়

2 sin A cos B = sin (যোগফল) + sin (অন্তর)

2 cos A sin B = sin (যোগফল) − sin (অন্তর)

2 cos A cos B = cos (যোগফল) + cos (অন্তর)

2 sin A sin B = cos (অন্তর) − cos (যোগফল)

লক্ষ্য করিবে শেষের সূত্রটিতে প্রথমটি অন্তর এবং পরেরটি যোগফল।]

উদাহরণ 1. $2 \sin 11A \cos 5A$

$$= \sin (11A+5A) + \sin (11A-5A)$$

$$= \sin 16A + \sin 6A.$$

উদা. 2. $2 \cos 5\theta \sin 8\theta = \sin (5\theta+8\theta) - \sin (5\theta-8\theta)$

$$= \sin 13\theta - \sin (-3\theta)$$

$$= \sin 13\theta + \sin 3\theta.$$

উদা. 3. $2 \cos 75^\circ \cos 15^\circ$

$$= \cos (75^\circ+15^\circ) + \cos (75^\circ-15^\circ)$$

$$= \cos 90^\circ + \cos 60^\circ = 0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

উদা. 4. $2 \sin \frac{5\theta}{2} \sin \frac{7\theta}{2}$

$$= \cos \left(\frac{5\theta}{2} - \frac{7\theta}{2}\right) - \cos \left(\frac{5\theta}{2} + \frac{7\theta}{2}\right)$$

$$= \{\cos (-\theta) - \cos 6\theta\} = \cos \theta - \cos 6\theta.$$

§ 8·2. যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফল আকারে প্রকাশ :

$\because$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\cdots(1)$

এক্ষণে, মনে কর $A+B=C$ এবং $A-B=D$;

সুতরাং, $A=\frac{C+D}{2}$ এবং $B=\frac{C-D}{2}$.

অতএব (1) হইতে পাই $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C+D}{2}\cdots\cdot(I)$

আবার. $\because$ $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots(2)$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\cdots(3)$

এবং $\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$=-\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$ ।

$=-2\sin A\sin B=2\sin A\sin(-B)\cdots(4)$

$\therefore$ (2), (3) ও (4)-এ A ও B-র মান বসাইয়া পাই

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots(II)$

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots(III)$

এবং $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots(IV)$

উপরের সূত্র চারিটিও বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি নিম্নে একত্রে দেওয়া হইল :—

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots(I)$

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots(II)$

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots(III)$

$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\cdots(IV)$

[**দ্রষ্টব্য :** শেষ সূত্রটিতে লক্ষ্য কর যে, $\frac{C-D}{2}$ না হইয়া $\frac{D-C}{2}$ হইয়াছে।

মনে রাখিবার সুবিধার জন্য বলা যায় :—

(i) sin + sin = 2 sin cos

(ii) sin − sin = 2 cos sin

(iii) cos + cos = 2 cos cos

*(iv) cos − cos = 2 sin sin.

শেষেরটি ছাড়া (এইজন্য এইটিতে * চিহ্ন) অপর তিনটি ক্ষেত্রে প্রথমে যোগফল ও পরে অন্তর ।]

উদাহরণ 1. $\sin 8\theta + \sin 6\theta = 2\sin\frac{8\theta+6\theta}{2}\cos\frac{8\theta-6\theta}{2}$

$$= 2\sin 7\theta\cos\theta.$$

উদা. 2. $\sin 14\theta - \sin 8\theta = 2\cos\frac{14\theta+8\theta}{2}\sin\frac{14\theta-8\theta}{2}$

$$= 2\cos 11\theta\sin 3\theta.$$

উদা. 3. $\cos 2\theta + \cos 5\theta = 2\cos\frac{2\theta+5\theta}{2}\cos\frac{2\theta-5\theta}{2}$

$$= 2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\left(-\frac{3\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.$$

উদা. 4. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{15^\circ-75^\circ}{2}$

$$= 2\sin 45^\circ\sin(-30^\circ) = -2\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$= -2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. প্রমাণ কর যে : $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$. [P. U. '42]

বামপক্ষ $= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ.(2\sin 80^\circ\sin 40^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos(80^\circ-40^\circ) - \cos(80^\circ+40^\circ)\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ - \cos 120^\circ\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\{\cos 40^\circ - (-\tfrac{1}{2})\} \quad [\because \cos 120^\circ = -\tfrac{1}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ + \tfrac{1}{2})$$

§ 8·2. যোগফল অথবা বিয়োগফলকে গুণফল আকারে প্রকাশ :

$\because\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

এবং $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \cdots(1)$

এক্ষণে, মনে কর $A+B=C$ এবং $A-B=D$;

সুতরাং, $A=\dfrac{C+D}{2}$ এবং $B=\dfrac{C-D}{2}$.

অতএব (1) হইতে পাই $\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C+D}{2} \cdots(I)$

আবার. $\because\ \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \cdots(2)$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \cdots(3)$

এবং $\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$=-\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$ ।

$=-2\sin A\sin B=2\sin A\sin(-B) \cdots(4)$

$\therefore$ (2), (3) ও (4)-এ A ও B-র মান বসাইয়া পাই

$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2} \cdots(II)$

$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2} \cdots(III)$

এবং $\cos C-\cos D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2} \cdots(IV)$

উপরের সূত্র চারিটিও বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি নিম্নে একত্রে দেওয়া হইল :—

$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2} \cdots(I)$

$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2} \cdots(II)$

$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2} \cdots(III)$

$\cos C-\cos D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2} \cdots(IV)$

[**দ্রষ্টব্য :** শেষ সূত্রটিতে লক্ষ্য কর যে, $\dfrac{C-D}{2}$ না হইয়া $\dfrac{D-C}{2}$ হইয়াছে।

মনে রাখিবার সুবিধার জন্য বলা যায় :—

(i) sin + sin = 2 sin cos

(ii) sin − sin = 2 cos sin

(iii) cos + cos = 2 cos cos

*(iv) cos − cos = 2 sin sin.

শেষেরটি ছাড়া (এইজন্য এইটিতে * চিহ্ন) অপর তিনটি ক্ষেত্রে প্রথমে যোগফল ও পরে অন্তর।]

উদাহরণ 1. $\sin 8\theta + \sin 6\theta = 2 \sin \frac{8\theta + 6\theta}{2} \cos \frac{8\theta - 6\theta}{2}$

$$= 2 \sin 7\theta \cos \theta.$$

উদা. 2. $\sin 14\theta - \sin 8\theta = 2 \cos \frac{14\theta + 8\theta}{2} \sin \frac{14\theta - 8\theta}{2}$

$$= 2 \cos 11\theta \sin 3\theta.$$

উদা. 3. $\cos 2\theta + \cos 5\theta = 2 \cos \frac{2\theta + 5\theta}{2} \cos \frac{2\theta - 5\theta}{2}$

$$= 2 \cos \frac{7\theta}{2} \cos \left(-\frac{3\theta}{2}\right) = 2 \cos \frac{7\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$

উদা. 4. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{15^\circ - 75^\circ}{2}$

$$= 2 \sin 45^\circ \sin(-30^\circ) = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. প্রমাণ কর যে : $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$. [P. U. '42]

বামপক্ষ $= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80^\circ \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ . (2 \sin 80^\circ \sin 40^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ \{\cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ)\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ \{\cos 40^\circ - \cos 120^\circ\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ \{\cos 40^\circ - (-\tfrac{1}{2})\} \quad [\because \cos 120^\circ = -\tfrac{1}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ (\cos 40^\circ + \tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times 2\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin(20^\circ+40^\circ)+\sin(20^\circ-40^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin 60^\circ+\sin(-20^\circ)\}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 20^\circ\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$=\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ=\frac{3}{16}.$$

উদা. 2. $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=2\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}-\cos 20^\circ$

$=2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20=2\times\frac{1}{2}\times\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0.$

উদা. 3. দেখাও যে $\cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\sin 35^\circ.$

$\because\ \sin 25^\circ=\cos(90^\circ-25^\circ),$

$\therefore\ \cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\cos 5^\circ-\sin(90^\circ-25^\circ)$

$=\cos 5^\circ-\cos 65^\circ=2\sin\frac{5^\circ+65^\circ}{2}\sin\frac{65^\circ-5^\circ}{2}$

$=2\sin 35^\circ\sin 30^\circ=2\sin 35^\circ\times\frac{1}{2}=\sin 35^\circ.$

উদা. 4. প্রমাণ কর: $\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{A+B}{2}.$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\cot\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর:

$$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 5\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta}=\tan 3\theta.$$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(\sin 5\theta+\sin\theta)+(\sin 4\theta+\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta+\cos\theta)+(\cos 4\theta+\cos 2\theta)}$$

$$=\frac{2\sin 3\theta\cos 2\theta+2\sin 3\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta\cos 2\theta+2\cos 3\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}{2\cos 3\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\tan 3\theta$$

উদা. 6. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$ $-\sin(A+B+C)$-কে তিনটি sine এর গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশি $=2\sin C\cos(B-A)+2\cos(A+B)\sin(-C)$

$$=2\sin C\cos(B-A)-2\cos(A+B)\sin C$$
$$=2\sin C\{\cos(B-A)-\cos(A+B)\}$$
$$=2\sin C(2\sin B\sin A)=4\sin A\sin B\sin C.$$

উদা. 7. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$-কে চারটি cosine-এর যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশি $=2\cos\alpha\,2\cos\beta\cos\gamma$

$$=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$$
$$=2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma).$$

উদা. 8. $\sin A=m\sin B$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{A+B}{2}.$$

$\because\ \sin A=m\sin B,\quad \therefore\ \dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{m}{1},$

$\therefore$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{m-1}{m+1},$

$$\therefore\ \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{m-1}{m+1},\text{ বা, }\cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}$$

$$\text{বা, }\tan\frac{A-B}{2}=\frac{m-1}{m+1}\times\frac{1}{\cot\frac{A+B}{2}}=\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, n জোড় হইলে কিংবা বিজোড় হইলে $\left(\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$-এর মান যথাক্রমে $2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$ কিংবা শূন্য হইবে। [P. U. '33]

এখানে বামপক্ষ

$$=\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n+\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\left(-\frac{A-B}{2}\right)}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left\{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{-\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}\right\}^n$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$$

এক্ষণে, n যদি জোড় (even) হয়, তবে $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ধনাত্মক হইয়া $\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$-হইবে, সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=2\cot^n\frac{A-B}{2}$

আবার, n যদি বিজোড় (odd) হয়, তবে $\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ পদটি ঋণাত্মক হইয়া $-\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^n$ এর সমান হইবে, সুতরাং তখন প্রদত্ত রাশি $=0$.

উদা. 10. $\sin\theta+\sin\phi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\phi=b$ হইলে দেখাও যে, $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

$\because\ \sin\theta+\sin\phi=a,\quad\therefore\ 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=a\cdots(1)$

আবার, $\because\ \cos\theta+\cos\phi=b,\ \therefore\ 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=b\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2)এর বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই

$$4\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}+4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2,$$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\left\{\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}+\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\right\}=a^2+b^2,$

বা, $4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2$ [$\because$ বামপক্ষের অপর উৎপাদকটি $=1$.]

$$\therefore\ \cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}\ \cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\theta-\phi}{2}=1-\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$=1-\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে, (4)কে (3) দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{4-a^2-b^2}{4}\times\frac{4}{a^2+b^2}=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

উদা. 11. $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হইলে প্রমাণ কর

যে, $\dfrac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\dfrac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\dfrac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$

[Pat. '45]

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)}\cdots\cdots(1)$

$$\frac{y}{z}=\frac{\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\gamma)}\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{z}{x}=\frac{\tan(\theta+\gamma)}{\tan(\theta+\alpha)}\cdots\cdots(3)$$

এক্ষণে (1) হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}$$

$$=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

[লব ও হরকে $\sin(\alpha-\beta)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$\therefore\quad \frac{x+y}{x-y}.\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)\}\quad(4)$$

অনুরূপে (2) হইতে পাই $\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)\}\cdots(5)$$

এবং (3) হইতে পাই $\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)\cdots(6)$$

এক্ষণে (4), (5), (6) যোগ করিয়া পাই

প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}\times\{0\}=0.$

প্রশ্নমালা 8

যোগফল বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর :—

1. $2\sin 5\theta\cos 2\theta$ 2. $2\cos 7\theta\sin 8\theta$

3. $\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{7\theta}{2}$ 4. $2\sin 3A\sin(A+B)$

গুণফলরূপে প্রকাশ কর :—

5. $\sin 80^\circ+\sin 40^\circ$ 6. $\sin 3\theta-\sin 7\theta$

7. $\cos 7A+\cos 3A$ 8. $\cos 7\theta-\cos 9\theta$

মান নির্ণয় কর :—

9. $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$

10. $\sin 78^\circ-\sin 18^\circ+\cos 132^\circ+\cos\frac{\pi}{3}$

11. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

12. $\sqrt{3}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

13. $\dfrac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ+\cos 15^\circ}$

সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে অভেদগুলি প্রমাণ কর :—

14. $\dfrac{\sin\theta+\sin\alpha}{\cos\theta+\cos\alpha}=\tan\dfrac{(\theta+\alpha)}{2}$

15. $\dfrac{\sin 2\theta+\sin 3\theta}{\cos 2\theta-\cos 3\theta}=\cot\dfrac{\theta}{2}$

16. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta$

17. $\dfrac{\cos(2A-3B)+\cos 3B}{\sin(2A-3B)+\sin 3B}=\cot A$

18. $\cos 95° + \cos 25° = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 10° + \sin 10°)$

19. $\cos \theta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 0$

20. $\frac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°} = \tan 35°$

21. $\sin^2 5\theta - \sin^2 3\theta = \sin 8\theta \sin 2\theta$

22. $\frac{\cos (A+B) - 2 \cos A + \cos (A-B)}{\sin (A+B) - 2 \sin A + \sin (A-B)} = \cot A$

23. $\cos 10° - \sin 40° = \sin 20°$

24. $\frac{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A}{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A} = \tan 2A$

25. $4 \cos \theta \cos (120° + \theta) \cos (120° - \theta) = \cos 3\theta$

26. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos (A+B+C)$

$= 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$ [A. U. '45]

27. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A+B+C)$-কে তিনটি sine-এর গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

28. $4 \sin A \cos B \cos C$-কে চারিটি sine-এর যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

29. $\text{cosec } A + \sec A = \text{cosec } B + \sec B$ হইলে $\tan A \tan B = \cot \frac{1}{2}(A+B)$. [P. U. '36]

30. $\cos A = k \cos B$ হইলে দেখাও যে,

$\cot \frac{1}{2}(A+B) = \frac{k+1}{k-1} \tan \frac{1}{2}(B-A).$

31. $\cos A + \cos B = \frac{1}{3}$ এবং $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ হইলে, $\tan \frac{1}{2}(A+B)$-এর মান নির্ণয় কর।

32. সরল কর : $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}$ [A. U. '48]

33. $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ এবং $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$.

34. $\sin A + \sin B = a$ এবং $\cos A + \cos B = b$ হইলে, $\cot \frac{A-B}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

35. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = k = x \cos \beta + y \sin \beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

নবম অধ্যায়

গুণিতক কোণ

§ 9·1. 2A কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios of angle 2A).

A কোণের গুণিতক (multiple) 2A কোণ, কারণ 2A কোণটি A কোণের দ্বিগুণ। অনুরূপ 3A, 4A প্রভৃতি কোণগুলিকে গুণিতক কোণ বলা হয়। এখানে গুণিতক কোণের কোণানুপাত নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(*a*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, A ও B-এর যে কোন মানে

$\sin (A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$ এবং

$\cos (A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$.

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে B=A ধরিয়া পাই

$\sin 2A=\sin A \cos A+\cos A \sin A=2 \sin A \cos A \cdots(1)$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে B=A ধরিয়া পাই

$\cos 2A=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A \cdots(2)$

$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2 \cos^2 A-1 \cdots(3)$

[অথবা (2) হইতে] $=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2 \sin^2 A \cdots(4)$

অতএব, $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2 \cos^2 A-1=1-2 \sin^2 A$ হইল।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (3) ও (4) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$1+\cos 2A=2 \cos^2 A \cdots(5)$, এবং $1-\cos 2A=2 \sin^2 A \cdots(6)$

অতএব, $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\dfrac{2 \sin^2 A}{2 \cos^2 A}=\tan^2 A$ [$\cos 2A \neq -1$ হইলে]

(*b*) পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে

$$\tan (A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}$$

এবং $$\cot (A+B)=\frac{\cot A \cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

এক্ষণে প্রথম সূত্রটিতে B=A বসাইয়া পাই

$$\tan 2A=\frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} \cdots(7)$$

আবার দ্বিতীয় সূত্রটিতে $B=A$ ধরিয়া পাই

$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}\cdots(8)$$

§ 9·2. **3A কোণের কোণানুপাত** (Trigonometrical ratios of angle 3A).

পূর্বের সূত্রগুলি হইতে পাই

(i) $\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$

$$=2\sin A\cos A.\cos A+(1-2\sin^2 A).\sin A$$
$$=2\sin A.\cos^2 A+\sin A-2\sin^3 A$$
$$=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$$
$$=2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A$$
$$=3\sin A-4\sin^3 A.$$

অতএব, $\mathbf{\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A}$.

(ii) $\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$

$$=(2\cos^2 A-1)\cos A-2\sin A\cos A.\sin A$$
$$=2\cos^3 A-\cos A-2\sin^2 A\cos A$$
$$=2\cos^3 A-\cos A-2(1-\cos^2 A)\cos A$$
$$=4\cos^3 A-3\cos A.$$

অতএব, $\mathbf{\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A}$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরে দেখা গেল যে $\sin 3A$ বা $\cos 3A$ নির্ণয়ের সময় $\cos 2A$-র মান বসাইতে হইয়াছে, কিন্তু $\cos 2A$-র মান $2\cos^2 A-1$ এবং $1-2\sin^2 A$ দুইই হইতে পারে। অতএব উহার কোন্ মানটি বসাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার জন্য মনে রাখিবে যে sine-এর মান নির্ণয়ের জন্য $\cos 2A$-র sine দ্বারা প্রকাশিত মানটি এবং cosine-এর মান নির্ণয়ের জন্য $\cos 2A$-র cosine দ্বারা প্রকাশিত মানটি বসাইতে হয়।]

(iii) সংশ্লিষ্ট কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে

$$\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$$

$$=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan A}.\ \tan A}=\frac{\dfrac{2\tan A+\tan A-\tan^3 A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$$

§ 9·3. tan A নির্ণেয় হইলে, sin 2A ও cos 2Aকে tan A-র আকারে প্রকাশ। [C. U. '31]

$$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}$$

[$\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$]

$$=\frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}}$$ [লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

অন্যরূপে প্রমাণ : $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=2\frac{\sin A}{\cos A}.\cos^2 A=2\tan A.\cos^2 A$$

$$=2\tan A.\ \frac{1}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A-\cos^2 A.\ \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\cos^2 A\,(1-\tan^2 A)=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের সূত্রগুলিতে প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে A-র উচ্চতর যে কোন গুণিতক কোণেরই কোণানুপাতগুলি A কোণের কোণানুপাতে প্রকাশ করা যায়। এ পর্যন্ত প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়।]

উদাহরণমালা 9

উদা. 1. $\cos 4\theta$কে $\sin\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর।

$$\cos 4\theta=\cos 2(2\theta)=1-2\sin^2 2\theta=1-2(\sin 2\theta)^2$$
$$=1-2(2\sin\theta\cos\theta)^2=1-8\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-8\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta)=1-8\sin^2\theta+8\sin^4\theta.$$

উদা. 2. $\sin A=\frac{3}{5}$ হইলে $\cos 2A$-র মান নির্ণয় কর।

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A=1-2\times\tfrac{9}{25}=\tfrac{7}{25}.$$

উদা. 3. $\cos 2A=\frac{24}{25}$ হইলে, tan A-র মান নির্ণয় কর।

$$\because\ \cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A},\quad \therefore\ \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\frac{24}{25}.$$

$$\therefore \quad \frac{2}{2\tan^2 A} = \frac{49}{1}$$ (যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা),

বা, $\tan^2 A = \frac{1}{49}$, $\therefore \tan A = \pm\frac{1}{7}$.

উদা. 4. $\cos A = \frac{4}{5}$ এবং A সূক্ষ্মকোণ হইলে, $\sin 3A$-র মান নির্ণয় কর।

$\because \cos A = \frac{4}{5}$, $\therefore \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

এক্ষণে, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3\times\frac{3}{5} - 4(\frac{3}{5})^3$

$= \frac{9}{5} - \frac{108}{125} = \frac{117}{125}$.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\cos^2(45^\circ - \theta) - \sin^2(45^\circ - \theta) = \sin 2\theta$.

বামপক্ষ $= \cos^2 A - \sin^2 A$ [$A = 45^\circ - \theta$ ধরিয়া]

$= \cos 2A = \cos 2(45^\circ - \theta) = \cos(90^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta$.

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\sin 8\theta = 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

বামপক্ষ $= \sin 8\theta = \sin 2(4\theta) = 2\sin 4\theta\cos 4\theta$

$= 2.2\sin 2\theta\cos 2\theta.\cos 4\theta$ [$\because \sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$]

$= 2.2.2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

[$\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$]

$= 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$

$= \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2A)$.

বামপক্ষ $= (\cos^2 A)^3 + (\sin^2 A)^3$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^4 A - \cos^2 A\sin^2 A + \sin^4 A)$

$= (\cos^4 A - \sin^2 A\cos^2 A + \sin^4 A)$.

[$\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1$]

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)^2 - 3\sin^2 A\cos^2 A$

$= 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$ [প্রমাণিত হইল]

$= 1 - 3\times(\frac{1}{2}\sin 2A)^2$ [$\because \sin 2A = 2\sin A\cos A$]

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2A = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2A$

$= \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2A)$.

উদা. 8. দেখাও যে, $\cot\theta$ ও $\tan\theta$ নির্ণেয় হইলে $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$.

বামপক্ষ $= \cot\theta - \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\cot^2\theta - 1}{\cot\theta} = 2\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = 2\cot 2\theta$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$. [C.U. '38]

বামপক্ষ$=\frac{(1-\cos 2\theta)+\sin 2\theta}{(1+\cos 2\theta)+\sin 2\theta}$

$=\frac{2\sin^2\theta+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}$ [§ 9·1 সূত্র 5 ও 6]

$=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\tan\theta$.

উদা. 10. প্রমাণ কর : $\cos^2 A+\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)=\frac{3}{2}$.

§ 9·1 সূত্র (5) হইতে, $1+\cos 2A=2\cos^2 A$.

$\therefore \cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)\cdots\cdots\cdots(1)$

এবং $A=60°+A$ ও $60°-A$ বসাইয়া যথাক্রমে পাই,

$\cos^2(60°+A)=\frac{1}{2}\{1+\cos(120°+2A)\}\cdots\cdots\cdots(2)$

এবং $\cos^2(60°-A)=\frac{1}{2}\{1+\cos(120°-2A)\}\cdots\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে, (1), (2) ও (3) যোগ করিয়া পাই,

$\cos^2 A+\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)$

$=\frac{1}{2}\{1+\cos 2A\}+\frac{1}{2}\{1+\cos(120°+2A)\}$
$+\frac{1}{2}\{1+\cos(120°-2A\}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{\cos 2A+\cos(120°-2A)+\cos(120°+2A)\}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos 2A+2.\cos\frac{120°+2A+120°-2A}{2}\times\right.$
$\left.\cos\frac{120°+2A-120°+2A}{2}\right\}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+2\cos 120°\cos 2A)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{\cos 2A+2.(-\frac{1}{2}).\cos 2A\}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2A)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}.0=\frac{3}{2}$.

উদা. 11. $\tan\theta=\frac{x}{y}$ হইলে, $x\sin 2\theta+y\cos 2\theta$-র মান নির্ণয় কর। [B. H. U, '40]

$\because \tan\theta=\frac{x}{y}$, $\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{y}$, $\therefore y\sin\theta=x\cos\theta$.

এক্ষণে, $x\sin 2\theta+y\cos 2\theta=2.x\sin\theta\cos\theta+y(1-2\sin^2\theta)$
$=2\sin\theta.x\cos\theta+y(1-2\sin^2\theta)$
$=2\sin\theta.y\sin\theta+y(1-2\sin^2\theta)$
$=2y\sin^2\theta+y(1-2\sin^2\theta)=y$.

উদা. 11. প্রমাণ কর যে $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$ [B. H. U. '57]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\dfrac{1}{\cos 8A}-1}{\dfrac{1}{\cos 4A}-1}=\frac{1-\cos 8A}{\cos 8A}\times\frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$$

$$=\frac{2\sin^2 4A.\cos 4A}{\cos 8A\ 2.\sin^2 2A}$$

$$=\frac{2\sin 4A\cos 4A\times\sin 4A}{\cos 8A.\ 2\sin^2 2A}=\frac{\sin 8A}{\cos 8A}\times\frac{\sin 4A}{2\sin^2 2A}$$

$$=\tan 8A\times\frac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A}=\tan 8A\times\frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$=\tan 8A\ \cot 2A=\tan 8A\times\frac{1}{\tan 2A}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}.$$

উদা. 12. দেখাও যে, $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)$
$-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ রাশিটি θ নিরপেক্ষ।

[P. U. '46]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\cos^2\theta+(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)^2$$
$$-2\cos\alpha\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta+\cos^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta-2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$$
$$-2\cos^2\alpha\cos^2\theta+2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$$
$$=\cos^2\theta-\cos^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta-\cos^2\theta(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha(1-\cos^2\theta)$$
$$=\cos^2\theta-\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\theta\sin^2\alpha$$

$=\sin^2\alpha$, ইহা θ নিরপেক্ষ।

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

$$=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta),$$

$$\because\ 1+\sec 2\theta=1+\frac{1}{\cos 2\theta}=1+\frac{1}{\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=1+\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1-\tan^2\theta+1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2}{1-\tan^2\theta},$$

$\therefore$ উভয় পক্ষকে $\tan\theta$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\tan\theta(1+\sec 2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta.$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\tan 2\theta.\ (1+\sec 2^2\theta)=\tan 2^2\theta$, $\tan 2^2\theta(1+\sec 2^3\theta)=\tan 2^3\theta, \cdots\cdots$, $\tan 2^{n-1}\theta(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta$.

$$\therefore \tan\theta(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta.$$

$$\therefore \frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$$

উদা. 14. (*a*) $\theta=\dfrac{\pi}{2^n+1}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta=1.$$

(*b*) $\theta=\dfrac{\pi}{2^n-1}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta=-1.$$

(*a*) $2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta$

$$=\frac{2^{n-1}}{\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta$$

$$=\frac{2^{n-1}}{\sin\theta}\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta$$

$$=\frac{2^{n-2}}{\sin\theta}2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta$$

$$=\frac{2^{n-3}}{\sin\theta}2\sin 2^2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta$$

$$=\frac{2^{n-4}}{\sin\theta}2\sin 2^3\theta\cos 2^3\theta\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta$$

....

$$=\frac{1}{\sin\theta}2\sin 2^{n-1}\cos 2^{n-1}\theta=\frac{1}{\sin\theta}\sin 2^n\theta.$$

এক্ষণে, $\because \theta=\dfrac{\pi}{2^n+1}$, $\therefore (2^n+1)\theta=\pi$, বা, $2^n\theta=\pi-\theta$

$$\therefore \sin 2^n\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta.$$

সুতরাং $2\ \cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^{n-1}\theta$

$$=\frac{\sin 2^n\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1.$$

(*b*) উদাহরণ (*a*)-এর ন্যায়

বামপক্ষ $=\frac{\sin 2^n\theta}{\sin\theta}$.

কিন্তু এখানে $\theta=\frac{\pi}{2^n-1}$ $\therefore$ $2^n\theta-\theta=\pi$

বা. $2^n\theta=\pi+\theta$ $\therefore$ $\sin 2^n\theta=\sin(\pi+\theta)$

$=-\sin\theta$.

সুতরাং বামপক্ষ $=\frac{-\sin\theta}{\sin\theta}=-1$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণে *n*-এর বিভিন্ন অখণ্ড মানের জন্য বিভিন্ন অভেদ প্রমাণ করা যায়। প্রশ্নমালা 9 প্রশ্ন 27 দেখ।]

প্রশ্নমালা 9

1. cot A = 3 হইলে, tan 2A-র মান নির্ণয় কর।

2. sec θ = 3 হইলে, cos 3θ-র মান নির্ণয় কর।

3. sin 2A = ·28 হইলে, tan A-র মান নির্ণয় কর।

4. সরল কর : $\sin 3A \operatorname{cosec} A-\frac{\cos 3A}{\cos A}$.

সংশ্লিষ্ট কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ কর :—

5. $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\cot\theta$.

6. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$. [C. U. '47]

7. $\cos^4A-\sin^4A=\cos 2A$. **8.** $\frac{1+\tan^2A}{1-\tan^2A}=\sec 2A$.

9. $\frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

10. $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)=3\cot 3A$. [Pat. '45]

11. $\frac{\cot 3\theta+\sin 3\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=1+2\sin 2\theta$.

12. $\sin^3A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$. [P. U. '39]

13. $4(\cos^3 20^\circ+\sin^3 10^\circ)=3(\cos 20^\circ+\sin 10^\circ)$.

14. $\cos^3A\cos 3A+\sin^3A\sin 3A=\cos^3 2A$. [P. U. '39, '43]

15. $\cos 3\theta \sin 2\theta - \cos 4\theta \sin \theta = \dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{cosec} \theta}$.

16. $2 \operatorname{cosec} 2A = \tan A + \cot A$. [B. H. U. '43]

17. $4 \sin^3\theta \cos 3\theta + 4 \cos^3\theta \sin 3\theta = 3 \sin 4\theta$.

[**সংকেত :** $4 \sin^3\theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$, এবং
$4 \cos^3\theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$]

18. $\dfrac{\sin (A+3B) + \sin (3A+B)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2 \cos (A+B)$. [A. U. '47]

19. $\cos 4x - \cos 4y = 8(\cos x - \cos y)(\cos x + \cos y)$
$\times (\cos x - \sin y)(\cos x + \sin y)$. [P. U, '36]

20. $\dfrac{\sin 4A\ (1-\cos 2A)}{\cos 2A\ (1-\cos 4A)} = \tan A$.

21. প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan (45° + \theta) - \tan (45° - \theta) = 2 \tan 2\theta$.

(ii) $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \sec \alpha + \tan \alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}\right)}$

22. $\dfrac{1}{\tan 3\alpha - \tan \alpha} - \dfrac{1}{\cot 3\alpha - \cot \alpha} = \cot 2\alpha$.

23. $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হইলে দেখাও যে, $\tan (\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$.

[C. U. '46 ; P, U. '47]

24. $\tan \theta = \sec 2\alpha$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\sin 2\theta = \dfrac{1 - \tan^4\alpha}{1 + \tan^4\alpha}$.

[P. U. '40]

25. α এবং β সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha = \dfrac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$ হইলে, প্রমাণ কর $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$. [C. U. '50]

26. $\tan \theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan \phi = \frac{1}{3}$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos 2\theta = \sin 4\phi$. [A. U. '50]

27. (*a*) $15\theta = \pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos 8\theta = -\frac{1}{16}$.

(*b*) $17\theta = \pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos 8\theta = \frac{1}{16}$.

(c) $\theta=\frac{2\pi}{31}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta\cos8\theta\cos16\theta=\frac{1}{32}$.

28. $13\theta=\pi$ হইলে দেখাও যে,

$$\cos\theta\cos2\theta\cos3\theta\cos4\theta\cos5\theta\cos6\theta=\frac{1}{2^6}.$$

29. প্রমাণ কর যে, $$\frac{2\cos2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta-1)(2\cos2\theta-1)\times(2\cos2^2\theta-1)\cdots(2\cos2^{n-1}\theta-1).$$

দশম অধ্যায়

অংশ কোণ

§ 10·1. কোন একটি কোণের $\frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{3}$ বা যে কোন অংশকে ঐ কোণের অংশ কোণ (submultiple angle) বলা হয়। $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{3}$ কোণ দুইটি A কোণের অংশ কোণ।

গুণিতক কোণগুলি সম্বন্ধে আমরা নিম্নের সূত্রগুলি প্রমাণ করিয়াছি :—

(1) $\sin2A=2\sin A\cos A$

(2) $\cos2A=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$;
$[1+\cos2A=2\cos^2A;\ 1-\cos2A=2\sin^2A]$

(3) $\tan2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে।

কোন একটি কোণ অপর কোণের দ্বিগুণ হইলেই উপরের সূত্রগুলি সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে, ঐ সূত্রগুলিতে A-এর স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া (সুতরাং 2A-এর স্থানে $2.\frac{A}{2}$ বা A বসাইয়া) যথাক্রমে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :—

(4) $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

(5) $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}$.
$\left[1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2},\ 1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}\right]$

(6) $\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে।

§ **10·2.** গুণিতক কোণ সম্বন্ধে পূর্বে নিম্নের তিনটি সূত্র প্রমাণিত হইয়াছে :—

(1) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(2) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(3) $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$, সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে।

কোন একটি কোণ অন্য একটি কোণের তিনগুণ হইলেই উপরের সূত্র তিনটি সর্বক্ষেত্রে সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে, ঐ সূত্রগুলিতে A-র স্থানে $\frac{A}{3}$ বসাইয়া (সুতরাং 3A-র স্থানে $3 . \frac{A}{3}$ বা A বসাইয়া) পাই :—

(4) $\sin A = 3 \sin \frac{A}{3} - 4 \sin^3 \frac{A}{3}$

(5) $\cos A = 4 \cos^3 \frac{A}{3} - 3 \cos \frac{A}{3}$

(6) সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে

$$\tan A = \frac{3 \tan \frac{A}{3} - \tan^3 \frac{A}{3}}{1 - 3 \tan^2 \frac{A}{3}}$$

অনুসিদ্ধান্ত : (1) $\because \quad \sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$,

$\therefore$ A-র স্থানে $\frac{A}{2}$ বসাইয়া পাই $\sin A = \dfrac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$

(ii) $\because \quad \cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$, $\therefore \cos A = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$.

§ **10·3.** $\cos A$ দ্বারা $\frac{A}{2}$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

$\because \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$, $\therefore \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$

$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$....(i)

আবার, $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A)$,

$\therefore \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)} \cdots$ (ii)

অতএব, $\tan \frac{A}{2}$ নির্ণেয় হইলে

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \cdots\cdots \text{(iii)}$$

এখন অপর অনুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

§ **10·4.** চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা :

উপরের অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে cos A-র মান হইতে $\sin \frac{A}{2}$ ও $\cos \frac{A}{2}$-এর দুইটি মান পাওয়া যায়। ঐ মান দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। এইরূপ দুইটি মান প্রাপ্ত হওয়ার কারণ এই যে, যদি কেবল cos A-র মান জানা থাকে, কিন্তু A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে, তবে A-র সুতরাং $\frac{A}{2}$এরও একটি মান-শ্রেণী হইতে পারে। যদি ঐ মান-শ্রেণীর ক্ষুদ্রতম কোণ α ধরা হয়, তবে $A = 2n\pi \pm \alpha$ হইবে (এখানে n যে কোন পূর্ণসংখ্যা)

অতএব $\sin \frac{A}{2}$ ও $\cos \frac{A}{2}$-এর মান নির্ণয় করিবার জন্য আমরা প্রকৃতপক্ষে $\sin \frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$ ও $\cos \frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$-এর মান নির্ণয় করিতেছি।

এক্ষণে, $\sin \frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha) = \sin\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$

$= \sin n\pi \cos \frac{\alpha}{2} \pm \cos n\pi \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sin \frac{\alpha}{2}$,

কারণ, $\sin n\pi = 0$ এবং $\cos n\pi = \pm 1$.

আবার, $\cos \frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha) = \cos\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$

$= \cos n\pi \cos \frac{\alpha}{2} \pm \sin n\pi \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \cos \frac{\alpha}{2}$.

অতএব, যদি A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকে এবং কেবল cos A-র মান জানা থাকে, তবে $\sin \frac{A}{2}$ ও $\cos \frac{A}{2}$-এর দুইটি করিয়া মান হইবে।

আর যদি A-র মানও জানা থাকে, কিংবা A-র মানের সীমা (যথা 450° ও 540°-র মধ্যে ইত্যাদি) জানা থাকে, তবে $\sin \frac{A}{2}$ বা $\cos \frac{A}{2}$-এর

মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে, সে বিষয়ে আর কোন অনিশ্চয়তা (ambiguity) থাকে না। তখন উহা কোন্ পাদে (quadrant-এ) অবস্থিত জানা যাইবে এবং উহার চিহ্নও নির্দিষ্ট হইবে।

উদাহরণ। $\cos 330°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে $\sin 165°$ ও $\cos 165°$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\sin 165°=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 330°}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

আবার $\cos 165°=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 330°)}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}$

$$=\pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

এক্ষণে, 165° কোণ দ্বিতীয় পাদে (quadrantএ) অবস্থিত বলিয়া উহার sine ধনাত্মক এবং cosine ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore\ \sin 165°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. এবং $\cos 165°=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

§ 10·5. $\sin A$ **দ্বারা** $\sin\frac{A}{2}$ **ও** $\cos\frac{A}{2}$ **এর মান নির্ণয়।**

$\because\ \sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1\cdots\ (1)$

এবং $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A,$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\cdots\cdots(3)$$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A,$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(4)$$

এক্ষণে (3) ও (4) যোগ করিয়া পাই

$$2 \sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A},$$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A} \cdots\cdots(5)$$

অনুরূপে (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\cos \frac{A}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A} \cdots\cdots(6)$$

§ 10·6. চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা :

উপরের (5) ও (6) সূত্র দুইটি হইতে দেখা যায় যে, sin A-এর একটি মানের জন্য $\sin \frac{A}{2}$ বা $\cos \frac{A}{2}$-এর চারিটি মান হয়।

যদি কেবলমাত্র sin A-এর মান জানা থাকে, কিন্তু A কোণ সম্বন্ধে অন্য কিছু জানা না থাকে, তবে A-এর একটি মান-শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন মান হইতে পারে। মনে কর α ঐ মান-শ্রেণীর অন্তর্গত ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ। অতএব $A = n\pi + (-1)^n\alpha$, সুতরাং $\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\}$ এবং $\cos \frac{A}{2} = \cos \frac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\}$.

এক্ষণে (i) যদি n জোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর $n = 2m$.

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\} = \sin\left\{m\pi + (-1)^{2m}\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin m\pi \cos \frac{\alpha}{2} + \cos m\pi \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= \pm \sin \frac{\alpha}{2} \; [\because \; \sin m\pi = 0 \text{ এবং } \cos m\pi = \pm 1]$$

(ii) যদি n বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে মনে কর $n = 2m+1$.

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}\{n\pi + (-1)^n\alpha\} = \sin \tfrac{1}{2}\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha\}$$

$$= \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \; [\because (-1)^{2m+1} = -1]$$

$$= \sin m\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos m\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

অতএব দেখা গেল যে, কেবল sin A-এর মান জানা থাকিলে এবং A সম্বন্ধে আর কিছু জানা না থাকিলে $\sin\frac{A}{2}$-এর চারিটি মান পাওয়া যায়।

অনুরূপে দেখা যায় যে, এইরূপ ক্ষেত্রে

$\cos\frac{A}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}$ বা $\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$, অর্থাৎ $\cos\frac{A}{2}$-এরও চারিটি মান পাওয়া যায়।

এখন দেখ, $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[\because \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}.$$

আবার, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

অতএব, যদি A জানা থাকে, তবে $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ও $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$-এর চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্দিষ্টভাবে জানা যায় এবং চিহ্ন সম্বন্ধে আর কোন অনিশ্চতা থাকে না।

§ 10·7. tan A দ্বারা $\tan\frac{A}{2}$-এর মান নির্ণয়।

সূত্র হইতে পাই $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

$\therefore\quad \tan A-\tan A\tan^2\frac{A}{2}=2\tan\frac{A}{2}$ (বজ্রগুণন দ্বারা),

বা, $\tan A\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$, ইহা একটি $\tan\frac{A}{2}$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ। এই সমীকরণটি সমাধান করিয়া পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-(4\tan A)\times(-\tan A)}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+\tan^2 A}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

[পূর্ব অনুচ্ছেদগুলিতে চিহ্নের অনিশ্চয়তা (ambiguity) সম্বন্ধে যে যুক্তি দেখান হইয়াছে, এস্থলেও তাহা প্রযোজ্য।]

§ 10·8. $18°, 36°, 54°, 72°$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(i) মনে কর, $A=18°$, সুতরাং $5A=90°$, $\therefore\ 2A=90°-3A.$

$\therefore\ \sin 2A=\sin(90°-3A)=\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

বা, $2\sin A\cos A=\cos A(4\cos^2 A-3).$

এক্ষণে, $\because\ A=18°,\ \therefore\ \cos A\neq 0,$

$\therefore\ 2\sin A=4\cos^2 A-3=4(1-\sin^2 A)-3=1-4\sin^2 A,$

বা, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0.$

$$\therefore\ \sin A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times4\times-1}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

এখানে A একটি সূক্ষ্মকোণ বলিয়া sin A ধনাত্মক, সুতরাং উপরে লব্ধ মান দুইটির মধ্যে কেবল ধনাত্মক মানটিই গ্রহণ করিতে হইবে।

$$\therefore\ \sin 18°=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

আবার, $\cos 18°=+\sqrt{1-\sin^2 18°}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

(ii) $\cos 36°=\cos 2.18°=1-2\sin^2 18°$

$$=1-2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$\sin 36°=\sqrt{1-\cos^2 36°}=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$$

$$=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}(6+2\sqrt{5})}=\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(iii) $54°$ কোণ, $36°$ কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$\sin 54°=\cos 36°=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

এবং $\cos 54°=\sin 36°=\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

(iv) $72°$ কোণ, $18°$ কোণের পূরক কোণ বলিয়া

$$\sin 72° = \cos 18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

এবং $\cos 72° = \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. $\sin 15°$ এবং $\cos 15°$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\cos 15° + \sin 15° = +\sqrt{1+\sin 30°} = \sqrt{1+\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdots \text{(i)}$$

$$\cos 15° - \sin 15° = +\sqrt{1-\sin 30°} = \sqrt{1-\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই $2\cos 15° = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই $2\sin 15° = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

উদা. 2. $\sin\frac{\pi}{8}$ এবং $\cos\frac{\pi}{8}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin 22\tfrac{1}{2}° = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 45°)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos 22\tfrac{1}{2}° = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 45°)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

উদা. 3. দেখাও যে, $\cos 7°30' = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[Pat. '38]

$$7°30' \times 2 = 15°;$$

$$\therefore \quad 2\cos^2 7°30' = 1 + \cos 15° = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos^2 7°30' = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} = \tfrac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

[$\sqrt{2}$ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করিয়া]

আবার, $\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$=\frac{1}{16}(6+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$=\frac{1}{8}(3+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})=\frac{1}{8}(4+\sqrt{6}+\sqrt{2}).$

$\therefore\ \cos^2 7°30'=\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$\therefore\ \cos 7°30'=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

উদা. 4. $\sin 3°$ ও $\cos 3°$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sin 3°=\sin(18°-15°)=\sin 18°\cos 15°-\cos 18°\sin 15°$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}.\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})$

$\cos 3°=\cos(18°-15°)=\cos 18°\cos 15°+\sin 18°\sin 15°$

$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}+1)+\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$

দ্রষ্টব্য : এ পর্যন্ত 3°, 15°, 18°, 30°, 36°, 45° কোণের কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছে বলিয়া উহাদের সাহায্যে 3° কোণের যে-কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিও জানা যাইবে। কারণ, $6°=36°-30°$; $9°=45°-36°$; $12°=30°-18°$; $21°=36°-15°$ ইত্যাদি।

3°-র গুণিতক যদি 45° অপেক্ষা বড় হয়, তবে তাহার পূরক কোণ (complement) 45° অপেক্ষা ছোট হইবে, সুতরাং ঐ পূরক কোণের কোণানুপাত হইতে 45° অপেক্ষা বৃহত্তর 3°-র গুণিতক কোণগুলিরও কোণানুপাতগুলি জানা যাইবে।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}.$

বামপক্ষ $=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}.$

উদা. 6 প্রমাণ কর যে,

$(\cos^2 66°-\sin^2 6°)(\cos^2 48°-\sin^2 12°)=\frac{1}{16}.$ [C.U. (B.Sc.) '49]

$\because\ \cos 66°=\cos(90°-24°)=\sin 24°,$

এবং $\cos 48^\circ = \cos(90^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ$,

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $= (\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ)(\sin^2 42^\circ - \sin^2 12^\circ)$

$= \sin(24^\circ + 6^\circ)\sin(24^\circ - 6^\circ)\sin(42^\circ + 12^\circ)\sin(42^\circ - 12^\circ)$

$[\because \sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)]$

$= \sin 30^\circ \sin 18^\circ \sin 54^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).\frac{1}{2} = \frac{1}{64}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$

$= \frac{1}{64}\times 4 = \frac{1}{16}$.

উদা. 7. প্রমাণ কর যে,

$$4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ).$$

$\because \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$,

$\therefore \cos 30^\circ = 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ$ $A = 10^\circ$ ধরিয়া]

আবার, $\because \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$,

$\therefore \sin 60^\circ = 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ$ [$A = 20^\circ$ ধরিয়া]

এক্ষণে, $4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 4\cos^3 10^\circ + 4\sin^3 20^\circ$

$= \cos 30^\circ + 3\cos 10^\circ + 3\sin 20^\circ - \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$.

উদা. 8. $\cos A = \frac{4}{5}$ এবং $\cos B = \frac{3}{5}$ (A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ) হইলে $\cos\frac{A-B}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\because \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$,

$\therefore \cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos(A-B)\}}$ [$\theta = A - B$ ধরিয়া]

এক্ষণে, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$, এবং

$\because \cos A = \frac{4}{5}$, $\therefore \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$

$= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ [$\because$ A সূক্ষ্মকোণ]

এবং $\because \cos B = \frac{3}{5}$, $\therefore \sin B = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ [$\because$ B সূক্ষ্মকোণ]

$\therefore \cos(A-B) = \frac{4}{5}\times\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

এক্ষণে $\cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{24}{25})} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

উদা. 9. $270° < \theta < 360°$ এবং $\cos\theta = \frac{119}{169}$ হইলে, $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\because$ θ কোণ 270° অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

$\therefore$ $\frac{\theta}{2}$ অবশ্যই 135° অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এখানে $\sin\frac{\theta}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ ঋণাত্মক হইবে।

এক্ষণে, $\sin\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{119}{169}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$

এক্ষণে, $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$

উদা. 10. দেখাও যে, $\frac{2\sin A - \sin 2A}{2\sin A + \sin 2A} = \tan^2\frac{A}{2}.$

বামপক্ষ $= \frac{2\sin A - 2\sin A\cos A}{2\sin A + 2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A(1-\cos A)}{2\sin A(1+\cos A)}$

$$= \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \tan^2\frac{A}{2}.$$

উদা. 11. প্রমাণ কর :

$$(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}.$$

বামপক্ষ $= \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B + \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A) + (\cos^2 B + \sin^2 B) + 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$= 1 + 1 + 2\cos(A+B) = 2 + 2\cos(A+B)$

$= 2\{1+\cos(A+B)\} = 2\times 2\cos^2\frac{A+B}{2} = 4\cos^2\frac{A+B}{2}.$

উদা. 12. $A = 240°$ হইলে, $2\sin\frac{A}{2} = \sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ উক্তিটি শুদ্ধ কিনা বল? অশুদ্ধ হইলে কি পরিবর্তন প্রয়োজন?

এখানে $A = 240°$, $\therefore$ $\frac{A}{2} = 120°$, সুতরাং $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক এবং $\cos$ ^{A} অপেক্ষা বৃহত্তর ($\because$ এখানে $\cos\frac{A}{2}$ ঋণাত্মক)।

$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}\cdots\cdots(1)$

এবং $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1-\sin A}\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া পাই $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$.

অতএব, এখানে প্রদত্ত উক্তি শুদ্ধ নহে, উহার অমূলদ রাশি দুইটির মধ্যে −চিহ্ন স্থানে + চিহ্ন হইলে শুদ্ধ হইবে।

উদা. 13. $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$ হইলে প্রমাণ কর যে $\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. [Pat. '44]

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\dfrac{1}{\cos(\phi+\alpha)}+\dfrac{1}{\cos(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\dfrac{\cos(\phi-\alpha)+\cos(\phi+\alpha)}{\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $\dfrac{2\cos\phi\cos\alpha}{\cos^2\phi-\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos\phi}$,

বা, $2\cos^2\phi-2\sin^2\alpha=2\cos^2\phi\cos\alpha$,

বা, $2\cos^2\phi-2\cos^2\phi\cos\alpha=2\sin^2\alpha$,

বা, $2\cos^2\phi(1-\cos\alpha)=2\sin^2\alpha$,

বা, $\cos^2\phi=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$\therefore \quad \cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

উদা. 14. $\tan A=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{A}{2}$-এর একটি মান $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

$\because \quad \sec^2A=1+\tan^2A$,

$\therefore$ এখানে $\sec^2A=1+\left(\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}\right)^2$

$=1+\dfrac{\sin^2B\sin^2C}{(\cos B+\cos C)^2}=\dfrac{(\cos B+\cos C)^2+\sin^2B\sin^2C}{(\cos B+\cos C)^2}$

$=\dfrac{(\cos B+\cos C)^2+(1-\cos^2B)(1-\cos^2C)}{(\cos B+\cos C)^2}$

$=\dfrac{\cos^2B\cos^2C+2\cos B\cos C+1}{(\cos B+\cos C)^2}=\dfrac{(1+\cos B\cos C)^2}{(\cos B+\cos C)^2}$

$\therefore \quad \sec A = \dfrac{1+\cos B \cos C}{\cos B + \cos C}, \quad \therefore \quad \cos A = \dfrac{\cos B + \cos C}{1+\cos B \cos C}$

∴ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1+\cos B \cos C - \cos B - \cos C}{1+\cos B \cos C + \cos B + \cos C}$$

$$= \frac{(1-\cos B)(1-\cos C)}{(1+\cos B)(1+\cos C)},$$

$$\therefore \quad \frac{2\sin^2 \frac{A}{2}}{2\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2\sin^2 \frac{B}{2} . 2\sin^2 \frac{C}{2}}{2\cos^2 \frac{B}{2} . 2\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan^2 \frac{A}{2} = \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}. \quad \therefore \quad \tan \frac{A}{2} = \pm \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

অতএব, $\tan \frac{A}{2}$-এর একটি মান $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$ হইল।

প্রশ্নমালা 10

1. $\sin 9^\circ$ ও $\cos 9^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর : $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. [B. H. U. '38]

3. মান নির্ণয় কর : $\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ$.

4. মান নির্ণয় কর : $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ$.

5. মান নির্ণয় কর : $2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

6. প্রমাণ কর : $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \cot \dfrac{\theta}{2}$.

7. প্রমাণ কর : $\dfrac{\cos A}{1-\sin A} = \dfrac{\cot \frac{1}{2}A + 1}{\cot \frac{1}{2}A - 1}$.

8. $\sin A = \dfrac{60}{61}$ এবং $\sin B = \dfrac{4}{5}$ হইলে $\sin^2 \dfrac{A-B}{2}$ এবং $\cos^2 \dfrac{A+B}{2}$-এর মান নির্ণয় কর (A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)।

9. প্রমাণ কর যে, $\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ + \cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{9}{16}$.

10. $\sin^2 72^\circ \cos^2 54^\circ - \sin 54^\circ \cos 72^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।
[C. U. (B. Sc.) '48]

11. $\sin \alpha+\sin \beta=a$ এবং $\cos \alpha+\cos \beta=b$ হইলে $\cos (\alpha+\beta)$ এবং $\tan \frac{\alpha-\beta}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর :—

12. $\sec \theta+\tan \theta=\tan \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$. [C. U. '39]

13. $4(\cos^3 25^\circ+\cos^3 35^\circ)=3(\cos 25^\circ+\cos 35^\circ)$.

14. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ=1$.

15. $\tan \frac{A+B}{2}+\tan \frac{A-B}{2}=\frac{2 \sin A}{\cos A+\cos B}$. [B. H. U. '39]

16. $\cos \frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin \theta \sin \frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos \theta \cos \frac{1}{2}(\phi+\theta)$. [C. U. '50]

17. $16 \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15} \cos \frac{14\pi}{15}=1$. [B. H. U. '47]

18. $\cos^4 \frac{\pi}{8}+\cos^4 \frac{3\pi}{8}+\cos^4 \frac{5\pi}{8}+\cos^4 \frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$. [Part. '38 ; B. H. U. '46]

19. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4 \cos^2 \frac{1}{2}(x-y)$.

20. $\theta=340^\circ$ হইলে $2 \sin \frac{\theta}{2}=-\sqrt{1+\sin \theta}-\sqrt{1-\sin \theta}$ শুদ্ধ কিনা বল। যদি শুদ্ধ না হয়, তবে কি পরিবর্তন করিলে শুদ্ধ হইবে ?

21. $A=320^\circ$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\tan \frac{A}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$.

22. $\cos \theta=\frac{\cos \alpha-\cos \beta}{1-\cos \alpha \cos \beta}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\tan \frac{\theta}{2}$-এর একটি মান $\tan \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2}$. [Pat. '42]

23. $\sin \alpha=-\frac{4}{5}$ এবং $180^\circ<\alpha<270^\circ$ হইলে, $\sin \frac{\alpha}{2}$ এবং $\cos \frac{\alpha}{2}$-এর মান নির্ণয় কর। [Pat, '42]

24. $2 \sin \frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$ এবং $270^\circ>A>180^\circ$ হইলে, শুদ্ধ চিহ্নগুলি কি হইবে ? [B. H. U. '31]

25. $\tan \frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2}$ হইলে দেখাও যে, $\cos \phi=\frac{\cos \theta-e}{1-e \cos \theta}$ [H. S. '67 ; Pat. 40 ; A. U. '44, '46]

[সংকেত: $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{\sqrt{1+e}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-e}\cos\frac{\theta}{2}}$,

বা, $\frac{1}{\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\therefore\ \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}-(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\cos^2\frac{\theta}{2}+(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

আবার, $\cos\phi=\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}$, $\cos\phi=\cdots\cdots$]

26. দেখাও যে,

$$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

একাদশ অধ্যায়

অভেদাবলী

§ **11·1.** তিন বা ততোধিক কোণ কোন সম্বন্ধযুক্ত হইলে সেইগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক অভেদাবলী পাওয়া যায়। বিশেষতঃ যদি তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ (180° বা π) হয়, তবে সেই কোণগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক অভেদ প্রয়োজনীয়। আমরা এখানে সেইগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই অভেদগুলি প্রমাণ করিতে পূর্বের পূরক ও সম্পূরক কোণগুলি (Complementry and Supplementary angles) সম্বন্ধে যে সকল সিদ্ধান্ত স্থাপিত হইয়াছে, সেইগুলি বিশেষ আবশ্যক হইবে।

(1) যদি $A+B+C=\pi=180°$ হয়, তবে উহাদের মধ্যে যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সম্পূরক হইবে। অর্থাৎ

$A+B=180°-C=\pi-C$, $B+C=180°-A$, $A+B=180°-B$.

অতএব, (i) $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C.$

(ii) $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C.$

(iii) $\sin C=\sin(A+B)$. (iv) $\cos C=-\cos(A+B)$.

(v) $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C.$

(vi) $\cot(A+B)=-\cot C.$

(2) যদি $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ=\frac{\pi}{2}$ হয় ($A+B+C=180^\circ$ হইতেও এই সম্বন্ধ পাওয়া যায়), তবে $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ ও $\frac{C}{2}$-এর প্রত্যেকটি অপর দুইটির সমষ্টির পূরক কোণ হইবে, অর্থাৎ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ এবং $\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}$.

অতএব, (i) $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}.$

(ii) $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}.$ (iii) $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}.$

(iv) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$,

$\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}$, ইত্যাদি।

উপরের অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি ও পূর্ব-প্রমাণিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলির সাহায্যে সংশ্লিষ্ট অনুপাতগুলির সংজ্ঞার ক্ষেত্রে নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ করা হইয়াছে।

উদাহরণমালা 11

উদা. 1. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

[C. Pre. U. '64 ; C. U. '33, '37, '38, '53]

বামপক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$[\because A+B=180^\circ-C, \therefore \sin(A+B)=\sin C]$

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$[\because \cos C=-\cos(A+B)]$

$=2\sin C\times 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C.$

উদা. 2. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

বামপক্ষ$=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$[\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$=-2\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}-1$

$=-2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$

$[\because -\cos C=\cos(A+B)]$

$=-2\cos C\times 2\cos A\cos B-1$

$=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

উদা. 3. $A+B+C=180°$ হইলে, দেখাও যে,

$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

$$\tan(2A+2B)=\frac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}.$$

এক্ষণে, $\because 2A+2B+2C=360°,$

$\therefore 2A+2B=360°-2C,$

$\therefore \tan(2A+2B)=\tan(360°-2C)=-\tan 2C.$

অতএব, $-\tan 2C=\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}$

$\therefore \tan 2A+\tan 2B=-\tan 2C+\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

উদা. 4. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [C. U. '50]

বামপক্ষ$=(\sin A+\sin B)+\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left[\because \frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$ $\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

উদা. 5. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$\left[\because \cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}\right]$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$

$\left[\because \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2} \quad \therefore \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\right]$

$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

উদা. 6. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$ [C. U.]

$\because A+B+C=\pi, \quad \therefore A+B=\pi-C,$

$\therefore \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C,$

$\therefore \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$

বা, $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

উদা. 7. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$

ডানপক্ষের $4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$

$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left(2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\right)$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{2}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{\pi+A}{4}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi-A+B-C}{4}+\sin\frac{\pi-A-B+C}{4}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{-2A}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{2B}{4}+\sin\frac{2C}{4}-\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1+\sin\frac{A}{2}\quad\left[\because\ \sin\frac{\pi}{2}=1\right]$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$$

উদা. 8. $A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

ডানপক্ষ $=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\right)$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-(\pi-A)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left(\cos\frac{\pi+A}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\left[\because\ \cos\frac{\pi}{2}=0\right].$$

উদা. 9. $A+B+G=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$ [C.U. '35, '39]

$\because\quad A+B+C=\pi=180°,$

$\therefore\quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°,$ বা, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90°-\frac{C}{2}.$

$\therefore \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$,

বা, $\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$,

বা, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

[বজ্র গুণন দ্বারা]

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

উদা. 10. $A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

[C. U. Pat. U.]

$\because \cos 2A=1-2\sin^2 A, \quad \therefore 2\sin^2 A=1-\cos 2A$

বা, $\sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$. অনুরূপে $\sin^2 B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$.

এক্ষণে, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+1-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

$[\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$=2+\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=2+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=2+\cos C\times 2\cos A\cos B=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 11. $A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

[C. U. '37, '47]

$\because \cos 2A=2\cos^2 A-1,$

$\therefore 2\cos^2 A=1+\cos 2A$, বা, $\cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)$.

অনুরূপে, $\cos^2 B=\frac{1}{2}(1+\cos 2B)$.

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$

$=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$

$[\because A+B=\pi-C. \quad \therefore \cos(A+B)=-\cos C]$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=1-\cos C\times 2\cos A\cos B=1-2\cos A\cos B\cos C.$

$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

উদা. 12. $A+B+C=180^\circ$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

বামপক্ষ $=(\sin A+\sin B)-\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\left[\because \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\times\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

উদা. 13. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, হইলে প্রমাণ কর যে,

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$ [C.U. '38]

$\because \cos 2A=1-2\sin^2 A, \quad \therefore 2\sin^2 A=1-\cos 2A.$

$\therefore \sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A).$ অনুরূপে $\sin^2 B=\frac{1}{2}(1-\cos 2B).$

এক্ষণে, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A+1-\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$

$=1-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin C.\sin C$

$=1-\sin C\cos(A-B)+\sin C.\cos(A+B)$

$\left[\because A+B=\frac{\pi}{2}-C, \quad \therefore \cos(A+B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C.\right]$

$=1-\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=1-\sin C\times 2\sin A\sin B=1-2\sin A\sin B\sin C.$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$

উদা. 14. $A+B+C=180°$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\sin A+\sin B+\sin C.$$

$\because\ A+B+C=180°,\ \therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°,$

$\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\cos\left\{90°-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right\}=\sin\frac{B+C}{2}.$

অনুরূপে, $\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{C+A}{2}$ এবং $\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$.

সুতরাং, প্রদত্ত বামপক্ষ $=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)+\frac{1}{2}(\sin C+\sin A)+\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)=\sin A+\sin B+\sin C.$

উদা. 15. $A+B+C=2\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C=1.$$

$\because\ A+B+C=2\pi=360°,\ \therefore\ A+B=360°-C.$

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos(360°-C)=\cos C$

এক্ষণে, $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)+\cos^2C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2C$

$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos C.\cos C$

$=1+\cos C\cos(A-B)+\cos C\cos(A+B)$

$=1+\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$=1+\cos C\times 2\cos A\cos B=1+2\cos A\cos B\cos C.$

$\therefore\ \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C=1.$

উদা. 16. $A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ [উদা. 1 দেখ]

$=4\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

আবার, $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

[উদা. 4 দেখ]

$$\therefore \text{ প্রদত্ত বামপক্ষ } = \frac{32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 17. $A+B+C=2\theta$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cos^2\theta+\cos^2(\theta-A)+\cos^2(\theta-B)+\cos^2(\theta-C)$
$=2+2\cos A\cos B\cos C.$

$\because \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1, \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta).$

এক্ষণে প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)+1+\cos(2\theta-2A)$
$+1+\cos(2\theta-2B)+1+\cos(2\theta-2C)\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{4+2\cos\frac{2\theta+2\theta-2A}{2}\cos\frac{2\theta-2\theta+2A}{2}\right.$$
$$\left.+2\cos\frac{4\theta-2B-2C}{2}\cos(B-C)\right\}$$

$=2+\cos(2\theta-A)\cos A+\cos(2\theta-B-C)\cos(B-C)$

$=2+\cos(B+C)\cos A+\cos A(B-C)$

[$\because 2\theta-A=B+C$ এবং $2\theta-B-C=A$]

$=2+\cos A\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}$

$=2+\cos A\times 2\cos B\cos C=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 18. $\cos A+\cos B+\cos C=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C.$

বামপক্ষ $=4\cos^3 A-3\cos A+4\cos^3 B-3\cos B$
$+4\cos^3 C-3\cos C$

$=4(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)-3(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=4\times 3\cos A\cos B\cos C-3\times 0$ [$\because \cos A+\cos B+\cos C=0,$
$\therefore \cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C=3\cos A\cos B\cos C$]

$=12\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 19. $x+y+z=xyz$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$ এবং $z=\tan C$.

$\because x+y+z=xyz,$

$\therefore \quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C,$

বা, $\tan A-\tan A \tan B \tan C=-(\tan B+\tan C),$

বা, $\tan A(1-\tan B \tan C)=-(\tan B \tan C)$

বা, $\tan A=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B \tan C}=-\tan(B+C)=\tan\{n\pi-(B+C)\}$

[এখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা]

$\therefore \quad A=n\pi-(B+C), \quad \therefore \quad A+B+C=n\pi.$

$\therefore \quad \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

[উদা. 3-র অনুরূপ পদ্ধতি]

বা, $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$=\dfrac{8\tan A \tan B \tan C}{(1-\tan^2 A)(1-\tan^2 B)(1-\tan^2 C)}$

বা, $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$

বা, $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

$\therefore \quad x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$

$=4xyz$ [উভয়পক্ষকে $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

উদা. 20. $x+y+z=xyz$, হইলে প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}+\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}+\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}.$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$ এবং $z=\tan C$.

$\because \quad x+y+z=xyz,$

$\therefore \quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C$

$\therefore \quad \tan A+\tan B+\tan C-\tan A \tan B \tan C=0 \cdots (1)$

এক্ষণে, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A \tan B \tan C}{1-\tan A \tan B-\tan B \tan C-\tan C \tan A}$

$=0$ [$\because$ (1) হইতে পাই লবটি$=0$]

$=\tan 180^\circ.$

$\therefore \quad A+B+C=n\pi$ (এখানে n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা),

$\therefore \quad 3A+3B+3C=3n\pi, \quad \therefore \quad 3A+3B=3n\pi-3C,$

$\therefore \quad \tan(3A+3B)=\tan(3n\pi-3C)=-\tan 3C.$

আবার, $\tan(3A+3B)=\dfrac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}$,

$\therefore \quad \dfrac{\tan 3A+\tan 3B}{1-\tan 3A\tan 3B}=-\tan 3C,$

$\therefore \quad \tan 3A+\tan 3B=-\tan 3C+\tan 3A\tan 3B\tan 3C$

$\therefore \quad \tan 3A+\tan 3B+\tan 3C=\tan 3A\tan 3B\tan 3C \cdots(2)$

এক্ষণে, $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$ [$\because$ $x=\tan A$]

$\tan 3B=\dfrac{3\tan B-\tan^3 B}{1-3\tan^2 B}=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}$ [$\because$ $y=\tan B$]

অনুরূপে, $\tan 3C=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$. $\therefore$ (2) হইতে পাই

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

প্রশ্নমালা 11

$A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

1. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C.$
2. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C+4\sin A\sin B\cos C=1.$
3. $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$
4. $\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin A\sin C\cos B.$ [Pat. U. '40
5. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$
6. $\dfrac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$
7. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$ [C.U. '55]
8. $\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C.$ [C.U. '30]
9. $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$
10. $1-2\sin B\sin A\cos C+\cos^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B.$
11. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$ [C. U. '48]
12. $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$ [C. U. '49]

13. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$ [Pat. '39]

14. $\frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}+\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\frac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}=1.$

15. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$

16. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$ [Pat. '42]

17. $A+B+C=\pi$, এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হইলে, দেখাও যে, $\tan A=\tan B+\tan C.$ [C. U. '42]

$A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হইলে প্রমাণ কর :—

18. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C.$

19. $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$ [Pat '39]

20. $\frac{\cos A+\sin B+\sin C}{\sin A+\cos B+\sin C}=\frac{1-\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}B}.$

21. $A+B=C$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$ $-2\cos A\cos B\cos C=1.$ [Pat. '43]

22. $A=B+C$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)$ $+\sin(A-B+C)=4\sin A\cos B\cos C.$

23. $\alpha+\beta+\gamma=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $1+2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\cos^2\alpha=\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$

24. $A+B+C=2S$ হইলে, দেখাও যে, $\sin(S-A)\sin(S-B)+\sin S\sin(S-C)=\sin A\sin B.$

25. $A+B+C=180°$ এবং $\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$ হইলে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}.$ [P. U. '45]

26. $A+B+C+D=2\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A\tan B\tan C\tan D.$

দ্বাদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান

§ **12·1.** পূর্বের আলোচনায় দেখা গিয়াছে যে, একটি পূর্ণ আবর্তন কালে রেডিয়াস্‌ভেক্টরের দুইটি এবং দুইটি মাত্র অবস্থানে উৎপন্ন কোণগুলির sine, cosine বা অন্য যে কোন অনুপাতের একই মান হয়।

উদাহরণ (i) প্রথম আবর্তনকালে উৎপন্ন কোণ, θ-র মান যখন $\frac{\pi}{3}$ বা $\pi-\frac{\pi}{3}$ হয়, তখন $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হয়। সুতরাং $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণের $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$-এর মধ্যে সমাধান $\frac{\pi}{3}$ বা $\pi-\frac{\pi}{3}$. আর একবার আবর্তনের ফলে আবার যখন $2\pi+\frac{\pi}{3}$, বা, $2\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ অর্থাৎ $3\pi-\frac{\pi}{3}$ কোণ উৎপন্ন হইবে, তখন আবার $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইবে। অনুরূপে রেডিয়াস্‌ভেক্টরের $(n+1)$-তম আবর্তনকালে $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণটি θ-র $2n\pi+\frac{\pi}{3}$, বা, $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}$ মানের জন্য সিদ্ধ হইবে।

(ii) প্রথম আবর্তনকালে উৎপন্ন কোণ, θ-র মান যখন $\pi-\frac{\pi}{3}$ বা $2\pi-\frac{\pi}{3}$ হয়, তখন $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। $\pi-\frac{\pi}{3}$ ও $2\pi-\frac{\pi}{3}$ কোণ দুইটির সম-প্রান্তবিশিষ্ট সকল কোণের পরিমাপও $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

সুতরাং অসংখ্য কোণের একই ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থাকে।

অতএব, ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানের জন্য যে সকল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান একই সেই কোণগুলির প্রকাশক সাধারণরূপ নির্ণয় করা প্রয়োজন।

§ 12·2. **যে কোণসমূহের sine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় :**

মনে কর, $\sin\theta=k$ একটি প্রদত্ত সমীকরণ। প্রথমে α পরিমাপের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি নির্ণয় কর যেন, $\sin\alpha=k$ হয়। $\because\ \sin\alpha=k$,

$\therefore \sin(\pi-\alpha)=k$, সুতরাং α ও $\pi-\alpha$ সমীকরণটির দুইটি সমাধান। এক্ষণে পূর্ব অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুযায়ী এই দুইটি কোণের সহিত সমপ্রান্ত-বিশিষ্ট সকল কোণের sine-এর মান k হইবে। আবার, সমপ্রান্তবিশিষ্ট কোণগুলির অন্তর 2π-এর গুণিতক।

সুতরাং $\alpha, 2\pi+\alpha, 4\pi+\alpha, \cdots\cdots$

বা, $-2\pi+\alpha, -4\pi+\alpha, \cdots\cdots$ সকলেই

$\sin\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অনুরূপে $\pi-\alpha, 2\pi+\pi-\alpha, 4\pi+\pi-\alpha, \cdots\cdots$

বা, $-2\pi+\pi-\alpha, -4\pi+\pi-\alpha, \cdots\cdots$ সকলেই

$\sin\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অর্থাৎ $2m\pi+\alpha\cdots(1)$; বা $2m\pi+\pi-\alpha=(2m+1)\pi-\alpha\cdots(2)$

[$nm=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$] কোণগুলি সকলেই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান হইবে।

দেখ, (1)-এ π-এর গুণিতকগুলি যুগ্ম এবং এই যুগ্মগুণিতকগুলির সহিত α যোগ হইয়াছে। (2)-এ π-এর গুণিতকগুলি অযুগ্ম এবং এই অযুগ্মগুণিতকগুলি হইতে α বিয়োগ হইয়াছে।

সুতরাং (1) ও (2) মিলিত করিয়া পাই $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$

$[n=0, \pm1, \pm2, \cdots]$

এবং ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানের সাধারণ রূপ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি $k=0$ হয়, তবে $\alpha=0$.

সুতরাং নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $\theta=n\pi \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\text{cosec}\,\theta=\text{cosec}\,\alpha$ হইলে,

$$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha \qquad [n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots]$$

§ 12·3. যে কোণসমূহের co-sine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় ঃ

মনে কর, $\cos\theta=k$ একটি প্রদত্ত সমীকরণ। প্রথমে α পরিমাপের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি নির্ণয় কর যেন, $\cos\alpha=k$ হয়।

$\because \cos\alpha=k, \quad \therefore \cos(2\pi-\alpha)=k.$

সুতরাং α ও $2\pi-\alpha$ সমীকরণটির দুইটি সমাধান। আবার এই দুইটি কোণের সহিত সমপ্রান্তবিশিষ্ট সকল কোণের cosine-এর মান k হইবে। আবার সমপ্রান্তবিশিষ্ট সকল কোণের পরিমাপের অন্তর 2π-এর গুণিতক।

সুতরাং, α, $2\pi+\alpha$, $4\pi+\alpha$,……

বা. $-2\pi+\alpha$, $-4\pi+\alpha$,……সকলেই

$\cos\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অনুরূপে, $2\pi-\alpha$, $2\pi+2\pi-\alpha$, $4\pi+2\pi-\alpha$……

বা, $-2\pi+2\pi-\alpha$, $-4\pi+2\pi-\alpha$,……সকলেই

$\cos\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অর্থাৎ $2m\pi+\alpha\cdots(1)$ বা, $2m\pi+(2\pi-\alpha)$ অর্থাৎ

$(m+1)2\pi-\alpha\cdots(2)$ $[m=0, \pm1, \pm2\cdots]$

প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

(1) ও (2) মিলিত করিয়া পাই $\theta=2n\pi\pm\alpha$ $(n=0, \pm1, \pm2,\cdots)$ এবং ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানের সাধারণ রূপ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $k=0$ হইলে, $\alpha=\frac{\pi}{2}$

সুতরাং যে সকল θ-র জন্য $\cos\theta=0$, তাহাদের সাধারণ রূপ

$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm1, \pm2,\ldots)$

এখানে $2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}\cdots\cdots(3)$ এবং

$$2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}\cdots\cdots(4)$$

(3) এবং (4)-কে মিলিতভাবে, $\theta=(2p+1)\frac{\pi}{2}$ $[p=0, \pm1, \pm2,\cdots]$. আকারে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং $\cos\theta=0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান $\theta=(2p+1)\frac{\pi}{2}$. $(p=\theta, \pm1, \pm2\ldots)$

অনুসিদ্ধান্ত 2. যদি $\sec\theta=\sec\alpha$ হয়, $\theta=2n\pi\pm\alpha$.

$[n=0, \pm1, \pm2,\cdots]$

§ 12·4 যে সকল কোণের tangent সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়।

মনে কর, $\tan\theta=k$ একটি প্রদত্ত সমীকরণ। প্রথমে α পরিমাপের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি নির্ণয় কর যেন, $\tan\alpha=k$ হয়।

$\because$ $\tan\alpha=k$, $\therefore$ $\tan(\pi+\alpha)=k$.

সুতরাং α ও $\pi+\alpha$ সমীকরণটির দুইটি সমাধান। আবার এই দুইটি কোণের সহিত সমপ্রান্তবিশিষ্ট সকল কোণের tangent-এর মান k হইবে। আবার সমপ্রান্তবিশিষ্ট সকল কোণের পরিমাপের অন্তর 2π-এর গুণিতক।

সুতরাং α, $2\pi+\alpha$, $4\pi+\alpha$,......

বা, $-2\pi+\alpha$, $-4\pi+\alpha$,.........সকলেই

$\tan\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অনুরূপে $\pi+\alpha$, $2\pi+\pi+\alpha$, $4\pi+\pi+\alpha$,......

বা, $-2\pi+\pi+\alpha$, $-4\pi+\pi+\alpha$......সকলেই

$\tan\theta=k$ সমীকরণটি সিদ্ধ করিবে।

অর্থাৎ $2m\pi+\alpha\cdots(1)$ বা, $2m\pi+(\pi+\alpha)$ অর্থাৎ

$(2m+1)\pi+\alpha\cdots(2)$ $[m=0, \pm1, \pm2,\cdots]$

প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

(1) ও (2)-কে মিলিত করিয়া $n\pi+\alpha$ $[n=0, \pm1, \pm2,\cdots]$ আকারে লেখা যায়।

সুতরাং $\tan\theta=k$ সমীকরণের সমাধানের সাধারণরূপ

$$\theta=n\pi+\alpha \quad [n=0, \pm1, \pm2,\cdots]$$

যেখানে α এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যে $\tan\alpha=k$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$ $[n=0, \pm1, \pm2,\cdots]$

§ 12·5. **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** নিম্নের সাধারণ মানগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়, সুতরাং ঐগুলি স্মরণ রাখিতে হইবে :—

যদি n = 0 অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড রাশি হয়, তবে

(1) $\sin\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$,

$\sin\theta=\sin\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$.

$\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2}$ হইলে, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}$.

$\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ হইলে, $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

$\cos\theta=\cos\alpha$ হইলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha$.
$\cos\theta=1$ হইলে, $\theta=2n\pi$.
$\cos\theta=-1$ হইলে, $\theta=(2n+1)\pi$.

(3) $\tan\theta=0$ হইলে $\theta=n\pi$,
$\tan\theta=\tan\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$.

(4) $\cot\theta=0$ হইলে $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$.

উদাহরণমালা 12

উদা. 1. যে সকল কোণের cosine-এর মান $-\frac{1}{2}$, তাহাদের সাধারণ আকার কি হইবে?

যে সকল কোণের cosine-এর মান $-\frac{1}{2}$, তাহাদের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি হইল 120° বা $\frac{2\pi}{3}$.

অতএব, যে সকল কোণের কোসাইন $-\frac{1}{2}$, তাহাদের সাধারণ আকার হইল $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. [অনুচ্ছেদ 12·2 দেখ]

উদা. 2. $\sin^2 x=\sin^2\theta$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\sin x=\sin\theta\cdots(1)$

অথবা $\sin x=-\sin\theta=\sin(-\theta)\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x=n\pi+(-1)^n\theta$,

এবং (2) ,, ,, $x=n\pi+(-1)^n(-\theta)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=n\pi\pm\theta$.

উদা. 3. যদি α দ্বারা $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ও $\tan\alpha=1$ উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়, তবে α-র সাধারণ মান নির্ণয় কর।

0° হইতে 360°-এর মধ্যে যে কোণের cosine $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ও tangent 1 তাহার মান 225°, বা, $\pi+\frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ α কোণের নির্ণেয় সাধারণ মান$=2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$.

উদা. 4. $\cot x - \tan x = 2$. সমীকরণটি সমাধান কর। [C.U. '37]

$\cot x - \tan x = 2$, বা, $\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 2$,

বা, $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$,

বা, $\cos 2x = \sin 2x$ বা, $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$,

বা, $\tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$,

$\therefore \ 2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $\therefore \ x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = (4n+1)\frac{\pi}{8}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. [G. U. '35]

সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2}$ অর্থাৎ $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1$,

বা, $\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 1$

$$\left[\because \ \sin \tfrac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos \tfrac{\pi}{4}\right]$$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\therefore \ x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$

$\therefore \ x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = (8n+1)\frac{\pi}{4}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (1) অনেক সময় সাধারণ সমাধানটি বিভিন্ন প্রণালীতে করা যায়, কিন্তু লব্ধ ফলগুলির আকার বিভিন্ন হইলেও তাহারা একই কোণ শ্রেণীর অন্তর্গত হইয়া থাকে।

(2) উদা. 5-এ যে সমীকরণটি সমাধান করা হইয়াছে, অনেক সময় তাহার উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া সমাধান করা হয়, কিন্তু উহা ঠিক নহে। কারণ, উহাতে লব্ধ মানগুলির সব কয়টি দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয় না অর্থাৎ উহাতে অবান্তর বীজ (extraneous root) পাওয়া যায়। উপরের সমীকরণটি লইয়া নিম্নে উহা দেখান হইতেছে।

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$,

$\therefore \ \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$ (বর্গ করিয়া),

বা, $1 + 2 \sin x \cos x = 2$,

বা, $1 + \sin 2x = 2$, বা, $\sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2x=(4m+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ x=(4m+1)\frac{\pi}{4}$ এখানে, $m=0$ বা অন্য যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে, m জোড় হইলে, মনে কর, $m=2n$,

$x=(8n+1)\frac{\pi}{4}\cdots(1)$

এবং m বিজোড় হইলে, মনে কর, $m=2n+1$,

$x=(8n+5)\frac{\pi}{4}\cdots(2)$

এখানে $x=(8n+5)\frac{\pi}{2}$ একটি অতিরিক্ত সমাধান পাওয়া গেল, ইহা উপরে উদা. 5-এর সমাধানে x-এর সাধারণ মানের অন্তর্ভুক্ত নহে। x-এর এই মানটি বসাইয়া দেখা যায় যে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। ইহাকে ঐ সমীকরণের **অবান্তর বীজ** বলে। অতএব, যদি এই প্রণালীতে সমাধান করা হয়, তবে লব্ধ বীজগুলির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখিতে হইবে—কোন অবান্তর বীজ থাকিলে ইহাতে ধরা পড়িবে।

উদা. 6. সমাধান কর : $\cos 2\theta=\cos\theta\sin\theta$,

$\cos 2\theta=\cos\theta\sin\theta$,

বা, $2\cos 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$,

বা, $\cot 2\theta=\frac{1}{2}=\cot\alpha$ (মনে কর)

$\therefore\ 2\theta=n\pi+\alpha$, $\therefore\ \theta=\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$, যেখানে $\cot\alpha=\frac{1}{2}$.

$[n=0, \pm1, \pm2, \cdots]$

উদা. 7. সমাধান কর : $\cos 9x=\cos 5x-\cos x$.

$\cos 9x=\cos 5x-\cos x$,

বা, $\cos 9x+\cos x=\cos 5x$,

বা, $2\cos 5x\cos 4x-\cos 5x=0$,

বা, $\cos 5x\,(2\cos 4x-1)=0$,

$\therefore$ হয় $\cos 5x=0\cdots(1)$, অথবা, $2\cos 4x-1=0\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $5x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ x=(2n+1)\frac{\pi}{10}$,

এবং (2) হইতে পাই $\cos 4x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\ 4x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $\therefore\ x=(6n\pm1)\frac{\pi}{12}$.

$\therefore$ সমাধান হইল $x=(2n+1)\frac{\pi}{10}$ বা, $(6n\pm1)\frac{\pi}{12}$.

উদা. 8. সমাধান কর : $a\cos x+b\sin x=c$, যেখানে $c \not> \sqrt{a^2+b^2}$.

সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ldots(1)$$

এক্ষণে মনে কর, $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ এবং $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$,

সুতরাং (1) হইতে পাই $\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

বা, $\cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$ (মনে কর ;

[$\because$ $c \not> \sqrt{a^2+b^2}$)]

$\therefore\ x-\alpha=2n\pi\pm\beta,\quad \therefore\ x=2n\pi\pm\beta+\alpha.$

দ্রষ্টব্য : (1) এখানে a, b ও c জ্ঞাত রাশি বলিয়া α ও β জ্ঞাত হইবে।

(2) এই প্রকার সমীকরণের সমাধানে $\cos x$ ও $\sin x$-এর সহগদ্বয়ের বর্গ সমষ্টির বর্গমূল দিয়া উভয় পক্ষকে ভাগ করিতে হয়।

উদা. 9. সমীকরণটি সমাধান কর : $\tan 3\theta=\cot 2\theta$.

এখানে $\tan 3\theta=\cot 2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$.

যে সকল কোণের tangent-গুলি, $\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$ কোণের tangent-এর সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$, যেখানে n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব, এখানে $3\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-2\theta$, বা, $5\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\ \theta=\frac{1}{5}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ যেখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 10. সমাধান কর : $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$.

[B. U. E. '63]

এখানে $\tan x+\tan 2x+\tan(x+2x)=0$,

বা, $(\tan x+\tan 2x)+\dfrac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=0$,

বা, $(\tan x+\tan 2x)\left(1+\dfrac{1}{1-\tan x\tan 2x}\right)=0$.

সুতরাং হয় $\tan x+\tan 2x=0\cdots\cdots(1)$

অথবা, $\left(1 \mp \frac{1}{1-\tan x \tan 2x}\right)=0 \cdots\cdots(2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $\tan 2x = -\tan x = \tan(-x) = \tan(n\pi - x)$

$\therefore \quad 2x = n\pi - x$, বা, $3x = n\pi$, $\therefore \quad x = \frac{n\pi}{3}$.

আবার. (2) হইতে পাই $1 = \frac{1}{\tan x \tan 2x - 1}$,

বা, $\tan x \tan 2x - 1 = 1$; বা, $\tan x \tan 2x = 2$,

বা, $\tan x . \frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x} = 2$,

বা, $2\tan^2 x = 2 - 2\tan^2 x$, বা, $4\tan^2 x = 2$,

বা, $\tan^2 x = \frac{1}{2}$, $\therefore \quad \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan\alpha$ (মনে কর)

$\therefore \quad x = n\pi \pm \alpha$, যেখানে $\tan^2\alpha = \frac{1}{2}$.

উদা. 11. সমাধান কর : $\frac{\sin\theta}{\sin 2x} + \frac{\cos\theta}{\cos 2x} = 2$. [C. U. '58]

$\frac{\sin\theta}{\sin 2x} + \frac{\cos\theta}{\cos 2x} = 2$,

বা, $\sin\theta\cos 2x + \cos\theta\sin 2x = 2\sin 2x\cos 2x$,

বা, $\sin(\theta + 2x) = \sin 4x$,

$\therefore \quad 4x = m\pi + (-1)^m(\theta + 2x)$ যেখানে m যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে m = জোড় সংখ্যা $= 2n$ হইলে,

$4x = 2n\pi + \theta + 2x$, বা, $2x = 2n\pi + \theta$, $\therefore \quad x = n\pi + \frac{\theta}{2}$.

আবার, m = বিজোড় সংখ্যা $= 2n+1$ হইলে

$4x = (2n+1)\pi - (\theta + 2x)$, বা, $6x = (2n+1)\pi - \theta$,

$\therefore \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{6}$.

উদা. 12. সমাধান কর :

$7\cos\theta + 3\sin\theta = 3$, দেওয়া আছে $\tan 72°18' = 2\frac{1}{3}$.

মনে কর, $72°18' = \alpha$;

এখানে $7\cos\theta + 3\sin\theta = 3$, বা, $\frac{7}{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$,

বা, $\tan\alpha\cos\theta + \sin\theta = 1$ [$\because \frac{7}{3} = \tan 72°18' = \tan\alpha$]

বা, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\theta + \sin\theta = 1$,

বা, $\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=\cos\alpha$,

বা, $\sin(\alpha+\theta)=\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

$\therefore\ \alpha+\theta=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=n\pi+(-1)^n.17°42'\left[\because \frac{\pi}{2}-\alpha=90°-72°18'=17°42'\right]$

$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n 17°42'-\alpha=n\pi+(-1)^n 17°42'-72°18'$

$=n\pi+(-1)^n\frac{59\pi}{600}-\frac{241\pi}{600}$.

উদা. 13. 0° এবং 1000°-র মধ্যে θ-র যে মানগুলিতে সমীকরণ $2\sin^2\theta-\sin\theta=3$ সিদ্ধ হয়, সেগুলি নির্ণয় কর।

এখানে, $2\sin^2\theta-\sin^2\theta-3=0$,

বা, $2\sin^2\theta-3\sin\theta+2\sin\theta-3=0$,

বা, $(\sin\theta+1)(2\sin\theta-3)=0$,

$\therefore\ \sin\theta=-1$ অথবা $\frac{3}{2}$, কিন্তু কোন কোণের সাইনের সাংখ্যমান $\frac{3}{2}$ হইতে পারে না।

$\therefore\ \sin\theta=-1,\quad\therefore\ \theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}=(4n-1)90°$

এখানে $n=1, 2$ ও 3 হইলে θ-র মান 0° ও 1000° মধ্যে থাকিবে।

$\therefore\ \theta=270°, 630°, 990°$.

উদা. 14. সমাধান কর :

$$\sqrt{3}\cos A+\sin A=\sqrt{3}\ [-2\pi<A<2\pi].$$

এখানে, $(\sqrt{3})^2+(1)^2=3+1=4$; উভয় পক্ষকে $\sqrt{4}$ বা 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\cos A.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

বা, $\cos A\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

বা, $\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, $\quad\therefore\ A-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$,

$\therefore\ A=2n\pi+\frac{\pi}{3}\cdots(1)$ অথবা $A=2n\pi\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে দেখা যায় $n=0$ ও -1 হইলে A-এর মান -2π ও 2π-এর মধ্যে থাকে, $\therefore\ A=\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

আবার, (2) হইতে পাই যে, কেবল যদি $n=0$ হয়, তবে A-এর মান -2π হইতে 2π-এর মধ্যে থাকিবে ; সুতরাং $A=0$.

অতএব, $A=-\frac{5\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$.

প্রশ্নমালা 12

1. যে সকল কোণের সাইন $\frac{1}{2}$-এর সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় কর।

2. θ-র যে সকল মানে $\tan\theta=-1$ সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাহাদের সাধারণ রূপ কি ?

3. θ-র সাধারণ মান কি হইলে $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ ও $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয় ?

সমাধান কর :

4. $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$. [B. U. E. '64]

4. (a). $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$. [H. S. '61]

5. $\tan^2\theta=3\operatorname{cosec}^2\theta-1$. [C. U. '39]

6. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$. [C. U. '40]

7. $\tan x+\cot x=4$. [C. U. '13]

8. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. [B. H. U. '48]

9. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$.

10. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$. [B. H. U. '47 ; cf. H. S. '71]

11. $\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta=3\cot\theta$.

12. $\sin m\theta+\sin n\theta=0$. [C. U.]

13. $\sin 4\theta=\sin\theta$. [B. H. U. '49]

14. $\tan 5\theta=\cot 2\theta$. [A. U. '43]

14. (a). $\tan px=\cot qx$.

15. $\sin 2\theta=\cos\theta$. [C. U. '53]

16. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$. [C. U. '46]

17. $\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{2}=0$.

18. $\sec\theta-1=(\sqrt{2}-1)\tan\theta$.

19. $\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin \theta = 0.$ [P. U. '39]

20. $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x.$ [B. H. U. '46]

21. $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin \theta.$ [A. U. '39]

22. $\tan x + \tan 3x = 2 \tan 2x.$

23. $\tan^2 x - (1+\sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0.$

24. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1.$ [C. U. '41, '45, '48]

25, $\tan \theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta.$

26. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2.$ 27. $\cos 2\alpha = \cos \alpha + \sin \alpha.$

28. $4 \sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}.$ [C.U.] 29. $\tan^2 3x = \cot^2 \alpha.$

30. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 4.$ [N. B. '64 ; C. U. '49]

31. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x.$ [C. U. '43]

32. $\tan x + \tan 3x + \tan 4x = 0.$

33. $\cos x - \sin x = \cos \alpha + \sin \alpha.$ [B. H. U. '38]

34. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$ [C.U. '59]

35. $\dfrac{\cos \alpha}{\cos x} + \dfrac{\sin \alpha}{\sin x} = 2.$

36. সমাধান কর : $3 \cos x + 2 \sin x = 2$, যদি, $\tan 65°22' = 1\frac{1}{5}$ হয়।

37. সমাধান কর : $\sin \dfrac{n+1}{2}\theta = \sin \dfrac{n-1}{2}\theta + \sin \theta.$ [U.P.B. '53]

38. 0° ও 1000°-র মধ্যবর্তী θ-র যে সকল মানে
$3 \sin^2\theta - 8 \sin \theta + 5 = 0$ সমীকরণ সিদ্ধ হয় সেগুলি নির্ণয় কর।

39. সমাধান কর :—
$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x.$ [C. U. '56]

40. সমাধান কর : $\sin \theta + 2 \cos \theta = 1.$ [C. U. '34]

41. যদি $\sin A = \sin B$ এবং $\cos A = \cos B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, হয় A ও B সমান অথবা তাহাদের অন্তর চারি সমকোণের কোন গুণিতক। [C. U. '35]

42. $0 < \theta < \pi$ সীমার মধ্যে $4 \sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$ সমীকরণটি সমাধান কর। [C. U. '50]

43. যদি $0 < \theta < \pi$ হয়, তবে $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর। [C. U. '51]

44. সমাধান কর: $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (-\pi < \theta < +\pi)$. [C. U. '52]

সমাধান কর: $0 < \theta < 2\pi$.

45. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$. [C. U. '36]

46. $\cot\theta - \tan\theta = 2$. [C. U. '37]

47. $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$. [C. U. '38]

48. সমাধান কর: (সাধারণ সমাধানের প্রয়োজন নাই)

$\tan x + \tan y = 2$ এবং $2\cos x\cos y = 1$. [C. U. '55]

49. সমাধান কর: $2\cos x + 5\sin x = 5$, $(\tan 68°12' = 2\frac{1}{2})$.

50. $\cos\theta - \sin\theta = \cos\alpha - \sin\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. [B. H. U. '50]

ত্রয়োদশ অধ্যায়

বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক

Inverse Circular Functions

§ **13·1.** যদি $\sin\theta = k$ হয়, যেখানে k একটি জ্ঞাত রাশি, তবে θ-র মান নির্দিষ্টরূপে জানা যায় না। কিন্তু জানা যায় যে, যে কোণগুলির sineগুলি k-এর সমান, θ সেই কোণগুলির অন্যতম। অতএব $\sin\theta = k$ দ্বারা বুঝায় যে θ এরূপ যে-কোন একটি কোণ যাহার সাইন হইল k. এই উক্তিটি আবার সংক্ষেপে বিপরীতক্রমে (inversely) $\theta = \sin^{-1} k$ এইরূপ লিখিয়া প্রকাশ করা হয়।

অতএব, **প্রতীক চিহ্ন** $\sin^{-1} k$ দ্বারা বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার সাইন হইল k. $\theta = \sin^{-1}k$ এই প্রতীক চিহ্নে শুধু θ এক পক্ষে থাকে এবং ইহাতে প্রকাশ পায় θ এরূপ একটি কোণ যাহার মান উহার সাইনের মাধ্যমে জানা যায়।

অনুরূপে, $\cos^{-1}x$ দ্বারা বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার কোসাইন হইল x. এইভাবে $\tan^{-1}\sqrt{3}$ দ্বারা যে সকল কোণের tangent-এর মান $\sqrt{3}$ তাহাদের একটিকে বুঝায়। কিন্তু আমরা দেখিয়াছি যে ঐরূপ সমস্ত কোণগুলি $n\pi + \frac{\pi}{3}$এর অন্তর্গত। $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3}$ এবং $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$, এই দুইটি বিভিন্ন রূপের হইলেও একই অর্থ প্রকাশ করে।

এখানে কয়েকটি বিষয় লক্ষ্য করা প্রয়োজন। এখন দেখ $\sin^{-1}k$ **হইল একটি কোণ,** কিন্তু $\sin\theta$ **হইল একটি সংখ্যা** এবং $\sin\theta=k$ ও $\theta=\sin^{-1}k$ একই অর্থ প্রকাশ করে, ইহাদের একটি জানা থাকিলেই অন্যটি জানা যায়। আবার দেখ, কোন কোণের sine এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, সুতরাং $\sin^{-1}x$ অর্থহীন হইবে যদি না $-1\leqslant x\leqslant 1$ হয়।

অনুরূপে $\cos^{-1}x$-এর পক্ষে $-1\leqslant x\leqslant 1$; $\operatorname{cosec}^{-1}x$ ও $\sec^{-1}x$ এই উভয়ক্ষেত্রে $(-1\leqslant x,\ x\geqslant 1)$ হইবে, এবং $\tan^{-1}x$ ও $\cot^{-1}x$-এর পক্ষে x-এর যে-কোন মান (for all x) হইতে পারে।

§ **13·2. প্রতীকটি পাঠের নিয়ম।** $\sin^{-1}$**k** এই প্রতীকটিকে **"sine inverse k"** বা **"sine minus one k"** পড়া হয়। অনেক পুস্তকে ইহাকে '*arc sin k*' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\cos^{-1}k$কে **cos inverse** k পড়া হয়। $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}a$, $\tan^{-1}b$ এই আকারের রাশিগুলিকে **বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক** (**Inverse Circular Function**) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে বুঝিয়া রাখা উচিত যে $\sin^{-1}k$ ও $(\sin k)^{-1}$-এক নহে, কারণ $(\sin k)^{-1}=\dfrac{1}{\sin k}$; কিন্তু এখানে $\sin^{-1}k$-এর -1টি সূচক নহে।]

§ **13·3.** যদি θ এরূপ একটি কোণ হয় যাহার সাইন$=k$, তবে $n\pi+(-1)^n\theta$-এর অন্তর্ভুক্ত সমস্ত কোণেরই সাইন k হইবে, সুতরাং $\sin^{-1}k$ একটি বহুমান অপেক্ষক। অতএব $\sin^{-1}k$-এর **সাধারণ মান** (general value) হইবে $n\pi+(-1)^n\sin^{-1}k$. অনুরূপে $\cos^{-1}k$, এবং $\tan^{-1}k$-এর সাধারণ মান যথাক্রমে $2n\pi\pm\cos^{-1}k$ এবং $n\pi+\tan^{-1}k$.

§ **13·4.** $\sin^{-1}k$ দ্বারা যে **ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণের** সাইন k তাহাই সূচিত হয়। অনুরূপে $\cos^{-1}k$, $\tan^{-1}k$, $\cot^{-1}k$, $\operatorname{cosec}^{-1}k$, $\sec^{-1}k$ প্রভৃতি ক্ষেত্রেও বুঝিতে হইবে।

§ **13·5. মুখ্যমান** (Principal value) : θ-র ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম মানকে $\sin^{-1}k$-এর মুখ্যমান principal value বলে।

যদি একই মান (অনুপাত) বিশিষ্ট দুইটি এরূপ কোণ থাকে, যাহাদের সাংখ্যমান সমান, কিন্তু একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক, তবে ধনাত্মক কোণটিকেই সাধারণতঃ মুখ্যমান ধরা হইয়া থাকে। সাংখ্যমান নির্ণয়ের স্থলে এই মুখ্যমানটি ধরা হয়।

উদাহরণ। (1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$-এর মুখ্যমান $=45°$.

(2) $\tan^{-1}(-1)$-এর মুখ্যমান $=-45°$.

(3) $\cos 60°=\frac{1}{2}$ এবং $\cos(-60°)=\frac{1}{2}$, এখানে $60°$ ও $-60°$ উভয় কোণেরই কোসাইন $\frac{1}{2}$, কিন্তু $\cos^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্যমান হইবে $60°$, $-60°$ নহে।

§ **13·6.** উপরের নিয়ম অনুসারে $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ ও $\text{cosec}^{-1}x$ সতত $-90°$ ও $+90°$-এর মধ্যে থাকিবে। কিন্তু $\cos^{-1}x$ ও $\sec^{-1}x$ সতত $0°$ ও $180°$-র মধ্যে থাকিবে।

x ধনাত্মক হইলে $\sin^{-1}x$, $0°$ ও $90°$-এর মধ্যে এবং x ঋণাত্মক হইলে $\sin^{-1}x$, $-90°$ ও $0°$-এর মধ্যে হইবে।

x ধনাত্মক হইলে $\cos^{-1}x$, $0°$ ও $90°$-এর মধ্যবর্তী এবং x ঋণাত্মক হইলে $\cos^{-1}x$, $90°$ ও $180°$-এর মধ্যবর্তী হইবে। অতঃপর আমাদের আলোচনায় $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ ইত্যাদি ঐ বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্যমানকে বুঝাইবে। পরবর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে যে সকল সম্পর্কের প্রমাণ দেওয়া হইবে, সেই সকল ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকগুলি সংজ্ঞেয় এবং ভগ্নাংশ আকারের রাশিমালাসমূহের হর শূন্য নয় মনে করা হইয়াছে।

§ **13·7.** (i) $\sin\theta=x$ হইলে, $\theta=\sin^{-1}x$, $\therefore\ \theta=\sin^{-1}\sin\theta$.
অনুরূপে, $\theta=\cos^{-1}\cos\theta$, $\theta=\tan^{-1}\tan\theta$, ইত্যাদি।

(ii) আবার, $\theta=\sin^{-1}x$ হইলে, $\sin\theta=x$, $\therefore\ \sin\sin^{-1}x=x$.
অনুরূপে, $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$, ইত্যাদি।

(iii) প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$, $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$ হইবে।

প্রমাণঃ মনে কর, $\text{cosec}^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\text{cosec}\,\theta=x$.

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}=\frac{1}{x},\quad \therefore\quad \sin^{-1}\frac{1}{x}=\theta.$$

অতএব, $\text{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$.

অনুরূপে অপর দুইটিও সহজে প্রমাণ করা যায়।

[**দ্রষ্টব্য** ঃ উপরের প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,
$\text{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}=\sin^{-1}x$, $\cot^{-1}\dfrac{1}{x}=\tan^{-1}x$, $\sec^{-1}\dfrac{1}{x}=\cos^{-1}x$.]

§ **13·8.** ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে উহাদের কোন একটি কোণানুপাতের আকারে প্রকাশ করা যায়। অতএব, বিপরীত (inverse) কোণানুপাতগুলিকে কোন একটি বিপরীত অনুপাতে প্রকাশ করা যাইবে।

মনে কর, $\theta=\sin^{-1}x$, সুতরাং $\sin\theta=x$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$; $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{x}$.

অতএব, প্রমাণিত হইলে যে,

$$\theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{x}$$
$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

দ্রষ্টব্য : উপরের সিদ্ধান্ত হইতে পাই $\theta=\sin^{-1}x$ ও $\theta=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, কিন্তু ইহা হইতে বলা যায় না যে $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\cdots(1)$ সর্বক্ষেত্রে সমান হইবে। কারণ, $\theta=\sin^{-1}x$ ও $\theta=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ এই দুইটিতে θ-র অনন্ত সংখ্যক মান আছে, কিন্তু সাইন ও কোসাইনের **সাধারণ মান** দুইটি (general values) এক নহে, সুতরাং ঐ (1)-সমীকরণটি সতত সত্য নহে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ মনে কর $x=\frac{1}{2}$, সুতরাং $\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

এক্ষণে $\sin^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°, 150°, 390°, 510°,\cdots\cdots$প্রভৃতি,

এবং $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=30°,\ 330°,\ 390°,\ 690°,\cdots\cdots$ ইত্যাদি।

অতএব দেখা গেল যে, $\sin^{-1}x$ ও $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ সতত সমান নহে।

§ **13·9.** সংশ্লিষ্ট বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক সমূহের মুখ্যমানের জন্য,

(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$,

(iii) $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=x$.

এক্ষণে, $\sin\theta=\cos(90°-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$\therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$, সুতরাং $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1} x=\theta$, সুতরাং $\tan \theta=x$.

আবার, $\tan \theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\therefore$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$,

$\therefore$ $\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$. $\therefore$ $\tan^{-1}x+\cot^{-1} x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(iii) মনে কর, $\sec^{-1} x=\theta$, সুতরাং $\sec \theta=x$.

এক্ষণে, $\sec \theta=\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$,

$\therefore$ $\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$, $\therefore$ $\text{cosec}^{-1} x=\frac{\pi}{2}-\theta$,

$\therefore$ $\sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

§ **13·10.** প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$,

এবং (ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$;

সুতরাং $\tan \alpha=x$ এবং $\tan \beta=y$.

এক্ষণে, $\tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}=\frac{x+y}{1-xy}$,

$\therefore$ $\alpha+\beta=\tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$.

অতএব, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$ ও $\tan^{-1}y=\beta$,

সুতরাং $\tan \alpha=x$ এবং $\tan \beta=y$.

এক্ষণে, $\tan (\alpha-\beta)=\frac{\tan \alpha-\tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta}=\frac{x-y}{1+xy}$.

$\therefore$ $\alpha-\beta=\tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$.

অতএব, $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$.

§ **13·11.** প্রমাণ কর যে,

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1} \frac{xy-1}{y+x}$,

এবং (ii) $\cot^{-1}x - \cot^{-1}y = \cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\cot^{-1}x = \alpha$ ও $\cot^{-1}y = \beta$.

সুতরাং $\cot\alpha = x$ ও $\cot\beta = y$.

এক্ষণে, $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha} = \dfrac{xy-1}{y+x}$

$\therefore\quad \alpha+\beta = \cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$, $\therefore\ \cot^{-1}x + \cot^{-1}y = \cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$.

(ii) অনুরূপে $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta - \cot\alpha} = \dfrac{xy+1}{y-x}$,

$\therefore\quad \alpha-\beta = \cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$ $\therefore\ \cot^{-1}x - \cot^{-1}y = \cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

§ **13·12.** প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

$$= \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}\times z}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy}}{\dfrac{1-xy-yz-zx}{1-xy}} = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

বিকল্প প্রণালী :

মনে কর, $\tan^{-1}x = A$, $\tan^{-1}y = B$, $\tan^{-1}z = C$;

$\therefore\quad \tan A = x$, $\tan B = y$ এবং $\tan C = z$.

এখন, $\tan(A+B+C) = \tan\{(A+B)+C\} = \dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$

$$= \frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\times\tan C}$$

$$= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A},$$

$$\therefore\ A+B+C = \tan^{-1}\left\{\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}\right\}$$

এক্ষণে, A, B, C এবং tan A, tan B, tan C-এর মানগুলি বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}.$$

§ **13·13.** প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$, এবং $\sin^{-1}y=\beta$,

স্বতরাং $\sin\alpha=x$, এবং $\sin\beta=y$.

$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$.

এবং $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

এক্ষণে, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$,

$\therefore\ \alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$.

$\therefore\ \sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$.

(ii) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$ [(i) দেখ]

$\therefore\ \alpha-\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

$\therefore\ \sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$.

(iii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$ এবং $\cos^{-1}y=\beta$,

স্বতরাং $\cos\alpha=x$ এবং $\cos\beta=y$.

$\therefore\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

এক্ষণে $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=xy-(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-y^2})$

$\therefore\ \alpha+\beta=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

$\therefore\ \cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

(iv) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ [(iii) দেখ]

$\therefore\ \alpha-\beta=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

$\therefore\ \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

§ 13·14. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=x$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$.

এক্ষণে, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2x\sqrt{1-x^2}$,

বা, $2\theta=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

$\therefore\ 2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\cos\theta=x$.

$\therefore\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2x^2-1,\quad \therefore\ 2\theta=\cos^{-1}(2x^2-1)$

বা, $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\tan\theta=x$,

এক্ষণে, $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$, বা, $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

§ 13·15. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\sin\alpha=x$.

এক্ষণে, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3x-4x^3$,

$\therefore\ 3\alpha=\sin^{-1}(3x-4x^3)$,

বা, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\cos\alpha=x$.

এক্ষণে, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4x^3-3x$,

$\therefore\ 3\alpha=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

বা, $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\tan\alpha=x$.

এক্ষণে, $\because\ \tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$,

$\therefore\ 3\alpha=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, বা, $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

§ **13·16.** প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$2\tan^{-1}\mathbf{x}=\sin^{-1}\frac{2\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}^2}=\cos^{-1}\frac{1-\mathbf{x}^2}{1+\mathbf{x}^2}=\tan^{-1}\frac{2\mathbf{x}}{1-\mathbf{x}^2}.$$

প্রমাণ : মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\tan\theta=x$.

এক্ষণে, $\because\ \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$. $\therefore\ 2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.

আবার, $\because\ \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$. $\therefore\ 2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

পুনরায়, $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $\therefore\ 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

অতএব, $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের সিদ্ধান্তগুলি বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহের মুখ্যমানের জন্য প্রমাণ করা হইল। পরবর্তী উদাহরণমালা ও প্রশ্নমালায় বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে উহাদের মুখ্যমানগুলি ধরা হইয়াছে।

উদাহরণমালা 13

উদা. 1. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $\theta=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, সুতরাং $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°=\sin\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{\pi}{3}$.

উদা. 2. $\sec^{-1}x$কে অপর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ কর।

মনে কর, $\sec^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sec\theta=x$.

$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta}=x$, বা, $\cos\theta=\frac{1}{x}\ \therefore\ \theta=\cos^{-1}\frac{1}{x}$.

আবার, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}$

$$\therefore\ \theta=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}=\pm\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

এক্ষণে, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\sqrt{x^2-1}$,

$\therefore\ \theta=\tan^{-1}(\pm\sqrt{x^2-1})$,

$$\cot\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad\therefore\ \theta=\cot^{-1}\frac{\pm1}{\sqrt{x^2-1}}$$

এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}},\quad\therefore\ \theta=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$

অতএব, $\sec^{-1}x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}=\cos^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}(\pm\sqrt{x^2-1})$

$$=\cot^{-1}\frac{\pm1}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=\frac{12}{13}$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$.

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{12}{13}\times\frac{13}{5}=\frac{12}{5},\quad\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

অতএব, $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

উদা. 4. প্রমাণ কর : $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

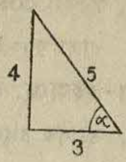
মনে কর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha$, $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$,

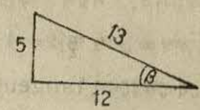
সুতরাং $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\beta=\frac{12}{13}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\alpha+\beta$.

এক্ষণে, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

নীচে অঙ্কিত চিত্রদ্বয় হইতে ডানপক্ষের অপেক্ষকগুলির মান বসাইয়া পাই।





$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{36}{65}-\frac{4}{13}=\frac{16}{65}.$$

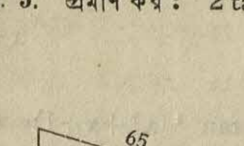
$\therefore \quad \alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{16}{65}.$

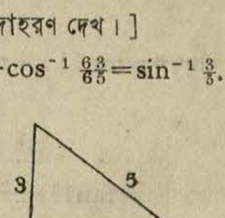
অতএব, $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{16}{65}.$

[**দ্রষ্টব্য :** (i) ∴ উপরের উদাহরণে $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ হইতে অঙ্ক করিয়া $\cos\alpha$ এর মান এবং $\cos\beta=\frac{12}{13}$ হইতে $\sin\beta$-র মান নির্ণয় করিয়া সমাধান করা যাইত, কিন্তু প্রদর্শিত প্রণালীতে চিত্র অঙ্কন করিয়া সমাধান করা সহজ হয়। এখানে দেখ, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ আছে, সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ=5 একক ও লম্ব=4 একক ধরা হইয়াছে ; অতএব ভূমিটি=3 একক হইবে। অনুরূপে দ্বিতীয় চিত্রে অতিভুজ=13 একক ও ভূমি=12 একক ধরা হইয়াছে ; সুতরাং লম্ব=5 একক হইয়াছে।

(ii) অনেক ক্ষেত্রে tangent বা cotangent-রূপে প্রকাশ করিয়া সমাধান করা সহজ হইয়া থাকে। নিম্নের উদাহরণ দেখ।]

উদা. 5. প্রমাণ কর : $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\sin^{-1}\frac{3}{5}.$





বামপক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

[∵ চিত্র হইতে পাই $\cos^{-1}\frac{63}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}$]

$=\tan^{-1}\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$=\tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{12}+\frac{16}{63}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{16}{63}}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{507}{12\times63}}{\frac{160}{189}}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$=\sin^{-1}\frac{3}{5}.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে $\cos^{-1}\frac{63}{65}$ দেওয়া থাকায় প্রথম চিত্রে অতিভুজ $=65$ ও ভূমি$=63$ ধরা হইয়াছে, সুতরাং লম্ব 16 হইল। এখন দেখ, যে-কোণের cosine$=\frac{63}{65}$, তাহার tan$=\frac{16}{63}$, সুতরাং $\cos^{-1}\frac{63}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}$ ধরা হইয়াছে। আবার, সরল করিয়া বামপক্ষ$=\tan^{-1}\frac{3}{4}$ হইয়াছে, সুতরাং দ্বিতীয় চিত্রে লম্ব$=3$ ও ভূমি$=4$ ধরা হইয়াছে, সুতরাং অতিভুজ$=5$ হইল। এখন দেখ, যে-কোণের tangent $\frac{3}{4}$, তাহার sine হইল $\frac{3}{5}$, [সুতরাং $\tan^{-1}\frac{3}{4}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$ হইল।]

উদা. 6. প্রমাণ কর : $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x=x$.

মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=x$,

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ$=\cos\tan^{-1}\cot\theta$

$=\cos\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\quad\left[\because\ \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta\right]$

$=\sin\theta=x=$ডানপক্ষ।

উদা. 7. প্রমাণ কর : $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)$
$=\tan^{-1}(x^2+x+1)$. [C. U. '63]

$\because\ \cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}\frac{1}{x+1}$,

$\therefore$ বামপক্ষ$=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x+1}=\tan^{-1}\dfrac{x+\frac{1}{x+1}}{1-x.\frac{1}{x+1}}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\tan^{-1}(x^2+x+1)=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদা. 8. প্রমাণ কর : $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$, $\therefore\ \sin\theta=x$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$.

এক্ষণে, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2x\sqrt{1-x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

বা, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$\therefore\ \sin(2\sin^{-1}x)=\sin\{\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})\}=2x\sqrt{1-x^2}$.

উদা. 9. প্রমাণ কর : $\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}+\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}$
$+\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx}=0.$ [cf. H. S. '60]

$$\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}=\tan^{-1}x-\tan^{-1}y\cdots\cdots(1)$$

$$\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}=\tan^{-1}y-\tan^{-1}z\cdots\cdots(2)$$

এবং $\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx}=\tan^{-1}z-\tan^{-1}x\cdots\cdots(3)$

এক্ষণে (1), (2) ও (3) যোগ করিয়া পাই

$$\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}+\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}+\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx}=0.$$

উদা. 10. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $xy+yz+zx=1.$

মনে কর, $\tan^{-1}z=\theta$; $\therefore\ \tan\theta=z$

এক্ষণে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}z$

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\pi}{2}-\theta$

বা, $\frac{x+y}{1-xy}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{z}$

$\therefore\ (x+y)z=1-xy$ বা, $xz+yz+xy=1$

উদা. 11. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে $x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$

বা, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\pi-\cos^{-1}z$

বা, $\cos^{-1}\{xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}=\pi-\theta$

[মনে কর $\cos^{-1}z=\theta$; $\cos\theta=z$]

$\therefore\ xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-z.$

বা, $xy+z=\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}$

বা, $x^2y^2+z^2+2xyz=1-x^2-y^2+x^2y^2$

(উভয়পক্ষে বর্গ করিয়া)

বা, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (পক্ষান্তর করিয়া)।

উদা. 12. সমাধান কর : $\sin^{-1} x = \cos^{-1} x$.

মনে কর, $\cos^{-1} x = \theta$, $\therefore \cos\theta = x$,

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\therefore \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \theta$.

এক্ষণে, $\sin^{-1} x = \cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

বা, $x = \sqrt{1-x^2}$, বা, $x^2 = 1-x^2$, বা, $2x^2 = 1$,

বা, $x^2 = \frac{1}{2}$. $\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

উদা. 13. সমাধান কর : $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$.

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4},$$

বা, $\tan^{-1}\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x} = \frac{\pi}{4}$, বা, $\tan^{-1}\frac{5x}{1-6x^2} = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore \frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, বা, $5x = 1-6x^2$,

বা, $6x^2+5x-1=0$, বা, $(6x-1)(x+1)=0$,

$\therefore 6x-1=0$, অথবা, $x+1=0$. $\therefore x=\frac{1}{6}$ বা -1.

এখানে x-এর ঋণাত্মক মান -1 দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; অতএব উহা একটি অবান্তর সমাধান।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{1}{6}$.

উদা. 14. সমাধান কর :

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+2x} + \tan^{-1}\frac{1}{4x+1} = \tan^{-1}\frac{2}{x^2}. \quad \text{[Agra '47]}$$

$$\because \tan^{-1}\frac{1}{1+2x} + \tan^{-1}\frac{1}{4x+1} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+4x}}{1-\frac{1}{(1+2x)(1+4x)}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2(1+3x)}{2x(3+4x)} = \tan^{-1}\frac{1+3x}{x(3+4x)},$$

অতএব, $\tan^{-1}\frac{1+3x}{x(3+4x)} = \tan^{-1}\frac{2}{x^2}$.

$\therefore \frac{1+3x}{x(3+4x)} = \frac{2}{x^2}$, বা, $\frac{1+3x}{3+4x} = \frac{2}{x}$,

বা, $x+3x^2 = 6+8x$, বা, $3x^2-7x-6=0$,

বা, $(3x+2)(x-3)=0$, $\therefore x = -\frac{2}{3}$ অথবা 3.

উদা. 15 সমাধান কর : $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2)$.

মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\cos^{-1}x=\beta$,

$\therefore\ \sin\alpha=x$ এবং $\cos\beta=x$;

সুতরাং $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ এবং $\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$.

এক্ষণে সমীকরণটি হইতে পাই

$\alpha-\beta=\sin^{-1}(3x-2)$,

$$\therefore\ 3x-2=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=x\times x-\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2},$$
$$=x^2-(1-x^2)=2x^2-1,$$

বা, $2x^2-3x+1=0$, বা, $(2x-1)(x-1)=0$.

$\therefore\ 2x-1=0$, অথবা, $x-1=0$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$ বা 1.

প্রশ্নমালা 18

মান নির্ণয় কর :

1. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 2. $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $\cos^{-1}0$ 5. $\sin^{-1}(\frac{4}{5})+\text{cosec}^{-1}(\frac{5}{3})$

6. $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$ [C. U. '17]

7. (i) $\sin^{-1}x$ ও (ii) $\tan^{-1}x$কে অপর বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকে প্রকাশ কর।

প্রমাণ কর :

8. $\tan^{-1}\frac{8}{15}=\text{cosec}^{-1}\frac{17}{8}$.

9. $\sin^{-1}\frac{77}{85}=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}$. [B. H. U. '48]

10. $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{56}{33}$.

11. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '39]

12. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\cot^{-1}\frac{24}{7}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$.

13. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$. [C. U. '41]

14. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

15. $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

16. $4(\cot^{-1}3+\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$. [H. S. '71]

17. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$. [U. P. B.]

18. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$. [C. U. '43]

19. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$. [C.U. '51 ; H.S. '65]

20. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '37]

21. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$. [B. H. U. '52]

22. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '52, '55 ; N. B. '64, P. U. '61]

23. যদি $\sec^{-1}x=\text{cosec}^{-1}y$ হয়, তবে সাধারণ যুক্তিতে দেখাও যে $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$. [C. U. '50]

প্রমাণ কর :

24. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a$. [C. U. '55]

25. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$
$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$. [P. U. '31]

26. $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\pi-2x$.

27. $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})=1$.

28. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}p=p$.

29. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$. [C. U, '48]

30. $\tan^{-1}r+\cot^{-1}(r+1)=\tan^{-1}(r^2+r+1)$.

31. $\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{zx+1}{z-x}=0$.

32. $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$
$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$. [C. U. (B. Sc. '39]

সমাধান কর :—

33. $\tan^{-1}x=\cot^{-1}x$.

34. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$.

35. $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$.

36. $\cot^{-1} x + \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$.

37. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} (1-x) = \cos^{-1} x$.

38. $\sin^{-1} \frac{5}{x} + \sin^{-1} \frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$. [C. U. '14] [H. S. '69]

39. $\tan^{-1} (x+1) - \cot^{-1} \frac{1}{x-1} = \tan^{-1} 2$.

40. $\tan^{-1} (x-1) + \tan^{-1} x + \tan^{-1} (x+1) = \tan^{-1} 3x$.
[C. U. (B. Sc.)]

41. $\tan^{-1} \frac{1}{4} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{6} + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}\pi$. [Agra'42]

42. $2 \cot^{-1} 2 + \cos^{-1} \frac{3}{5} = \operatorname{cosec}^{-1} x$.

43. $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \cot^{-1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{\pi}{4}$.

44. $\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1} \frac{2b}{1+b^2} = 2 \tan^{-1} x$. [C. U. '47]

45. $\tan (\cos^{-1} x) = \sin (\tan^{-1} 2)$. [H. S. '72]

46. $3 \tan^{-1} \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{1}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{3}$. [Agra '43]

47. Solve : $\left.\begin{array}{l} \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{2}{3}\pi \\ \cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \frac{1}{3}\pi \end{array}\right]$ H.S. '68 ; [C.U. '40]

48. $\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1} + \tan^{-1} \frac{x-1}{x} = \tan^{-1} (-7)$ সমীকরণটিকে সঠিকভাবে সমাধান করে xএর এরূপ কোন মান থাকিলে তাহা নির্ণয় কর।

49. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ হইলে, দেখাও যে,
$x + y + z = xyz$. [C. U. '54 ; B. U. E. '63]

50. $A + B + C = \pi$, $A = \tan^{-1} 2$, $B = \tan^{-1} 3$ হইলে, দেখাও যে, $C = \frac{\pi}{4}$. [C. U. '51]

51. দেখাও যে, $\tan^{-1} \frac{1}{a+b} + \tan^{-1} \frac{b}{a^2+ab+1} = \tan^{-1} \frac{1}{a}$.
[C. U. '49]

52. প্রমাণ কর : $\sec^2(\tan^{-1} 2)+\mathrm{cosec}^2(\cot^{-1} 3)=15.$

[C. U. '56]

53. প্রমাণ কর : $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1} x=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}.$

[A. U. '47]

54. $\sin^{-1}\alpha+\sin^{-1}\beta+\sin^{-1}\gamma=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\beta\sqrt{1-\beta^2}+\gamma\sqrt{1-\gamma^2}=2\alpha\beta\gamma.$ [B.H.U. '44]

চতুর্দশ অধ্যায়

ত্রিভুজের গুণাবলী

(Properties of Triangles)

বিভাগ (ক) [বাহু ও কোণানুপাতের সম্বন্ধ]

§ **14·1.** তোমরা জ্যামিতি হইতে জান যে প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অঙ্গ আছে। আর, ত্রিভুজগুলি কোণ অনুসারে সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী এবং ভুজানুসারে বিষমবাহু, সমবাহু ও সমদ্বিবাহু এই ছয় শ্রেণীর হইয়া থাকে।

ABC ত্রিভুজের কোণ তিনটি এবং তাহাদের পরিমাপকে সাধারণতঃ যথাক্রমে A, B, C দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আর, A, B, C শীর্ষবিন্দুগুলির বিপরীত বাহুগুলিকে ও তাহাদের দৈর্ঘ্যগুলিকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে সাধারণতঃ Δ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে। ইহার অর্ধপরিসীমা s দ্বারা সূচিত হয়, সুতরাং, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন বিভাগে আমরা ত্রিভুজের বাহুগুলি, কোণগুলি, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ, অর্ধব্যাসার্ধ ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ সংক্রান্ত সূত্রগুলি (formulas) নির্ণয় করিব।

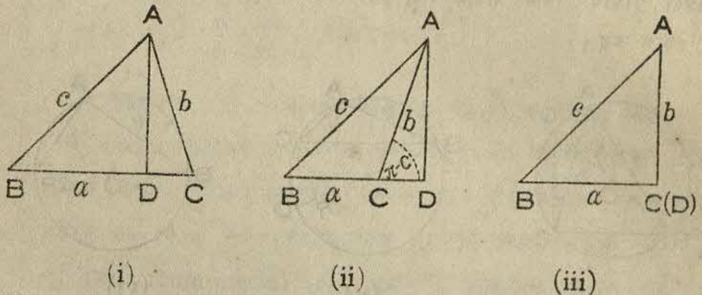
§ 14·2. **কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বিপরীত কোণের সাইনগুলির সমানুপাতী।**

প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজে $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

মনে কর, ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ।

উহা (i)-চিত্রে সূক্ষ্মকোণী, (ii)-চিত্রে স্থূলকোণী এবং (iii)-চিত্রে সমকোণী।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.



প্রমাণ : A হইতে BC-র বা বর্ধিত BC-র উপর AD লম্ব টান। (iii)-চিত্রে AD লম্বটি AC-র উপর সমাপতিত।

এক্ষণে, $\triangle ABD$ হইতে, $AD=AB \sin ABD=c \sin B$,

এবং $\triangle ACD$ হইতে, $AD=AC \sin ACD=b \sin C$ [চিত্র (i)-এ]

অথবা $\triangle ACD$ হইতে, $AD=b \sin (\pi-C)$ [চিত্র (ii)-এ]

$=b \sin C$.

$\therefore \quad b \sin C=c \sin B, \quad \therefore \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

অনুরূপে B হইতে AC-র উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায়,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}. \quad \therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

চিত্র-(iii)-এ C একটি সমকোণ বলিয়া

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\sin B=\frac{b}{c}$ এবং $\sin C=\sin 90°=1$.

$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=c, \frac{b}{\sin B}=c$ এবং $c=\frac{c}{\sin C}$ [$\because \quad \sin C=1$]

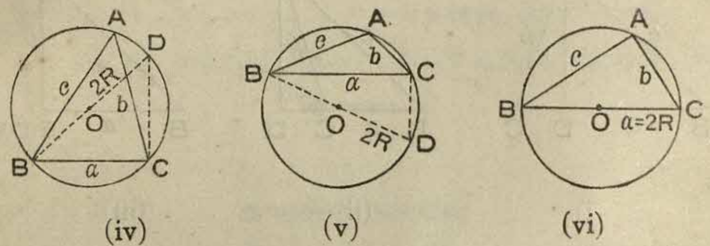
$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

অতএব, যে কোন ত্রিভুজে $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

[বিকল্প প্রমাণ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R.

A কোণটি সূক্ষ্ম বা স্থূলকোণ হইলে (অর্থাৎ চিত্র iv ও v এ) BO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DC যোগ কর।



এক্ষণে, BO = DO = R, সুতরাং BD = 2R.

$\angle$A সূক্ষ্মকোণ হইলে (চিত্র iv)

$\angle$BCD = সমকোণ (অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া),

$\therefore$ $\triangle$BCD হইতে $\sin \text{BDC} = \frac{\text{BC}}{\text{BD}} = \frac{a}{2\text{R}}$.

আবার, $\angle \text{BDC} \cong \angle \text{A}$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া)

$\therefore$ $\frac{a}{2\text{R}} = \sin \text{A}$, বা, $\frac{a}{\sin \text{A}} = 2\text{R}$.

$\angle$A স্থূলকোণ হইলে (চিত্র v)

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায় $m\angle \text{BDC} = 180° - m\angle \text{BAC}$.

$\therefore$ $\sin \text{A} = \sin (180° - \text{A}) = \sin \text{BDC} = \frac{a}{2\text{R}}$, $\therefore$ $\frac{a}{\sin \text{A}} = 2\text{R}$.

আবার, $\angle$A সমকোণ হইলে (চিত্র vi)

$\sin \text{A} = \sin 90° = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a}{2\text{R}}$ [$\because$ $a = 2\text{R}$], সুতরাং $\frac{a}{\sin \text{A}} = 2\text{R}$.

অতএব, যে কোন ত্রিভুজেই $\frac{a}{\sin \text{A}} = 2\text{R}$.

অনুরূপে AO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে যদি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে BE ও CE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$\frac{b}{\sin \text{B}} = 2\text{R}$ এবং $\frac{c}{\sin \text{C}} = 2\text{R}$.

অতএব, $\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}}$ [$\because$ প্রত্যেকটি = 2R]

অনুসিদ্ধান্ত : $\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

(i) $\therefore \quad a=2R \sin A, b=2R \sin B$ এবং $c=2R \sin C$.

(ii) $\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$.

(iii) $\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, ইত্যাদি।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) উপরের প্রমাণিত সম্বন্ধটিকে Sine নিয়ম বলা হয়। (ii) কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি উহার শীর্ষত্রয় হইতে সমদূরবর্তী। অতএব, ঐ বিন্দুটিকে কেন্দ্র করিয়া উহা হইতে যে কোন শীর্ষ পর্যন্ত দূরত্বকে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত (circum-circle) হয়। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দুটি পরিবৃত্তের কেন্দ্র হয় এবং অতিভুজটি ব্যাস হয়।]

§ 14·3. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা কোণগুলির কোসাইনের প্রকাশ।

এই সম্বন্ধকে Cosine নিয়ম বলে। প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজে

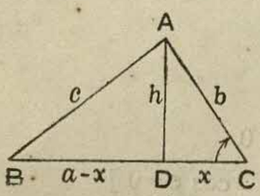
$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc} \cos A, \quad \text{বা} \quad \cos A=\frac{\boldsymbol{b^2+c^2-a^2}}{\boldsymbol{2bc}},$$

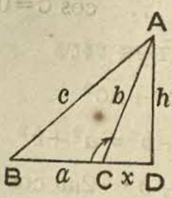
$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca} \cos B, \quad \text{বা} \quad \cos B=\frac{\boldsymbol{c^2+a^2-b^2}}{\boldsymbol{2ca}},$$

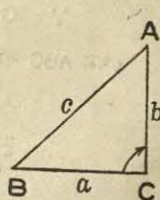
$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab} \cos C, \quad \text{বা} \quad \cos C=\frac{\boldsymbol{a^2+b^2-c^2}}{\boldsymbol{2ab}}.$$

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

চিত্র (i)-এ C কোণটি সূক্ষ্মকোণ, চিত্র (ii)-এ C কোণটি স্থূলকোণ এবং চিত্র (iii)-এ C কোণ সমকোণ।







A হইতে BC-র উপর [চিত্র (i)] বা বর্ধিত BC-র উপর [চিত্র (ii)] AD লম্ব টানা হইল। এখানে, $BC=a$, $AC=b$ ও $AB=c$.

মনে কর, $AD=h$ ও $CD=x$.

$\therefore$ (i) ও (ii) উভয় চিত্রেই $h^2=b^2-x^2 \cdots(1)$

প্রথম ক্ষেত্র। যখন C সূক্ষ্মকোণ [চিত্র (i)],

$BD = BC - DC = a - x$ এবং ACD ত্রিভুজ হইতে পাওয়া যায়

$\cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{b}$, $\therefore \quad x = b \cos C \cdots (2)$

এখন, $c^2 = AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad [\because \angle ADB = 90°]$

$= h^2 + (a-x)^2$

$= b^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax$ [(1) হইতে]

$= a^2 + b^2 - 2ax$

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$ [(2) হইতে]

দ্বিতীয় ক্ষেত্র। যখন C স্থূলকোণ [চিত্র (ii)],

এখানে $BD = BC + CD = a + x$, এবং $m\angle ACD = 180° - C$.

$\triangle ACD$ হইতে পাওয়া যায়,

$\cos ACD = \cos (180° - C) = \frac{x}{b}$,

বা, $-\cos C = \frac{x}{b}$, $\therefore \quad x = -b \cos C \cdots (3)$

এখন, $c^2 = AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad [\because \angle ADB = 90°]$

$= (a+x)^2 + h^2$

$= a^2 + x^2 + 2ax + b^2 - x^2$ [(1) হইতে]

$= a^2 + b^2 + 2ax$

$= a^2 + b^2 + 2a(-b \cos C)$ [(3) হইতে]

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$

তৃতীয় ক্ষেত্র। যখন C সমকোণ [চিত্র (ii)],

$\because \quad C = 90°, \quad \therefore \quad \cos C = 0.$

এখন ABC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times 0$

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad [\because \cos C = 0]$

অতএব, সকল ক্ষেত্রেই

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

অর্থাৎ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

অনুরূপে অন্য সূত্র দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

§ 14·4. §14·2 অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত এবং §14·3 অনুচ্ছেদ হইতে পাওয়া গিয়াছে যে, $\sin A=\frac{a}{2R}$ এবং $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

$$\therefore \quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{2R}\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}.$$

অনুরূপে $\tan B=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$,

এবং $\tan C=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$.

§ 14·5. যে কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

§ 14·5 (A) অনুচ্ছেদের চিত্র (i)-এ, $\triangle ABC$-এর C **সূক্ষ্মকোণ** হইলে

$BC=BD+CD=AB\cos ABD+AC\cos ACD$,

$\therefore \quad a=c\cos B+b\cos C$.

C কোণটি **স্থূলকোণ** হইলে [চিত্র (ii)-এ]

$BC=BD-CD=AB\cos ABD-AC\cos ACD$

$=c\cos B-b\cos(180°-C)$

$=c\cos B+b\cos C$ [$\because \cos(180°-C)=-\cos C$]

আবার, C কোণটি **সমকোণ** হইলে [চিত্র (iii)-এ]

$BC=AB\cos B$,

$\therefore \quad a=c\cos B+b\cos 90°$ [$\because \cos 90°=0$]

$=c\cos B+b\cos C$ [$\because C=90°$]

অতএব, সর্বক্ষেত্রেই $a=b\cos C+c\cos B$.

অপর সূত্র দুইটিও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

[দ্রষ্টব্য : এখানে জানা গেল যে, ত্রিভুজের যে কোন বাহু তাহার উপর অপর বাহুদ্বয়ের অভিক্ষেপ দুইটির সমষ্টির সমান হয়।]

§ 14·6. **ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির সাইনের প্রকাশ।**

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, যে কোন ABC ত্রিভুজে

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

আবার, $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$,

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}\cdots(1)$$

মনে কর, $s=$ ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা (semi-perimeter),

সুতরাং $2s=a+b+c$.

এক্ষণে, $a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c)$,

এবং $a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b)$,

অতএব, $2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$,

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

এখানে $(s-b)(s-c)$-এর কেবল ধনাত্মক বর্গমূলটি ধরা হইয়াছে। কারণ, A কোণটি ত্রিভুজের কোণ বলিয়া $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সুতরাং $\frac{A}{2}<90°$. অতএব, $\sin\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \text{ এবং } \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

§ 14·7. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির কোসাইনের প্রকাশ।

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

এবং $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$.

$$\therefore\ 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{2s(2s-2a)}{2bc}\ [\,2s=a+b+c \text{ ধরিয়া}\,]$$

$$=\frac{4s(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc},$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc},\quad\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

এখানে বর্গমূলের ধনাত্মক মানটিই গ্রহণ করা হইয়াছে। কারণ, ত্রিভুজের কোণ $\frac{A}{2}<90^\circ$. সুতরাং $\cos\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \text{ এবং } \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

§ 14·8. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির ট্যানজেন্টের প্রকাশ।

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

অতএব, §14·6 ও §14·7 অনুচ্ছেদে হইতে পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

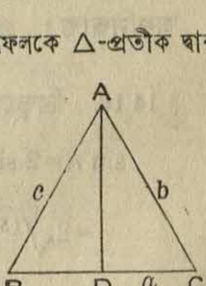
অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \text{ এবং } \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-c)}}.$$

এখানে ত্রিভুজের কোণ $A<180^\circ$, অর্থাৎ $\frac{A}{2}<90^\circ$, সুতরাং $\tan\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে। সেইজন্য এখানে কেবল ধনাত্মক বর্গমূল গ্রহণ করা হইয়াছে।

§ 14·9. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং উহার ক্ষেত্রফলকে Δ-প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইল। $AD\perp CB$ টান। AD হইল ত্রিভুজটির উচ্চতা। এক্ষণে ΔACD হইতে পাওয়া যায় $AD=AC\sin C=b\sin C$.



আবার, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।

$\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}BC.AD=\frac{1}{2}ab\sin C.$

অনুরূপে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$

$$\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}\,ab\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\,ac\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\,bc\sin A.$$

$\therefore\ \ \Delta=\frac{1}{2}\times$(যে কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল)$\times$অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন$\cdots$(i)

[অন্য আকারে ক্ষেত্রফল নির্ণয়]

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=bc\times\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\text{(ii)}$$

আবার, $\because\ \ s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$\therefore\ \ a+b+c=2s,\ \ a+b-c=2(s-c),\ b+c-a=2(s-a),$
$c+a-b=2(s-b).$

$$\therefore\ \ \Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c).\tfrac{1}{2}(b+c-a).\tfrac{1}{2}(c+a-b).\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}\cdots\text{(iii)}$$

আবার, $\because\ \ \Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}$ [R=পরিব্যাসার্ধ]

$\therefore\ \ \Delta=\dfrac{abc}{4R}$ অথবা $R=\dfrac{abc}{4\Delta}$

অনুসিদ্ধান্ত : $\sin A=\dfrac{2\Delta}{bc},\ \ \sin B=\dfrac{2\Delta}{ca},\ \ \sin C=\dfrac{2\Delta}{ab}.$

§ 14·10. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের সাইনের সম্বন্ধ।

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$
$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-b)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore\ \ \sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

অনুরূপে $\sin B=\dfrac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

আবার $\sin A=\frac{2\Delta}{bc}=\frac{2\times\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{bc}$

$$=\frac{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{2bc}$$

অনুরূপে sin B ও sin C নির্ণয় করা যায়।

[এখানে $A<180^\circ$ বলিয়া বর্গমূলের কেবল ধনাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে।]

§ **14·11.** অনুচ্ছেদ § 14·8 হইতে পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\times\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}.$$

অনুরূপে, $\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ এবং $\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$.

আবার, $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\times\frac{s(s-a)}{s(s-a)}}$

$$=\frac{s(s-a)}{\Delta}.$$

অনুরূপে, $\cot\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$.

§ **14·12.** প্রমাণ করিতে হইবে যে, যে-কোন ABC ত্রিভুজে

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}\qquad\text{[Tangent নিয়ম]}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

এখানে $A+B+C=180^\circ$, $\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$.

এক্ষণে, যে কোন ABC ত্রিভুজে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad\therefore\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\therefore \quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ, \therefore \cot\frac{B+C}{2}=\cot\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\tan\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\times\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপে অপর সম্বন্ধ দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$, $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$

এবং $\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}$.

উদাহরণমালা 14A

উদা. 1. ABC ত্রিভুজে, $a=7$, $b=3$, $c=5$, A কোণের মান নির্ণয় কর :—

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5}=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}=-\cos 120^\circ$$

$\therefore \quad A=120^\circ$.

উদা. 2. $B=60^\circ$, $c=2\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}$ হইলে Aএর মান নির্ণয় কর।

সূত্র হইতে পাই, $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin 60^\circ$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45^\circ \text{ বা } \sin 135^\circ.$$

$\therefore$ $C=45^\circ$ বা 135°; কিন্তু এখানে $C=135^\circ$ হইতে পারে না : কারণ, তাহা হইলে $B+C$ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

$\therefore$ $C=45^\circ$, $\therefore$ নির্ণেয় $A=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$.

উদা. 3. $a=25$, $b=52$, এবং $c=63$ হইলে $\tan\frac{B}{2}$এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $s=\frac{25+52+63}{2}=70$.

$\therefore \quad s-a=70-25=45,\ s-b=70-52=18,\ s-c=70-63=7.$

$\therefore \quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{7\times45}{70\times18}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$

[এখানে ঋণাত্মক বর্গমূলটি গ্রাহ্য হইতে পারে না]

উদা. 4. $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$, হইলে C এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2=0$,

বা, $a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2+2a^2b^2=2a^2b^2$

বা, $(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$,

বা, $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{1}{2}$ [উভয় পক্ষকে $4a^2b^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\therefore \quad \cos^2 C=\frac{1}{2}\ \left[\because \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]$

$\therefore \quad \cos C=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \quad C=45^\circ$ বা, 135°.

উদা. 5. যদি $c=2a$, এবং $C=3A$ হয়, তবে ABC ত্রিভুজের কোণসমূহ নির্ণয় কর।

$\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \quad \therefore \quad \frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a},$

বা, $\frac{\sin 3A}{\sin A}=\frac{2a}{a}=2$, বা, $\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}=2$,

বা, $3\sin A-4\sin^3 A=2\sin A$,

বা, $4\sin^3 A=\sin A$, বা, $\sin^2 A=\frac{1}{4}$.

$\therefore \quad \sin A=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ, \quad \therefore \quad A=30^\circ, \quad \therefore \quad C=3A=90^\circ$

এবং $B=180^\circ-(A+C)=60^\circ \quad \therefore \quad A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$.

উদা. 6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি x^2+x+1, $2x+1$ ও x^2-1 হইলে উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃহত্তম কোণটি θ.

ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটি বৃহত্তম কোণ হয়।

এখন প্রদত্ত বাহু তিনটির মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম প্রথমে তাহাই দেখিতে হইবে।

$\because$ ত্রিভুজের বাহু ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ x^2-1 ধনাত্মক হইবে, সুতরাং x এর মান অবশ্যই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$x>1$ হইলে দেখা যায় যে x^2+x+1 বৃহত্তম হইবে।

এক্ষণে, $\cos\theta=\dfrac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x^3+x^2-2x-1)}$$

$$=\frac{-(2x^3+x^2-2x-1)}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{2}=\cos 120°,\ \ \therefore\ \ \theta=120°.$

উদা. 7. $\triangle$ABC-এ দেখাও যে, $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$.

বামপক্ষ $=ab\cos C-ac\cos B$

$$=ab\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-ac\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2)$$

$$=\tfrac{1}{2}(2b^2-2c^2)=b^2-c^2.$$

উদা. 8. যে-কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$

বামপক্ষ $=(a\sin B-b\sin A)+(b\sin C-c\sin B)$

$+(c\sin A-a\sin C).$

এক্ষণে, $\because\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ (যে কোন ত্রিভুজে),

$\therefore\ a\sin B=b\sin A,\ \ \therefore\ \ a\sin B-b\sin A=0,$

অনুরূপে, $b\sin C-c\sin B=0$ এবং $c\sin A-a\sin C=0.$

$\therefore$ বামপক্ষ $=0+0+0=0.$

উদা. 9. ABC ত্রিভুজে দেখাও যে,

$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0.$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc},\ \cos^2\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{ca},\ \cos^2\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{ab}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\dfrac{b-c}{a}\cdot\dfrac{s(s-a)}{bc}+\dfrac{c-a}{b}\cdot\dfrac{s(s-b)}{ca}+\dfrac{a-b}{c}\cdot\dfrac{s(s-c)}{ab}$

$$=\frac{s}{abc}(s-a)(b-c)+\frac{s}{abc}(s-b)(c-a)+\frac{s}{abc}(s-c)(a-b)$$

$$=\frac{s}{abc}[s(b-c+c-a+a-b)-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$$

$$=\frac{s}{abc}\times 0=0.$$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজ,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{32\Delta^3}{a^2b^2c^2}.$$

$\because$ $A+B+C=180°$,

$\therefore$ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

[ইহা ত্রিকোণমিতিক অভেদ অধ্যায়ে প্রমাণিত হইয়াছে]

আবার, $\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$, $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$, এবং $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=4\sin A\sin B\sin C$

$$=4\times\frac{2\Delta}{bc}\times\frac{2\Delta}{ca}\times\frac{2\Delta}{ab}=\frac{32\Delta^3}{a^2b^2c^2}.$$

উদা. 11. যে-কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$. [H. S. '61 (Comp.)]

$\therefore$ $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$,

$\therefore$ $b-c=2R(\sin B-\sin C)$,

$$\therefore \quad \frac{b-c}{a}=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R\sin A}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\left[\because \quad \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা পাই $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$.

উদা. 12. যদি ত্রিভুজের দুইটি কোণের co-sine তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে থাকে, তবে দেখাও যে উহা সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী ত্রিভুজ। [C. U. '23]

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই, $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$; আবার $\because$ $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$,

$\therefore$ $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$,

বা, $\sin A \cos A=\sin B \cos B$,

বা, $2 \sin A \cos A=2 \sin B \cos B$, বা, $\sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore$ $2A=2B$ অথবা $(180°-2B)$.

এক্ষণে, $2A=2B$ হইলে, $A=B$ হইবে ; $\therefore$ $a=b$ হইবে।

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

আবার, $2A=180°-2B$ হইলে, $A+B=90°$ হইবে।

$\therefore$ অবশিষ্ট C কোণটি $90°$ হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। অতএব, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী ত্রিভুজ।

উদা. 13. যদি কোন ত্রিভুজে a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে cot A, cot B, cot C সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে। [A.U. '43]

$\because$ $\sin A=\frac{a}{2R}$ এবং $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\therefore$ $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$,

অনুরূপে, $\cot B=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}$ এবং $\cot C=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$.

সুতরাং, cot A, cot B, cot C সমান্তর শ্রেণী হইবে

যদি $\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$, $\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}$, $\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$ সমান্তর প্রগতি হয়,

অর্থাৎ যদি $b^2+c^2-a^2$, $c^2+a^2-b^2$, $a^2+b^2-c^2$ সমান্তর প্রগতি হয়,

অর্থাৎ যদি $(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)$
$=(a^2+b^2-c^2)-(c^2+a^2-b^2)$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a^2-2b^2=2b^2-2c^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a^2-b^2=b^2-c^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতি হয়।

প্রশ্নমালা 14(A)

1. $a=5, b=5\sqrt{3}, c=5$ হইলে, ABC ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।
2. $a=3, b=3\sqrt{3}$ এবং $A=30°$ হইলে, B নির্ণয় কর। [C.U. '21]
3. $a=48,\ b=35,\ c=60°$ হইলে, c নির্ণয় কর।
4. $a=13,\ b=14,\ c=15$ হইলে, $\tan\frac{B}{2}$ নির্ণয় কর।
5. $a=18,\ b=24,\ c=30$ হইলে, $\sin B$ নির্ণয় কর।
6. $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হইলে, A নির্ণয় কর।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

7. $a=13,\ b=14,\ c=15$ হইলে।
8. $a=6,\ b=8$ এবং $c=12$ হইলে।
9. বাহুগুলির পরিমাণ $3:4:5$ এবং $s=216$ হইলে।
10. $b=2a$ এবং $B=3A$ হইলে, ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।
11. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর, যাহার বাহুগুলি $5,\ 5\sqrt{3},\ 5$.

যে-কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর :—

12. $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$ [C. U. '13]
13. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.
14. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$ [H. S. '62]

14. (a). $a\sin\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$. [H. S. '60 (Comp.)]

15. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$. [P. U. '37, H. S. '61]
16. $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$.
17. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$.
18. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$.
19. $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$.
20. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$.

21. $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}$.

22. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$. [A. U. '44]

23. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\Delta$.

24. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$.

25. $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\Delta$.

26. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$.

27. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$.

28. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$. [C. U. '12]

29. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$. [B. H. U. '44]

30. $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ হইলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [B. H. U '45]

31. $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ হইলে, প্রমাণ কর $C=60°$. [P.U.]

32. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী। [cf. H. S. '69]

33. যদি কোন ত্রিভুজে a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে উহার অর্ধ-কোণগুলির cotangent-গুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে। [C. U. '54]

34. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে উহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। [C. U. '24]

35. যদি কোন ত্রিভুজের অর্ধ-কোণগুলির tangent-গুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে তাহাদের cosine-গুলিও সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে। [C. U. '54]

35. (a) যদি $\sin A:\sin C=\sin(A-B):\sin(B-C)$ হয়, তবে দেখাও যে a^2, b^2, c^2 একটি সমান্তর শ্রেণী।

36. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত যদি 1 : 2 : 3 হয়, তবে দেখাও যে অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত $1 : \sqrt{3} : 2$ হইবে। [H. S. '60]

37. জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর যে, যে কোন ত্রিভুজে

$a=b \cos C+c \cos B$, ইহাতে এই দুই পক্ষ পৃথকভাবে আলোচনা কর যখন (i) B ও C উভয়ই সূক্ষ্মকোণ এবং (ii) B সূক্ষ্মকোণ এবং C স্থূলকোণ।

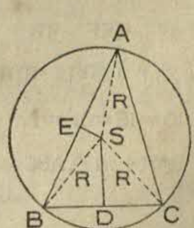
38. যদি $a \cos^2 \frac{C}{2}+c \cos^2 \frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে। [P. U. '41]

বিভাগ (খ) [ত্রিভুজের গুণাবলী]

§ **14·13. ত্রিভুজের পরিবৃত্ত** (circum-circle)। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার পরিবৃত্ত বা পরিলিখিত বৃত্ত (Circumscribed circle বা circum-circle) বলে। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদবিন্দু হয় ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং ঐ বিন্দু হইতে যে কোন কৌণিক বিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব হয় ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। ঐ কেন্দ্রকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) বলে এবং S অক্ষর দ্বারা উহাকে সূচিত করা হয়। আর ঐ ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (circum-radius) বলে এবং উহাকে R দ্বারা সূচিত করা হয়। কোন ত্রিভুজের একটিমাত্র পরিবৃত্ত হয়।

ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ নির্ণয়।

(i) ABC ত্রিভুজের BC ও AB বাহু দুইটির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় $\overrightarrow{DS}$ ও $\overrightarrow{ES}$ যেন S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। S হইল ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। SA, SB ও SC যোগ কর। উহারাই পরিব্যাসার্ধ R হইল।



∵ এখানে △BSD ও △CSD সর্বসম,

∴ $m\angle BSD=m\angle CSD=A$ [∵ একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।]

এক্ষণে, BSD ত্রিভুজের $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$, $m\angle BSD=A$ এবং $m\angle BDS=$ এক সমকোণ।

∴ $\sin A=\sin BSD=\frac{BD}{BS}=\frac{\frac{1}{2}a}{R}=\frac{a}{2R}$, ∴ $R=\frac{a}{2 \sin A}$.

অনুরূপে, $R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$.

অতএব, $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\cdots(1)$

(i) আবার, $\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$,

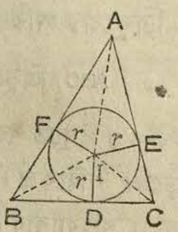
$\therefore\quad R=\frac{abc}{4\triangle}\cdots\cdots(2)$

দ্রষ্টব্য ঃ এই সূত্রগুলি পূর্বেই প্রমাণ করা হইয়াছে। এখানে বিকল্প প্রমাণ দেওয়া হইল।

§ **14·14. ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত** (In-circle)। যে বৃত্ত ত্রিভুজের ভিতর উহার বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে তাহাকে উহার অন্তর্বৃত্ত বা অন্তর্লিখিত বৃত্ত (In-circle বা Inscribed circle) বলে। ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদবিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। উহাকে অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) বলে এবং উহাকে I-অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। আর ঐ কেন্দ্র হইতে যে কোন বাহুর উপর লম্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius) হয় এবং উহাকে r দ্বারা সূচিত করা হয়।

ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius) **নির্ণয়।**

(i) মনে কর, ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\vec{BI}$ ও $\vec{CI}$ পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিল। I-বিন্দু হইতে বাহু তিনটির উপর ID, IE ও IF লম্ব টানা হইল। ঐ লম্ব তিনটি সমান হইবে। I-কে কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অতএব DEF বৃত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত এবং ID (বা r) উহার ব্যাসার্ধ হইল, সুতরাং



ID=IE=IF=r. IA যোগ কর।

এক্ষণে $m\triangle ABC=m\triangle IBC+m\triangle IAB+m\triangle IAC$

$=\frac{1}{2}BC.ID+\frac{1}{2}AB.IF+\frac{1}{2}AC.IE$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$=rs$ [s= ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা]

$\therefore\quad r=\frac{\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}}{s}=\frac{\triangle}{s}\cdots(1)$

(ii) আবার, $\triangle$IBD হইতে পাওয়া যায় $BD=r\cot\frac{B}{2}$

এবং $\triangle$ICD হইতে পাওয়া যায় $CD=r\cot\frac{C}{2}$.

$$\therefore\quad a=BC=BD+CD=r\cot\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}$$

$$=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=r\left(\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right)$$

$$=r\times\left(\frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\right)$$

$$=r\times\frac{\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}=r\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$[\because\ \sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\sin(90°-\frac{1}{2}A)=\cos\frac{1}{2}A\ ]$

$$\therefore\quad r=\frac{a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}$$

এক্ষণে, $\because\ a=2R\sin A=2R.2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

$=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A,$

$\therefore\ r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$ [a-এর মান বসাইয়া]...(2)

(iii) আবার, $\because$ $AF=AE$

$BD=BF$

$CD=CE$

$\therefore$ $AF+BD+CD=$ অর্ধপরিসীমা $=s$

$\therefore$ $AF+BC=s$ বা, $AF+a=s$, $\therefore$ $AF=s-a$.

অনুরূপে $BF=s-b$ এবং $CE=s-c$.

এক্ষণে, $\triangle$AIF হইতে, $IF=AF\tan IAF=AF\tan\frac{1}{2}A$,

বা, $r=(s-a)\tan\frac{1}{2}A$
অনুরূপে, $r=(s-b)\tan\frac{1}{2}B$
এবং $r=(s-c)\tan\frac{1}{2}C$ ……….(3)

§ 14·15. অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় :

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুগুলি পর্যন্ত দূরত্ব তিনটি হইল IA, IB ও IC.

$\triangle$AIF হইতে, $IA=IF\ \text{cosec}\ IAF$.

$\therefore$ $IA=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}A$.

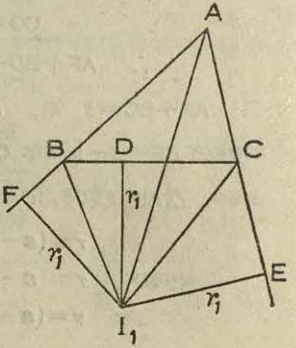
অনুরূপে, $IB=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}B$ এবং $IC=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}C$.

§ **14·16. বহির্বৃত্ত** (ex-circle)। যে বৃত্ত ত্রিভুজের কোন একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বা বহির্লিখিত বৃত্ত (ex-circle বা escribed circle) বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত হয়। যে বৃত্ত ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে এবং AB ও AC বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে তাহাকে A কোণের বিপরীত (অথবা A কোণ সাপেক্ষে) বহির্বৃত্ত বলা হয়। ঐরূপ B ও C কোণ দুইটির বিপরীত আরও দুইটি বহির্বৃত্ত হইতে পারে।

ত্রিভুজের কোন একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও অপর যে কোন কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই (অথবা যে কোন দুই কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডদ্বয়ের ছেদবিন্দুই) বহির্বৃত্তের কেন্দ্র (ex-centre) হয়। আর ঐ বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর লম্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ **বহির্ব্যাসার্ধ** (ex-radius) হইয়া থাকে। A, B ও C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তগুলির কেন্দ্রগুলিকে যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 এবং ব্যাসার্ধগুলিকে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধগুলি নির্ণয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং B কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক I_1 বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল (C কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকও ঐ বিন্দুতে মিলিত হইবে)। I_1 বিন্দু ত্রিভুজটির একটি বহির্বৃত্তের কেন্দ্র। I_1 বিন্দু হইতে BC-র উপর I_1D লম্ব এবং AB ও AC-র বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে I_1F ও I_1E লম্ব টানা হইল। জ্যামিতি হইতে পাই এই লম্বগুলি সমান ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ। অতএব, $I_1D=I_1E$ $=I_1F=r_1$. I_1কে কেন্দ্র করিয়া I_1D (অর্থাৎ r_1) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত BCকে এবং বর্ধিত AC ও ABকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।



চিত্র 11

অনুরূপে মনে কর, r_2 ও r_3 যথাক্রমে B কোণের ও C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ।

(i) CI_1 যোগ করা হইল।

এক্ষণে, $m\triangle ABC = m ABI_1 + m\triangle ACI_1 - m\triangle BCI_1$

$$= \tfrac{1}{2}AB.FI_1 + \tfrac{1}{2}AC.EI_1 - BC.DI_1$$

$$=\tfrac{1}{2}cr+\tfrac{1}{2}br-\tfrac{1}{2}ar$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(b+c-a)=\tfrac{1}{2}r_1(b+c+a-2a)$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(2s-2a)=r_1(s-a).$$

$\therefore$ Δ (অর্থাৎ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল) $=r_1(s-a)$,

$\therefore$ $r_1=\dfrac{\Delta}{s-a}$. অনুরূপে, $r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}$ এবং $r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}$ ...(1)

(ii) আবার, $m\angle DBI_1=\tfrac{1}{2}m\angle FBD=\tfrac{1}{2}(180°-B)=90°-\tfrac{1}{2}B$,

এখন $\triangle BDI_1$ হইতে পাই,

$$BD=I_1D.\frac{BD}{I_1D}=r_1\cot BDI_1=r_1\cot(90°-\tfrac{1}{2}B)=r_1\tan\frac{B}{2}$$

অনুরূপে, $\triangle CDI_1$ হইতে পাই $CD=r_1\cot CDI_1=r_1\cot(90°-\tfrac{1}{2}C)$

$=r_1\tan\dfrac{C}{2}$. $\qquad\therefore\ a=BC=BD+CD$

$$=r_1\tan\tfrac{1}{2}B+r_1\tan\tfrac{1}{2}C=r_1(\tan\tfrac{1}{2}B+\tan\tfrac{1}{2}C)$$
$$=r_1\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}+\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}\right)$$
$$=r_1\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\right)$$
$$=r_1\frac{\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}=r_1\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

[$\because$ $\sin(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\sin(90°-\tfrac{1}{2}A)=\cos\tfrac{1}{2}A$]

$$\therefore\ r_1=\frac{a.\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

কিন্তু $a=2R.\sin A=2R.\,2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A=4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$,

$\therefore$ $r_1=4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$ [aর মান বসাইয়া]

অনুরূপে, $r_2=4R\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C$ ......(2)

এবং $r_3=4R\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B$

(iii) আবার, $AE=AC+CE=AC+CD=b+CD$

এবং $AF=AB+FD=AB+BD=c+BD$,

কিন্তু $AE=AF$ ($\because$ $\triangle AFI_1$ ও $\triangle AEI_1$ সর্বসম)

$\therefore$ $2AE=AE+AF=b+CD+c+BD=b+c+(BD+CD)$

$=b+c+a=2s$ [$\because$ $2s=$ পরিসীমা]

$\therefore$ $AE=s$.

অতএব, $\triangle AEI_1$ হইতে পাই $EI_1=AE\tan EAI_1$

$r_1=s\tan\tfrac{1}{2}A$

অনুরূপে, $r_2=s\tan\tfrac{1}{2}B$ ......(3)

এবং $r_3=s\tan\tfrac{1}{2}C$

§ 14·17. বহির্বৃত্তের কেন্দ্রগুলি হইতে কৌণিক বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয়।

$\triangle AFI_1$ হইতে পাই $I_1A = I_1F.\ \text{cosec}\ I_1AF$

$\therefore\ AI_1 = r_1\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}A.$

$\triangle I_1BD$ হইতে পাই, $I_1B = r_1\ \text{cosec}\ I_1BD = r_1\ \text{cosec}(90^\circ - \frac{1}{2}B)$

$\therefore\ BI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}B$; অনুরূপে $CI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}C.$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$I_2B = r_2\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}B,\ I_2A = r_2 \sec \frac{1}{2}A,\ I_2C = r_2 \sec \frac{1}{2}C$;

এবং $I_3C = r_3\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}C,\ I_3A = r_3 \sec \frac{1}{2}A,\ I_3B = r_3 \sec \frac{1}{2}B$

আবার দেখ, $AI_1 = r_1\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}A.$

কিন্তু $r_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} AI_1 &= 4R \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C, \\ BI_2 &= 4R \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}C \\ CI_1 &= 4R \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

অনুরূপ প্রণালীতে I_2A, I_2B প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণমালা 14 (B)

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 13, 14 এবং 15 সে. মি. হইলে, R-এর মান নির্ণয় কর।

$$R = \frac{abc}{4\triangle}$$

এখানে $s = \frac{1}{2}(13+14+15)$ সে. মি. $= 21$ সে. মি

$\therefore\ \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$ বর্গ সে. মি.

$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$ বর্গ সে. মি. $= 84$ বর্গ সে. মি.

$\therefore\ R = \dfrac{13 \times 14 \times 15 \text{ ঘন সে মি.}}{4 \times 84 \text{ বর্গ সে. মি}} = \dfrac{65}{8}$ সে. মি. $= 8\frac{1}{8}$ সে. মি.

উদা. 2. প্রমাণ কর: $2R^2 \sin A \sin B \sin C = \triangle.$

$\because\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R,$

$\therefore\ 2R \sin A = a,\ \ 2B \sin B = b$

$\therefore\ 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2} \times 2R \sin A \times 2R \sin B \times \sin C$
$= \frac{1}{2} a.\ b.\ \sin C = \Delta$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজে $4Rrs = abc$.

$\because\ R = \frac{abc}{4\Delta}$, এবং $r = \frac{\Delta}{s}$,

$\therefore\ 4Rrs = 4 \times \frac{abc}{4\Delta} \times \frac{\Delta}{s} \times s = abc.$

উদা. 4. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $rr_1r_2r_3 = \Delta^2$.

$\because$ যে কোন ত্রিভুজে $r = \frac{\Delta}{s}$; $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$; $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$ এবং $r_2 = \frac{\Delta}{s-c}$,

$$\therefore\ rr_1r_2r_3 = \frac{\Delta}{s} \times \frac{\Delta}{s-a} \times \frac{\Delta}{s-b} \times \frac{\Delta}{s-c}$$
$$= \frac{\Delta^2 \times \Delta^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\Delta^2 \Delta^2}{\Delta^2} = \Delta^2.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$. [C. U. ; B. H. U.]

$\because\ r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$, $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$, $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$,

$$\therefore\ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} = \frac{s-c}{\Delta} = \frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}$$
$$= \frac{3s-2s}{\Delta} = \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r}. \quad \left[\because\ r = \frac{\Delta}{s}\right.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$.

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-b} - \frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-c} - \frac{\Delta}{s}\right)$$
$$= \Delta^3 \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$
$$= \Delta^3 \times \frac{a}{s(s-a)} \times \frac{b}{s(s-b)} \times \frac{c}{s(s-c)}$$
$$= \Delta^3 \times \frac{abc}{s^2 \times \Delta^2} = \Delta \times \frac{abc}{s^2}$$
$$= \Delta \times \frac{4\Delta R}{s^2} \quad \left[\because\ R = \frac{abc}{4\Delta}\right]$$
$$= 4R \times \frac{\Delta^2}{s^2} = 4Rr^2, \quad \left[\because\ r = \frac{\Delta}{s}\right]$$

উদা. 7. দেখাও যে, $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$,

$\because \frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$ [উদা. 5 দেখ]

$\therefore \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2=\left(\frac{2}{r}\right)^2=\frac{4}{r^2}$

$=\frac{4}{r}\cdot\frac{1}{r}=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$.

উদা. 8. যদি $\triangle ABC$-র অন্তঃকেন্দ্র I হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$IA.\ IB.\ IC=abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

$\because IA=r\operatorname{cosec}\frac{1}{2}A=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\ IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\ IC=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$,

$\therefore IA.IB.IC=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$.

এক্ষণে, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

এবং $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$

$\therefore IA.IB.IC=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}}$

$=abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

[C. U. '58]

$\because A+B+C=180°$,

$\therefore \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdots(1)$

আবার, $\because r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

$\therefore \frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdots(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে পাই, $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

উদা. 10. ABC ত্রিভুজে যদি $r_1 = R$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos B + \cos C = \cos A$.

$\because \; r_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$,

$\therefore \; 4 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = \frac{r_1}{R} = 1$ [$\because$ এখানে $r_1 = R$]

এক্ষণে, $\cos B + \cos C - \cos A$

$= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}\right)$

$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + 2 \sin^2 \frac{A}{2} - 1$ [$\because \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90°$]

$= 2 \sin \frac{A}{2}\left(\cos \frac{B-C}{2} + \sin \frac{A}{2}\right) - 1$

$= 2 \sin \frac{A}{2}\left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B+C}{2}\right) - 1$ $\left[\because \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° \right]$

$= 2 \sin \frac{A}{2} . 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1$

$= 1 - 1 = 0$.

$\therefore \; \cos B + \cos C = \cos A$.

উদা. 11. প্রমাণ কর যে, $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r)$.

প্রদত্ত বামপক্ষ $= a.\frac{\cos A}{\sin A} + b.\frac{\cos B}{\sin B} + c.\frac{\cos C}{\sin C}$

$= \frac{a}{\sin A}.\cos A + \frac{b}{\sin B}.\cos B + \frac{c}{\sin C}.\cos C$

$= 2R \cos A + 2R \cos B + 2R \cos C$

$\left[\because \; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \right]$

$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right)$ [উদা. 9 দেখ]

$= 2(R + r)$.

উদা. 12. $\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) = 2$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\because \; r_1 = \frac{\Delta}{s-a}, \; r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$, এবং $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$,

$\therefore \; \frac{r_1}{r_2} = \frac{\Delta}{s-a} \div \frac{\Delta}{s-b} = \frac{s-b}{s-a}$; অনুরূপে $\frac{r_1}{r_3} = \frac{s-c}{s-a}$.

এক্ষণে প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই

$$\left(1-\frac{s-b}{s-a}\right)\left(1-\frac{s-c}{s-a}\right)=2,$$

বা, $\frac{b-a}{s-a}\times\frac{c-a}{s-a}=2$, বা, $(b-a)(c-a)=2(s-a)^2$,

বা, $(b-a)(c-a)=2(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a)^2$ $[\because\ s=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c]$

বা, $(b-a)(c-a)=\frac{1}{2}(b+c-a)^2$

বা, $2bc-2ac-2ab+2a^2=b^2+c^2+a^2+2bc-2ab-2ac.$

বা, $a^2=b^2+c^2$, $\therefore$ A কোণটি সমকোণ।

অতএব ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 13. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং OA$=x$, OB$=y$, OC$=z$; প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$ [A. U. '10]

মনে কর, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র S (চিত্র আঁকিয়া লও), এবং SP$\perp$BC. SB ও SC যোগ কর।

এক্ষণে $m\ \angle$BSC$=2\angle$A, সুতরাং $m\ \angle$BSP$=\angle$A.

$\because$ পরিকেন্দ্র হইতে কোন বাহুর দূরত্ব লম্ব-বিন্দু হইতে বিপরীত কৌণিক বিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক হয়, $\therefore$ SP$=\frac{1}{2}$AO$=\frac{1}{2}x$.

আবার, SP$=$BP cot BSP$=\frac{1}{2}a$ cot A,

অর্থাৎ $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}a$ cot A, বা, $x=a$ cot A,

$$\therefore\ \frac{a}{x}=\frac{1}{\cot A}=\tan A.$$

অনুরূপে, $\frac{b}{y}=\tan B$ এবং $\frac{c}{z}=\tan C.$

$$\therefore\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\tan A+\tan B+\tan C.$$

এখন, $\because$ A$+$B$+$C$=180^\circ$,

$$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

$$\therefore\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$

প্রশ্নমালা 14 (B)

1. ABC ত্রিভুজে $a=13$, $b=14$ এবং $c=15$, r এবং r_1 নির্ণয় কর।

2. কোণগুলি সংশ্লিষ্ট থাকিবে না এরূপ আকারে ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধকে প্রকাশ কর।

ABC ত্রিভুজের জন্য নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

3. $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{s}{R}$.

4. $\Delta=\sqrt{r_1 r_2 r_3 r}$.

5. $\dfrac{rr_1}{r_2 r_3}=\tan^2\dfrac{A}{2}$. [A. U.'47]

6. $r_1+r_2=c\cot\frac{1}{2}C$. [C. U. 46]

7. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$. [B.H.U.'56]

8. $4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s}{R}$.

9. $\frac{1}{2}\Delta=R^2\sin A\sin B\sin C$.

10. $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$.

11. $\Delta=r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$.

12. $\dfrac{a}{\tan A}+\dfrac{b}{\tan B}+\dfrac{c}{\tan C}=2(R+r)$.

13. $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

14. $r_1 r_2+r r_3=ab$. 15. $(r_2+r_3)\sqrt{\dfrac{rr_1}{r_2 r_3}}=a$.

16. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4r^2R$. [A. U. '49]

17. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\dfrac{\Delta}{R}$.

18. $\dfrac{bc-r_2 r_3}{r_1}=\dfrac{ca-r_3 r_1}{r_2}=\dfrac{ab-r_1 r_2}{r_3}$.

19. $r_1 r_2+r_2 r_3+r_3 r_1=s^2$.

20 $\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_3}\right)=\dfrac{4R}{r^2s^2}=\dfrac{16R}{r^2(a+b+c)^2}$.

21. প্রচলিত প্রতীক অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, $\sin A+\sin B+\sin C = \frac{s}{R}$ [C. U.'51, '55]

22. যদি $8R^2=a^2+b^2+c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত $3:7:8$ হইলে $R:r$ কত হইবে নির্ণয় কর।

24. যদি $r_1=r+r_2+r_3$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

25. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 5 সে. মি., 8 সে. মি. ও 5 সে. মি.। প্রমাণ কর যে, উহার দুইটি বহির্বৃত্ত সমান।

26. $R=2r$ হইলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমবাহু।

27. $\triangle ABC$-এর পরিকেন্দ্র হইতে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্বগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x, y, z হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{4xyz}$.

28. কোন ত্রিভুজের উচ্চতাগুলি h_1, h_2, h_3 হইলে প্রমাণ কর যে,
$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$.

29. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $\pi : \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$ হইবে।

30. যদি IA, IB, IC যথাক্রমে x, y, z-এর সমান হয়, তবে দেখাও যে $\frac{abc}{xyz}=\frac{s}{r}$.

31. যদি P কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের এবং P_1, P_2, P_3 উহার বহির্বৃত্ত তিনটির ক্ষেত্রফল হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{\sqrt{P}}=\frac{1}{\sqrt{P_1}}+\frac{1}{\sqrt{P_2}}+\frac{1}{\sqrt{P_3}}$

পঞ্চদশ অধ্যায়

লগারিদম্ ও ত্রিকোণমিতিক তালিকার ব্যবহার

***15·1. সাধারণ লগ তালিকার ব্যবহার :—**

তোমরা সাধারণ লগ তালিকা ও অ্যান্টিলগ তালিকার সাহায্যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের প্রণালী এবং কোন লগারিদম্ হইতে তাহার অনুরূপ সংখ্যাটি নির্ণয়ের প্রণালী বীজগণিত অংশে শিখিয়াছ। এই পুস্তকের বীজগণিত অংশের শেষে Tabte I-এ 10 হইতে 10000 পর্যন্ত সংখ্যার

অর্থাৎ দুই হইতে চারি অঙ্কযুক্ত সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে। উহা পড়িবার নিয়মও তোমরা শিখিয়াছে।

Table II হইল য়্যান্টি-লগারিদম্ তালিকা (Anti-log table)। ইহার সাহায্যে কোন সংখ্যার প্রদত্ত লগারিদম্ হইতে সেই সংখ্যাটি নির্ণয় করা যায়। এই তালিকার ব্যবহারও তোমরা জান।

Toble III. [Natural sine and cosine Table].

এই তালিকায় 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 1′ (এক মিনিট) ব্যবধানে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাধারণ সাইন ও কোসাইনগুলি একই তালিকায় দেওয়া আছে। এই তালিকার চারিটি অংশ আছে। উহাতে প্রথম অংশে সর্ববামে 0°, 1°, 2°,……, 90° পর্যন্ত তলায় তলায় লেখা আছে এবং তৃতীয় অংশে 89°, 88°,……, 0° পর্যন্ত নীচে নীচে লেখা আছে। ইহা ব্যতীত তালিকায় আরও দুইটি অংশ আছে। দ্বিতীয় অংশে আড়াআড়িভাবে (Horizontally), মাথার উপর পর পর 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′ লেখা আছে (60 মিনিটে 1 ডিগ্রী) এবং প্রত্যেকটির অনুরূপ সাইনের মান নীচে নীচে দেওয়া আছে। সর্বশেষে ডানদিকের চতুর্থ অংশে (অন্তরের অংশে বা mean difference অংশে) আবার উপরে 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′, 9′ লেখা আছে এবং তলায় তলায় অনুরূপ সাইনের মানগুলি দেওয়া আছে। সাধারণ সংখ্যার লগ তালিকা পড়িবার প্রণালীতে, এই তালিকাও পাঠ করিতে হয়।

তালিকাটি এরূপভাবে প্রস্তুত করা হইয়াছে যে, একই তালিকা হইতে সাইন ও কোসাইন নির্ণয় করা যাইবে। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural sines এবং নীচে লেখা আছে Natural cosines. সাইন নির্ণয়ের জন্য উপরের ভাগ হইতে নিম্নভাগে বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হয় এবং কোসাইন নির্ণয়ের জন্য নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হয়।

তালিকাটি এইরূপে প্রস্তুত যে, কোন কোণের সাইনের ও তাহার পূরক কোণের (complement-এর) কোসাইনের মান সমাপতিত (coincide) হইয়াছে।

স্বাভাবিক সাইন নির্ণয় : মনে কর, sin 42°36′ নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথম অংশের স্তম্ভে উপর দিক হইতে নীচের দিকে যেখানে 42° লেখা আছে সেই সারিতে ডানদিকে মাথার 30′-এর তলায় আছে ·67559 ; এখানে আরও

6′ হইলে তবে 36′ হইবে। ঐ সারিতেই অন্তরের অংশে (চতুর্থ অংশে) মাথার 6′-এর তলায় আছে 129, তালিকাটি দশমিক পাঁচ অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমানে প্রস্তুত বলিয়া 129-এর অর্থ ·00129 (অর্থাৎ 129-এর বামে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া 5 অঙ্কবিশিষ্ট করিয়া সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসিবে)।

অতএব, sin 42°36′ = ·67559 + ·00129 = ·67688.

যদি প্রদত্ত কোণে সেকেণ্ড পর্যন্ত দেওয়া থাকে, তবে তাহার সাইন নির্ণয়ের প্রণালী পরে আলোচনা করা হইবে।

কোসাইন নির্ণয় : পূর্বেই বলা হইয়াছে যে table III হইতে কোসাইন নির্ণয়ের জন্য নীচের দিক হইতে উপরের দিকে উঠিয়া তৃতীয় স্তম্ভে প্রদত্ত কোণের নিকট প্রথমে আসিতে হইবে এবং উহার সারিতে ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িয়া যাইতে হইবে। তালিকার সর্বনিম্নে দ্বিতীয় অংশে দেখ ডানদিক হইতে বামদিকে 0′, 10′, 20′,······60′ পর্যন্ত লেখা আছে। আর চতুর্থ অংশের (অন্তরের অংশের) তলায় 1′, 2′, 3′,..., 9′ ক্রমশঃ বামদিক হইতে ডানদিকে লেখা আছে।

মনে কর cosine 46°43′ নির্ণয় করিতে হইবে। তৃতীয় অংশে যেখানে 46° আছে, সেইখানে প্রথমে আসিয়া ঐ সারিতে নীচের 40′ স্তম্ভের উপর দিকে লেখা আছে ·68624 (কোসাইনের জন্য তলার দিক হইতে উপরের দিকে উঠিতে হয়)। আরও 3′ প্রয়োজন। ঐ সারিতে ডানদিকে অন্তরের স্তম্ভে 3′-এর উপর লেখা আছে 63 অর্থাৎ ·00063 (মোট 5 অঙ্কের করা হইল)।

∴ cosine 46°43′ = ·68624 − ·00063 = ·68561.

বিশেষ দ্রষ্টব্য : ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে উহার সাইনের মানও ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, সুতরাং সাইন নির্ণয়ে বর্ধিত মিনিটের জন্য অন্তরের অংশটি যোগ করিতে হইবে। আর, ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ ক্রমশঃ বাড়িলে উহার কোসাইনের মান ক্রমশঃ কমিতে থাকে, সুতরাং কোসাইন নির্ণয়ে বর্ধিত মিনিটের জন্য অন্তরের অংশ (mean difference) বিয়োগ করিতে হয়।

Table IV [Natural Tangent and Cotangent Table]

তৃতীয় তালিকার ন্যায় এই তালিকায় 1′ ব্যবধানে (অর্থাৎ ক্রমশঃ 1′ বাড়িয়া) 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণের tangents ও cotangents দেওয়া আছে। এই তালিকাও সাইন-কোসাইন তালিকার ন্যায় প্রস্তুত করা হইয়াছে। Tangent নির্ণয়ের জন্য স্তম্ভের ক্রমশঃ উপরিভাগ হইতে নিম্নভাগে এবং সারির বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হয়। আর cotangent

নির্ণয়ের জন্য নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে এবং সারির ডানদিক হইতে ক্রমশঃ বামদিকে পড়িতে হয়।

সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ ক্রমশঃ বাড়িলে তাহার tangent-এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, কিন্তু তাহার cotangent-এর মান ক্রমশঃ কমিতে থাকে। অতএব, tangent নির্ণয়ের সময় অতিরিক্ত মিনিটের জন্য **অন্তরের অংশ** (mean difference) যোগ হয়, cotangent নির্ণয়ের সময় উহা বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ। $\tan 30°23' = \cdot58513 + \cdot00118 = \cdot58631$,
$\cot 45°32' = \cdot98270 - \cdot00114 = \cdot98156$.

Table V [Logarithmic sine and cosine Table]

তোমরা জান যে, যে কোন কোণের সাইন বা কোসাইনের সাংখ্যমান 1 (unity) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। আর, 0° হইতে 45°-এর মধ্যবর্তী কোণগুলির tangent-এর এবং 45° ও 90°-এর মধ্যবর্তী কোণগুলির cotangent-এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, ঐগুলির লগারিদম্ (log) ঋণাত্মক হইবে। মাথার উপরে bar চিহ্ন ($\bar{2}, \bar{3}$ প্রভৃতি) দিয়া লেখা অসুবিধা বলিয়া উহা এড়াইবার জন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের log-এর সহিত সতত 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হয়। ইহাকে লগারিদ্‌মিক কোণানুপাত বলে এবং ঐগুলি $L \sin \theta$, $L \cos \theta$, $L \tan \theta$, প্রভৃতি লেখা হয়। অতএব, $L \sin \theta = 10 + \log \sin \theta$, $L \cos \theta = 10 + \log \cos \theta$, ইত্যাদি।

এই তালিকায় 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির $L \sin \theta$ ও $L \cos \theta$-র মান দেওয়া আছে।

Natural sine ও cosine নির্ণয়ের জন্য তালিকা যে প্রণালীতে পড়িতে হয় এই তালিকাও সেইভাবে পড়িয়া $L \sin \theta$ ও $L \cos \theta$-এর মান নির্ণয় করিতে হয়।

মনে কর, $L \sin 36°23'$ নির্ণয় করিতে হইবে। এই তালিকার প্রথম স্তম্ভের 36°-এর সারিতে ডানদিকে মাথায় 20′-এর তলায় লেখা আছে ·77268 অর্থাৎ 9·77268, সুতরাং $L \sin 36°20' = 9\cdot77268$. এক্ষণে, ঐ সারিতেই ডানদিকে অন্তরের অংশে 3′-এর নীচে লেখা আছে 51, সুতরাং নির্ণেয় $L \sin 36°23' = 9\cdot77268 + \cdot00051 = 9\cdot77319$.

আবার, (তালিকার নীচের দিক হইতে উপরের দিকে এবং দ্বিতীয় অংশের সারির ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িয়া) $L \cos 45°32' = 9\cdot84566 - \cdot00026 = 9\cdot84540$.

Table VI [Logarithmic Tangent and Cotangent Table]

Table V এর অনুরূপভাবে এই তালিকাটিও প্রস্তুত করা হইয়াছে এবং ইহার পাঠের প্রণালীও অনুরূপ। এই তালিকায় 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির L tan θ ও L cot θ দেওয়া আছে।

L tan θ নির্ণয়ের সময় mean difference যোগ করিতে হয় এবং L cot θ নির্ণয়ের সময় উহা বিয়োগ করিতে হয়। যথা—

L tan 52°36′ = 10·11502 + ·00157 = 10·11659.

L cot 65°45′ = 9·65535 − ·00168 = 9·65367.

§ 15·2. সমানুপাতী অংশের তথ্য (Principle of Proportional Parts)

তোমরা জান যে, কোন চলরাশির মানের পরিবর্তন যদি ক্ষুদ্র হয়, তবে সেই চলরাশির অপেক্ষকের [function, যথা $f(x)$ প্রভৃতির] মানের পরিবর্তন ঐ চলরাশির মানের পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হইয়া থাকে।

সমানুপাতী অংশের তথ্য :—

(i) কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মানের পরিবর্তন ঐ সংখ্যার ক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হয়।

(ii) ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মানের পরিবর্তন কোণের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হয়।

এই তথ্যটির প্রমাণ পাঠ্যবহির্ভূত, কিন্তু ইহার প্রয়োগ শিখিতে হইবে। নিম্নের উদাহরণগুলিতে সেই প্রয়োগবিধি শিখান হইতেছে।

উদাহরণমালা 15

উদা. 1. (*i*) log 74·5836 ও (*ii*) যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 2·8726412 হয় তাহা নির্ণয় কর; প্রদত্ত আছে log 74583 = 4·8726398 ও log 74584 = 4·8726457.

(i) এখানে দেখা যায় যে, log 74583·6-এর অংশকটি log 74583 ও log 74584-এর অংশকদ্বয়ের মধ্যবর্তী হইবে এবং 74583·6 সংখ্যাটি 74583 অপেক্ষা ·6 বেশী।

এক্ষণে, log 74584 = 4·8726457

এবং log 74583 = 4·8726398

∴ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর = ·000005,9

∴ ·6 বৃদ্ধির জন্য অন্তর = ·0000059 × ·6 = ·00000354 = ·0000035

[সমানুপাতী অংশের তথ্য অনুসারে দশমিক 7 অঙ্ক পর্যন্ত]

∴ log 74583·6 = 4·8726398 + ·0000035 = 4·8726433.

∴ নির্ণেয় log 74·5836 = 1·8726433.

(ii) 4·8726412 সংখ্যাটি 4·8726398 ও 4·8726457-এর মধ্যবর্তী এবং প্রথমটি হইতে উহার অন্তর ·0000014.

অতএব, 4·8726412 যে সংখ্যার লগারিদম্‌, তাহা অবশ্যই 74583 ও 74584-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, উহা 74583 + x-এর লগারিদম্।

এক্ষণে, 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর ·0000059 (সংক্ষেপে 1-এর জন্য অন্তর 59) এবং x-এর জন্য অন্তর হইয়াছে ·0000014 (সংক্ষেপে 14).

সুতরাং সমানুপাতী অংশের তথ্য হইতে পাই

$$59 : 14 :: 1 : x,$$

বা $x = \frac{14}{59} = \cdot 23\cdots$

∴ log 74583·23··· = 4·8726412.

এক্ষণে, নির্ণেয় সংখ্যাটির প্রদত্ত লগারিদম্‌ $\bar{2}$·8726412-এর অংশক এবং উপরের লব্ধ লগের অংশক একই, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি 74583·23-এর অঙ্ক কয়টি লইয়াই একই ক্রমে গঠিত সংখ্যা হইবে। অতএব, উহার পূর্ণক $\bar{2}$ অর্থাৎ −2 বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যাটি = ·07458323···

উদা. 2. sin 36°41′ = 0·59739 এবং sin 36°42′ = 0·59763, sin 36°41′32″-এর মান নির্ণয় কর।

sin 36°42′ = ·59763

sin 36°41′ = ·59739

∴ 1′-এর জন্য অন্তর = 24 (সংক্ষেপে)

∵ 1′ = 60″, ∴ 60″ এর জন্য অন্তর = 24

∴ 32″ এর জন্য অন্তর = $\frac{24 \times 32}{60}$ = 12·8 (অর্থাৎ ·000128)

∴ sin 36°41′32″ = ·59739 + ·000128 = ·597518.

উদা. 3. cos 46°24′ = ·068962 এবং 1′-এর জন্য অন্তর = 21, cos 46°24′40-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে 46°24′40″ ও 46°24′ এর অন্তর 40″

এবং 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর 21 (অর্থাৎ ·00021)

$\therefore$ 40″ এর'জন্য অন্তর $=\frac{21\times 40}{60}=14$ (অর্থাৎ ·00014)

$\because$ কোণ পরিমাণ বাড়িলে উহার cosine এর মান কমে,

$\therefore$ $\cos 46°24'40'' = \cdot 68982 - \cdot 00014 = \cdot 68948$.

উদা. 4. $L \sin 44°17' = 9\cdot 8439842$ এবং $L \sin 44°18' = 9\cdot 8441137$ হইলে, $L \sin 44°17'33''$ এবং $L \operatorname{cosec} 44°17'33''$ এর মান নির্ণয় কর।

(i) $L \sin 40°18' = 9\cdot 8441137$

$L \sin 40°17' = 9\cdot 8439842$

$\therefore$ 1′ এর জন্য অন্তর $=$ 1295 (অর্থাৎ ·0001295)

অর্থাৎ 60″ এর জন্য অন্তর $=1295$

$\therefore$ 33″ এর জন্য অন্তর $=\frac{1295\times 33}{60}=712\cdot 25$ অর্থাৎ $=\cdot 000071225$

$\therefore$ $L \sin 40°17'33'' = 9\cdot 8439842 + \cdot 0000712$

$= 9\cdot 8440554$.

(ii) মনে কর, $44°17'33'' = \theta$.

এখানে $\log \sin \theta = L \sin \theta - 10$.

এক্ষণে, $\log \operatorname{cosec} \theta = \log \frac{1}{\sin \theta} = -\log \sin \theta$ [$\because$ $\log 1 = 0$]

$= -(L \sin \theta - 10) = 10 - L \sin \theta$

$= 10 - 9\cdot 8440554 = \cdot 1559446$.

$\therefore$ $L \operatorname{cosec} 44°17'33'' = \log \operatorname{cosec} \theta + 10 = 10\cdot 1559446$.

উদা. 5. $\operatorname{cosec} 13°8' = 4\cdot 4010616$ এবং $\operatorname{cosec} 13°9' = 4\cdot 3955817$ হইলে $\operatorname{cosec} 13°8'19''$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে কোণের পরিমাণ 1′ বা 60″ বেশী হওয়ার জন্য cosec-এর মান (4·4010616 − 4·3955817) বা ·0054799 কমিয়াছে।

$\therefore$ কোণের 19″ বৃদ্ধির জন্য cosec-এর মান কমিবে

$\frac{19}{60} \times \cdot 0054799$ বা ·0017353.

$\therefore$ $\operatorname{cosec} 13°8'19'' = 4\cdot 4010616 - \cdot 0017353 = 4\cdot 3993263$.

উদা. 6. প্রদত্ত আছে $L \cot 62°26' = 9\cdot 5257779$ ও $L \cot 62°27' = 9\cdot 5253589$; $L \cot 62°26'47''$ এর মান নির্ণয় কর এবং $L \cot \theta = 9\cdot 5254782$ সমীকরণের সমাধান কর।

(i) $L \cot 62°26' = 9\cdot 5257779$

$L \cot 62°27' = 9\cdot 5253589$

$\therefore$ কোণের 1′ বা 60″ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $=$ ·0004190

অর্থাৎ কোণের 60″ বৃদ্ধির জন্য লগের মান ·0004190 কমিয়াছে।

$\therefore$ 47″ বৃদ্ধির জন্য অন্তর$=\frac{47\times{}^{\cdot}0004190}{60}=$ 0003282.

$\therefore$ $L\cot 62^\circ26'47''=9{\cdot}5257779-{}^{\cdot}00003\ 82=9{\cdot}524497.$

(ii) এক্ষণে, $L\cot\theta=9{\cdot}5254782$ এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

এখানে $L\cot 62^\circ26'=$ ৎ$\cdot5257779$

এবং $L\cot\theta\qquad=9{\cdot}5254782$

$\therefore$ অন্তর $=$ 2997 (সংক্ষেপে)

কিন্তু প্রদত্ত শর্ত হইতে 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর=4190 (সংক্ষেপে)

$\therefore$ লগ, 4190 কমে কোণের 60″ বৃদ্ধির জন্য

$\therefore$ লগ, 2997 „ „ $\frac{60''\times 2997}{4190}$ বৃদ্ধির জন্য বা 42·9″ বৃদ্ধির জন্য

$\therefore$ $\theta=63^\circ26'43'''$(আসন্ন)।

উদা. 7. কোন্ কোণের $L\tan$ এর মান 9·732235 হয়, তাহা লগ তালিকা হইতে নির্ণয় কর।

Logarithmic tangent-এর তালিকা (Table VI) হইতে পাই $L\tan 28^\circ20'=9{\cdot}73175$ এবং 1′ এর জন্য অন্তর$={}^{\cdot}00030$.

$\therefore$ $L\tan 28^\circ21'=9{\cdot}73205$ এবং $L\tan 28^\circ22'=9{\cdot}73235$.

$\because$ প্রদত্ত $L\tan$-এর মান 9·73205 ও 9·73235-এর মধ্যবর্তী,

$\therefore$ নির্ণেয় কোণটি 28°21′ ও 28°22′-এর মধ্যবর্তী হইবে।

$9{\cdot}732235-9{\cdot}73205={}^{\cdot}000185.$

$\because$ ·00030 অন্তর হয় কোণের 1′ বা 60″ বৃদ্ধি জন্য,

$\therefore$ ·000185 „ „ „ $\frac{60''\times{}^{\cdot}000185}{{}^{\cdot}00030}$ বা 37″ বৃদ্ধির জন্য।

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ$=28^\circ21'37''$.

উদা. 8. তালিকা হইতে মান নির্ণয় কর :

$$\frac{\tan 82^\circ6'\times\sin 34^\circ17'}{\sec 12^\circ37'}.$$

মনে কর প্রদত্ত রাশি$=x$,

সুতরাং $x=\tan 82^\circ6'\times\sin 34^\circ17'\times\cos 12^\circ37'$.

$\therefore$ $\log x=\log\tan 82^\circ6'+\log\sin 34^\circ17'+\log\cos 12^\circ37'$.

এক্ষণে তালিকা হইতে পাই

$\log \tan 82°6' = L \tan 82°6' - 10 = \cdot 85806$

$\log \sin 34°17' = L \sin 34°17' - 10 = \bar{1}\cdot 75072$

$\log \cos 12°37' = L \cos 12°37' - 10 = \bar{1}\cdot 98938$

(যোগ করিয়া) $\log x = \cdot 59816$

$\because$ Antilog $\cdot 59816 = 3\cdot 9642$, $\therefore$ $x = 3\cdot 9642$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 3\cdot 9642$.

উদা. 9. সমাধান কর : $\sin x = \cdot 7$, দেওয়া আছে $\log 7 = \cdot 84510$,

$L \sin 44°25' = 9\cdot 14501$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 13$.

এখানে $\because$ $\sin x = \cdot 7$,

$\therefore$ $\log \sin x = \log \cdot 7 = \bar{1}\cdot 84510$

$\therefore$ $L \sin x \quad = 9\cdot 84510$

এবং $L \sin 44°25' = 9\cdot 84501$

$\therefore$ অন্তর $=$ 9 (সংক্ষেপে)

এক্ষণে, $13 = 1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর,

$\therefore$ $9 = \frac{60'}{13} \times 9$ বা $41\cdot 5''$ এর জন্য অন্তর

$L \sin x = L \sin 40°25'41\cdot 5''$

$\therefore$ $x = 40°25'41\cdot 5''$.

প্রশ্নমালা 15

তালিকা হইতে মান নির্ণয় কর :

1. $\sin 44°58'$ 2. $\cos 25°12'$

3. $\tan 35°42'$ 4. $\cot 38°25'$

5. $\sec 36°48'$ 6. cose $50°25'$

মান নির্ণয় কর :

7. $L \cos 45°15''$ 8. $L \tan 22°27'$

9. $L \sin 41°15'$ 10. $L \cot 27°34'$

11. $L \cos \theta = 9\cdot 55533$ হইলে, আসন্ন মিনিট পর্যন্ত θ নির্ণয় কর।

12. $\log 4827 = 3\cdot 68367$ এবং $\log 48\cdot 28 = 3\cdot 68376$ হইলে $\log 4827\cdot 5$ এর মান নির্ণয় কর।

13. $\log 3534 = 3\cdot 54826$ এবং $\log 3535 = 3\cdot 54838$ হইলে, কোন্ সংখ্যার লগারিদম্ $2\cdot 54831$?

14. $\sqrt[7]{34574}$. এর মান নির্ণয় কর।

[log 34574 = 4·5387496, log 61837 = 4·7912484 এবং ·00001 এর জন্য অন্তর = ·0000071.]

15. log 256·12 = 2·4084435, log 30·317 = 1·4816862 এবং log 3·0318 = ·4817003 হইলে ·0025612-এর পঞ্চম মূল নির্ণয় কর।

16. log 4376 = 3·64108 এবং log 4377 = 3·64118 হইলে log 437·66-এর মান নির্ণয় কর।

17. sin 35°24′ = ·57942 এবং sin 35°25′ = ·57965. কি পরিমাণের কোণের sine এর মান 1·57960 ?

18. cos 48°16′ = ·66566 এবং 1′-এর জন্য অন্তর = 22. cos 48°16′36″-এর মান নির্ণয় কর।

19. cos 58°18′ = ·5254716 এবং cos 58°19′ = ·5252241. হইলে কি পরিমাণ কোণের cosine ·526422 1 হইবে ?

20. tan 76°21′ = 4·1177784 এবং tan 76°22′ = 4·1230079 হইলে, কি পরিমাণের কোণের Tangent 4·1203060 হইবে ?

21. তালিকা হইতে L tan 79°41′24″-এর মান নির্ণয় কর।

22. L sin 37°43′40″ = 9·7867152 এবং L sin 37°43′50″ = 9·7867424 হইলে L sin 37°43′56″-এর মান নির্ণয় কর। [C.U.'10]

23. L tan 79°51′40″ = 10·7475657 এবং L tan 79°51′50″ = 10·7476872 হইলে কি পরিমাণের কোণের L tan = 10·7476532 ? [C.U. '21]

24. L sec 27°39′ = 10·0526648 এবং 10″-র জন্য অন্তর 110 হইলে θ-র মান নির্ণয় কর যদি L sec θ = 10·0527253 হয়।

25. log 2 = ·30103, log 6684 = 3·82504 এবং 1-এর জন্য অন্তর $\dot{7}$; $(\cdot04)^{\frac{1}{3}}$ নির্ণয় কর।

26. L sin 14°6′ = 9·386704, হইলে L cosec 14°6′ নির্ণয় কর।

27. L sin 35°20′ = 9·7621775 এবং L cos 35°20′ = 9·9115844 হইলে L tan 35°20′ নির্ণয় কর।

28. প্রমাণ কর যে, $L \sin\theta + L \operatorname{cosec}\theta = L \tan\theta + L \cot\theta = 20$ (θ একটি সূক্ষ্মকোণ)।

মান নির্ণয় কর :

29. sin 25°12′ × cos 45°15′.

30. $\dfrac{\sin 47°13'}{\tan 22°27'}$.

31. $\dfrac{\cot 27°12' \times \sin 34°17'}{\sec 77°23'}$ এর মান নির্ণয় কর :

[$L \cos 55°43' = 9{\cdot}7507$, $L \tan 62°48' = 10{\cdot}2891$,

$L \cos 77°23' = 9{\cdot}3393$ এবং $\log 239{\cdot}4 = 2{\cdot}3791$.]

32. $\sin \theta = {\cdot}6$, $\log 6 = {\cdot}77814$, $L \sin 36°52' = 9{\cdot}77812$ এবং 1′-এর জন্য অন্তর 17. θ-র মান নির্ণয় কর।

33. সমাধান কর :

$\tan x = {\cdot}3$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $L \tan 16°41' = 9{\cdot}4770875$ এবং 1′-এর জন্য অন্তর = 1352.

ষোড়শ অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান (Solution of Triangles)

§ 16·1. ত্রিভুজের তিনটি ভুজ (বাহু) ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অংশ। ত্রিভুজের এই অংশগুলিকে সম্পূর্ণরূপে জানাকেই ত্রিভুজের সমাধান বলে। এই অংশ ছয়টি স্বাধীন নহে, উহাদের পরস্পরের মধ্যে সম্বন্ধ আছে।

আমরা চতুর্দশ অধ্যায়ে দেখিয়াছি যে, সাধারণতঃ ত্রিভুজের যে কোন তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে উহার অপর অংশ তিনটি নির্ণয় করা অর্থাৎ ত্রিভুজের সমাধান করা যায় ; এই প্রদত্ত অংশ তিনটির মধ্যে অন্ততঃ একটি বাহু থাকা চাই। কারণ, যদি ত্রিভুজের কেবল তিনটি কোণ জানা থাকে, তবে ঐ কোণগুলির সমান কোণবিশিষ্ট অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, সুতরাং নির্দিষ্টরূপে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব হয় না।

আমরা এই অধ্যায়ে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে ত্রিভুজের জ্ঞাত অংশত্রয় হইতে ত্রিভুজের সমাধান প্রণালী নির্ণয় করিব। নিম্নলিখিত বিভিন্ন প্রকারে ত্রিভুজের অংশ দেওয়া থাকিতে পারে :—

(ক) তিনটি ভুজ বা বাহু

(খ) তিনটি কোণ

(গ) যে কোন দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ

(ঘ) দুইটি কোণ ও একটি বাহু

(ঙ) দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

এইগুলি সম্বন্ধে একে একে আলোচনা করা হইতেছে। প্রদত্ত অংশগুলির মান অসঙ্গত হইলে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে। যথা, প্রদত্ত দুইটি বাহু

একত্রে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা তাহার সমান হইতে পারে না, কিংবা প্রদত্ত দুইটি কোণই স্থূলকোণ বা সমকোণ হইতে পারে না।

§ 16·2. **তিনটি ভুজ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান :—**

মনে কর ABC ত্রিভুজের a, b, c বাহু তিনটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে অর্থাৎ উহার কোণ তিনটি নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র হইতে পাই $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ইহার a, b ও c জ্ঞাত হওয়ায় cos Aএর মান জানা হইল। এক্ষণে কোসাইন-তালিকা (cosine-table) হইতে ঐ মানটি যে কোণটির cosine তাহা নির্ণয় করিলেই A-র মান জানা যাইবে। ত্রিভুজের কোণগুলি 0° এবং 180°এর মধ্যবর্তী এবং এই সীমার মধ্যে কোণের cosine-এর মান একটি মাত্র হইবে, সুতরাং ঐ কোণটি নির্দিষ্টরূপে নির্ণীত হইবে।

অনুরূপে B ও C কোণও নির্ণয় করা যাইবে। দুইটি কোণ নির্ণয় করিলেই তৃতীয় কোণটি পাওয়া যাইবে।

নিকটতম আসন্নমান। তালিকা হইতে কোণের কেবল আসন্নমান নির্ণয় করা যায়, কিন্তু সঠিক মান নির্ণয় করা যায় না। উচ্চতর গণিতে প্রমাণিত হইয়াছে যে, Logarithmic Tangent Table-এর সাহায্যে প্রকৃত মানের **নিকটতর আসন্নমান** পাওয়া যায়। অতএব, এরূপ ক্ষেত্রে $\tan \frac{A}{2}$এর সূত্র প্রয়োগ করাই সমীচীন।

$$\tan \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\,;\ \text{এখানে } s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\therefore\ L\tan \frac{A}{2}=10+\log\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=10+\tfrac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}.$$

এই প্রকারে অন্য কোণ দুইটি নির্ণয় করা যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** সাইনের সূত্র হইতেও কোণ নির্ণয় করা যায়, কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে ইহাতে অসুবিধা হইয়া থাকে। মনে কর, পাওয়া গেল $\sin A=\frac{1}{2}$, সুতরাং A-র মান 30° অথবা 150° দুইই হইতে পারে। এরূপস্থলে কোন্ মানটি গ্রহণ করিলে অন্য প্রদত্ত শর্তগুলি অসম্ভব হইবে না তাহা দেখিতে হইবে। কিন্তু কোসাইন সূত্র বা ট্যানজেন্ট সূত্র প্রয়োগ করিলে ঐরূপ অসুবিধা হইবে না।

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

এইগুলির মধ্যে যে কোণানুপাতটি ব্যবহার করা সুবিধাজনক তাহা বাছিয়া লইতে হইবে, কিন্তু ট্যানজেন্ট সূত্র সর্বাপেক্ষা উপযোগী তাহা পূর্বেই বলা হইয়াছে।

§ 16·3. তিনটি কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান :

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে এরূপ ক্ষেত্রে সঠিকভাবে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে। কারণ, প্রদত্ত কোণত্রয়বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে। সেই ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ হইবে। অতএব, ত্রিভুজের কেবল তিনটি কোণ জানা থাকিলে উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় না, কিন্তু নিম্নের সূত্র হইতে ঐ বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় করা যায়। যথা—

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \text{ অথবা, } a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C.$$

[নিম্নের উদাহরণমালার উদা. 6 ও উদা. 5 দেখ]

উদাহরণমালা 16 (A)

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 8 এবং 9 একক। $\log 2=\cdot 3010300$, $L \tan 24°5'40''=9\cdot 6505069$, $L \tan 24°5'50''=9\cdot 6505634$, $L \tan 29°12'20''=9\cdot 7474\ 83$, এবং $L \tan 29°12'30''=9\cdot 7474677$ হইলে ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '38 ; B. H. U. '38]

এখানে $a=7, b=8, c=9$ সুতরাং $s=\frac{1}{2}(7+8+9)=12.$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{(12-7)(12-9)}{12(12-8)}}$$

$$=\sqrt{\frac{5\times 3}{12\times 4}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\sqrt{\frac{10}{32}}$$

$$\therefore\ L\tan\frac{B}{2}=10+\log\left(\frac{10}{32}\right)^{\frac{1}{2}}=10+\tfrac{1}{2}\log 10-\tfrac{1}{2}\log 32$$

$$=10+\tfrac{1}{2}\log 10-\tfrac{1}{2}\log 2^5=10+\tfrac{1}{2}\log 10-\tfrac{5}{2}\log 2$$
$$=10+\tfrac{1}{2}\times 1-\tfrac{5}{2}\times\cdot 3010300=10+\cdot 5-\cdot 7525750$$
$$=9\cdot 7474250.$$

এক্ষণে, $L \tan 29°12'30''=9\cdot 7474677$

$L \tan 29°12'20''=9\cdot 7474183$

$\therefore\ 10''$এর জন্য অন্তর $=\cdot 0000494$

মনে কর, $\frac{B}{2}=29°12'20''+x''.$

$\therefore$ x'' এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}7474250-9{\cdot}7474183={\cdot}0000067$

$\therefore$ $\frac{x''}{10''}=\frac{{\cdot}0000067}{{\cdot}0000494}=\frac{67}{494}$, $\therefore$ $x=\frac{10''\times 67}{494}=1{\cdot}35''.$

$\therefore$ $\frac{B}{2}=29°12'20''+1{\cdot}35''=29°12'21{\cdot}35''$

$\therefore$ $B=58°24'42{\cdot}7''$ (আসন্ন)।

আবার, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(12-8)(12-9)}{12(12-7)}}=\sqrt{\frac{4\times 3}{12\times 5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{2}{10}}$

$\therefore$ $L\tan\frac{A}{2}=10+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 10=10+{\cdot}1505150-{\cdot}5$

$=9{\cdot}6505150.$

এক্ষণে, $L\tan 24°5'40''=9{\cdot}6505069$

ও $L\tan 24°5'50''=9{\cdot}6505634$

$\therefore$ $10''$এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}6505634-9{\cdot}6505069={\cdot}000565$, এবং $9{\cdot}6505150-9{\cdot}6505069={\cdot}0000081.$

মনে কর, $\frac{A}{2}=24°5'40''+x''$,

$\therefore$ $565:81::10'':x$,

$\therefore$ $x=\frac{81\times 10''}{565}=1{\cdot}43''$ (আসন্ন)

$\therefore$ $\frac{A}{2}=24°5'40''+1{\cdot}43''=24°5'41{\cdot}43''$ (প্রায়)

$\therefore$ $A=48°11'22{\cdot}86''$ (প্রায়)।

অতএব, $C=180°-A-B=180°-106°36'5{\cdot}56''$

$=73°23'54{\cdot}44''$ (প্রায়)।

উদা. 2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 32, 40, 66 ; লগ তালিকার সাহায্যে উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [C.U. '45]

এখানে যে বাহুর দৈর্ঘ্য 66 তাহার বিপরীত কোণটি বৃহত্তম কোণ। মনে কর, ঐ কোণটি A.

এক্ষণে, $\cos A=\frac{32^2+40^2-66^2}{2\times 32\times 40}=-\frac{1732}{2560}=-\frac{433}{640}=-{\cdot}67656\cdots$

লগ তালিকা হইতে পাই $\cos 47°20'={\cdot}67773$

এবং $\cos 47°30'={\cdot}67559$

$\therefore$ $10'$এর জন্য অন্তর $={\cdot}00214$

${\cdot}67773-{\cdot}67656={\cdot}00117.$

এক্ষণে, 214 অন্তর হয় 10′এর জন্য

$\therefore$ 117 অন্তর হয় $\frac{1170}{214}$, বা, 5′28″-এর জন্য

$\therefore \cos 47°25'28'' = ·67656.$

$\therefore \cos(180° - 47°25'28'') = -\cos 47°25'28'' = -·67656.$

$\therefore A = 180° - 47°25'28'' = 132°34'32''$

উদা. 3. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 12, 11র সমানুপাতী হইলে উহার ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে L tan 17°33′ = 9·500042 এবং 1′এর অন্তর = 439.

[এখানে L tan দেওয়া থাকায় tangent সূত্র হইতে সমাধান করিতে হইবে।]

এখানে $a : b : c = 7 : 12 : 11$ এবং A কোণটি ক্ষুদ্রতম। মনে কর $a = 7K, b = 12K, c = 11K, \quad \therefore \quad s = \frac{1}{2}(7K + 12K + 11K) = 15K.$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{3K \times 4K}{15K \times 8K}} = = \sqrt{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore L\tan\frac{A}{2} = 10 + \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log 10 = 10 + 0 - ·5 = 9·5.$$

অতএব, এখানে অন্তর = 9·500042 – 9·5 = ·000042 এবং $\frac{A}{2}$ কোণ 17°33′ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এক্ষণে, 439 = 1′ বা 60″-এর জন্য অন্তর

$\therefore \quad 42 = \frac{60'' \times 42}{439}$ বা 5·7″-এর জন্য অন্তর

$\therefore \quad \frac{A}{2} = 17°33' - 5·7'' = 17°32'54·3''$ (প্রায়)।

$\therefore \quad A = 35°5'49''$ (প্রায়)।

উদা. 4. $a = \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{6}, c = 2$ হইলে, ত্রিভুজটির সমাধান কর।

এখানে $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{4 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 6}{2 \times 2(\sqrt{3} - 1)}$

$$= \frac{4 + 4 - 2\sqrt{3} - 6}{4(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{4(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$

$\therefore \quad B = 120°.$

আবার, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 6 - 4}{2(\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{6}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°,$$

$\therefore \quad C = 45°, \quad \therefore \quad A = 180° - 120° - 45° = 15°.$

$\therefore$ সমাধান হইল $A = 15°, B = 120°, C = 45°.$

উদা. 5. ত্রিভুজের দুইটি কোণ 45° ও 75° হইলে, উহার বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $A=45°$ ও $B=75°$,

সুতরাং $C=180°-75°-45°=60°$.

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 75°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ এবং } \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore a:b:c=\sin 45°:\sin 75°:\sin 60°=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2:(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}$$ [$2\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই]।

উদা. 6. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 7 : 3 : 2 হইলে, প্রমাণ কর যে উহার ক্ষুদ্রতম বাহু ও বৃহত্তম বাহুর অনুপাত $\sqrt{2}:(\sqrt{3}+1)$ হইবে।

এখানে কোণ তিনটির সমষ্টি 180° এবং উহাদের অনুপাত 7 : 3 : 2.

$7+3+2=12$

∴ ক্ষুদ্রতম কোণটি $=\frac{2}{12}\times 180°=30°$,

এবং বৃহত্তম কোণটি $=\frac{7}{12}\times 180°=105°$,

∴ নির্ণেয় অনুপাত $=\sin 30°:\sin 105°$

$$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}:(\sqrt{3}+1).$$

উদা. 7. কোন ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণ ও বৃহত্তম কোণের অনুপাত 2 : 5 এবং তৃতীয় কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দেড়গুণ। উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের তুলনা কর।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $A:B=2:5$.

∵ তৃতীয় কোণ C প্রদত্ত ক্ষুদ্রতম A কোণের $1\frac{1}{2}$ গুণ,

∴ $A:C=2:3$,

∴ কোণ তিনটির অনুপাত অর্থাৎ $A:B:C=2:5:3$.

∴ $A=\frac{2}{2+5+3}\times 180°=36°$. অনুরূপে $B=90°$, $C=54°$.

$$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

$$=\sin 36°:\sin 90°:\sin 54°$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}:1:\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$=\sqrt{(10-2\sqrt{5})}:4:(\sqrt{5}+1).$$

প্রশ্নমালা 16 A

1. কোন ত্রিভুজে $a=283$, $b=317$, $c=428$ হইলে লগ তালিকার সাহায্যে ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর।

2. কোন ত্রিভুজে $a=18$, $b=20$, $c=22$ এবং দেওয়া আছে $\log 2=\cdot3010300$, $\log 3=\cdot4771213$; $L\ \tan\frac{A}{2}$এর মান নির্ণয় কর।

[C. U.'15]

3. $a=17$, $b=20$, $c=27$; লগ তালিকার সাহায্যে ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর।

4. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 9, 10, 11 ; বাহু 10এর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2=\cdot30103$, $L\ \tan 29°30'=9\cdot7526420$, $L\ \tan 29°29'=9\cdot7523472$.

[H. S. '64]

5. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 6, 7 তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 6=\cdot7781513$, $L\ \cos 39°14'=9\cdot8890644$, এবং 1'এর জন্য অন্তর=1032.

[C. U. ; P. U.]

6. $a=15$, $b=19$, $c=24$ হইলে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\log 5\cdot7=0\cdot75587$, $L\ \cos 88°59'=8\cdot24903$ এবং 1'এর জন্য অন্তর=718.

[C. U. '36]

7. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 14, 16 ও 18 তাহার কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2=\cdot3010300$, $L\ \tan 24°5'40''=9\cdot6505069$, $L\ \tan 24°5'50''=9\cdot6505634$, $L\ \tan 29°12'20''=9\cdot7474183$, $L\ \tan 29°12'30''=9\cdot7474677$.

8. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় 4, 5, 6 ; B নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\log 2=\cdot3010300$, $L\ \cos 27°53'=9\cdot9464040$ এবং 1'এর জন্য অন্তর $=\cdot0000669$.

[C U. '41 ; P. U. '44]

9. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3, 4-এর সমানুপাতী তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2=\cdot30103$, $\log 3=\cdot4771213$, $L\ \tan 52°14'=10\cdot1108395$, $L\ \tan 52°15'=10\cdot1111004$.

10. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 12, 15, 16 লগ তালিকার সাহায্যে তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

[C. U. '57]

11. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 68 : 75 : 77. উহার ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে $\log 2=\cdot3010300$, $L\ \cos 26°34'=9\cdot9515389$ এবং 1'এর জন্য অন্তর=632.

12. $a=\sqrt{6}, b=2, c=\sqrt{3}+1$; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

13. যে ত্রিভুজে $a=5\sqrt{3}$, $b=c=5$, তাহার সমাধান কর।

14. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b ও $\sqrt{a^2+ab+b^2}$; উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

15. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 4, 5, 6 সে. মি. হইলে প্রমাণ কর যে উহার ক্ষুদ্রতম কোণটি বৃহত্তম কোণের অর্ধেক।

16. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ 45° এবং অপর দুইটির অনুপাত 2 : 7 ; ঐ কোণগুলির মান ও বাহুত্রয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

17. ABC ত্রিভুজে A = 45° ও B = 60° ; উহার ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম বাহুর অনুপাত নির্ণয় কর।

18. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 ; উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্যত্রয়ের তুলনা কর।

19. যদি A = 45°, B = 60° হয়, তবে দেখাও যে $a+b\sqrt{2}=2c$.

20. একটি ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটি 22°30′ ও 112°30′ ; প্রমাণ কর যে উহার ভূমি উচ্চতার দ্বিগুণ।

21. কোন ত্রিভুজে $\cos A=\frac{5}{13}$ ও $\cos B=\frac{12}{13}$ হইলে $a:b:c$ নির্ণয় কর।

22. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 3 : 4 : 5 ; উহার ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম বাহুর অনুপাত নির্ণয় কর।

23. কোন ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণদ্বয়ের অনুপাত 2 : 7 এবং অপর কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দেড়গুণ। ত্রিভুজের বাহুগুলির তুলনা কর।

24. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি 40°, 60°, 80° এবং বৃহত্তম বাহুটি 22 ফুট, উহার ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে L sin 40° = 9·8080675, Lsin 80° = 9·9933515, log 22 = 1·3424227, log 14359 = 4·1571242 এবং 1এর জন্য অন্তর ·0000302. [B. U. 1899]

§ 16·4. (গ) যে কোন দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে, অর্থাৎ A, C ও a নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে প্রদত্ত অংশগুলি লইয়া একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, সুতরাং নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যাইবে।

I. যদি b ও c সমান হয়, তবে $B=C$ হইবে,

সুতরাং $A+B+C=180^\circ$ বা $A+2B=180^\circ$ এই সূত্র হইতে B-এর মান ও C-এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

তিনটি কোণ ও দুইটি বাহু জানা হইলে তৃতীয় বাহুটিও নির্ণয় করা যাইবে।

II. যদি b ও c অসমান হয় তবে, মনে কর $b>c$.

এক্ষণে, $B+C=180^\circ-A$, $\therefore \dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$ ...(1)

আবার, $\because \tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$,

$$\therefore \text{L}\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\left(\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right)$$

$$=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\cot\frac{A}{2}+10$$

$$=\log(b-c)-\log(b+c)+\text{L}\cot\frac{A}{2}\quad\cdots(2)$$

b, c ও A জানা থাকায় (2)-এর ডান পক্ষের মান নির্ণয় করা যাইবে, সুতরাং $\text{L}\tan\dfrac{B-C}{2}$ -এর মান জানা যাইবে। উহা হইতে $\dfrac{B-C}{2}$-এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে $\dfrac{B+C}{2}$ ও $\dfrac{B-C}{2}$ -এর মান জানিবার পর উহা হইতে B ও C-এর মান নির্ণীত হইবে।

আবার, ত্রিভুজের কোণ তিনটি জ্ঞাত হওয়ায়

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ অথবা $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ যে কোন সূত্র হইতে a বাহুর দৈর্ঘ্য জানা যাইবে।

[দ্রষ্টব্য : $\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, $\therefore a=b\dfrac{\sin A}{\sin B}$,

$$\begin{aligned}\therefore \log a&=\log b+\log\sin A-\log\sin B\\&=\log b+(10+\log\sin A)-(10+\log\sin B)\\&=\log b+\text{L}\sin A-\text{L}\sin B\end{aligned}$$]

[অন্য প্রণালী]

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ এই সূত্র হইতে a-র মান নির্ণয় করা যাইবে। কারণ, এখানে b, c ও A জ্ঞাত রাশি। a-র মান নির্ণয়ের পর $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$, অথবা $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ সূত্র হইতে B-এর মান নির্ণয় করা যায়। A ও B জ্ঞাত রাশি হওয়ায় C-র মানও জানা যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** লগারিদমের হিসাবে এই প্রণালীর প্রয়োগ সুবিধাজনক নহে। b ও c প্রভৃতির জ্ঞাত মান ক্ষুদ্রসংখ্যা হইলে ইহার প্রয়োগ করা যায়।]

16·5. (ঘ) দুইটি কোণের পরিমাণ ও একটি বাহু প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান।

ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং যে-কোন একটি বাহু প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান করা অতি সহজ। কারণ, উহার দুইটি কোণ প্রদত্ত হওয়ায়

$A+B+C=180^\circ$ হইতে তৃতীয় কোণটি সহজেই জানা যাইবে।

আবার, উহার যে-কোন একটি বাহু, মনে কর a, জানা আছে।

এক্ষণে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ এই সম্বন্ধ হইতে b ও c-এর মান নির্ণয় করা যাইবে। $b=\frac{a \sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a \sin C}{\sin A}$.

উদাহরণমালা 16B

উদা. 1. $a=1+\sqrt{3}, b=2, C=60^\circ$, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

এখানে, c, A, B-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র হইতে $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(1+\sqrt{3})^2+(2)^2-2(1+\sqrt{3}).2.\cos 60^\circ$$
$$=4+2\sqrt{3}+4-2(1+\sqrt{3}).2.\tfrac{1}{2}$$
$$=8+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=6.$$

$\therefore\ c=\sqrt{6}$.

আবার, $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{(1+\sqrt{3})\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sin 75^\circ;\quad \therefore\ A=75^\circ;$$

সুতরাং $B=180^\circ-A-C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $c=\sqrt{6}$, $A=75^\circ$, $B=45^\circ$.

উদা. 2. ABC ত্রিভুজে $a=21$, $b=11$, $c=34^\circ42'30''$; $\log 2=\cdot30103$ এবং $L\tan 72^\circ38'45''=10\cdot50415$. A এবং B নির্ণয় কর। [B. H. U. '47]

এখানে $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(34^\circ42'30'')$

$$=90^\circ-17^\circ21'15''=72^\circ38'45'' \cdots\cdots(1)$$

আবার, $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\frac{21-11}{21+11}\cot\frac{C}{2}$

$=\frac{10}{32}\tan\frac{A+B}{2}=\frac{10}{32}\tan 72^\circ 38' 45''$

$\therefore\ L\tan\frac{A-B}{2}=10+\log 10-5\log 2+\log\tan 72^\circ 38' 45''$

$=1-5\times {\cdot}30103+L\tan 72^\circ 38' 45''$

$[\because\ 10+\log\tan\theta=L\tan\theta]$

$=1-1{\cdot}50515+10{\cdot}50515=10.$

$\therefore\ 10+\log\tan\frac{A-B}{2}=10.\quad\therefore\ \log\tan\frac{A-B}{2}=0=\log 1$

$\therefore\ \tan\frac{A-B}{2}=1=\tan 45^\circ,\quad\therefore\ \frac{A-B}{2}=45^\circ\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=72^\circ 38' 45''+45^\circ=117^\circ 38' 45''$;

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $B=72^\circ 38' 45''-45^\circ=27^\circ 38' 45''$.

উদা. 3. $\triangle ABC$এর b ও cএর অনুপাত $5:3$ এবং $A=60^\circ 30'$; উহার অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\log{\cdot}2={\cdot}30103$, $L\cot 30^\circ 15'=10{\cdot}23420$, $L\tan 23^\circ 13'=9{\cdot}63240$ এবং 1′এর জন্য অন্তর 35.

এখানে $\frac{A}{2}=30^\circ 15'$, $\quad\therefore\ \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=59^\circ 45'\cdots\cdots(1)$

সূত্র হইতে পাই $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{5-3}{5+3}\cot\frac{A}{2}$

$=\frac{1}{4}\cot\frac{A}{2}.$

$\therefore\ \log\tan\frac{B-C}{2}=\log 1-2\log 2+\log\cot\frac{A}{2}$

$=-2\times{\cdot}30103+\log\cot\frac{A}{2}.$

$\therefore\ L\tan\frac{B-C}{2}=-{\cdot}60206+L\cot 30^\circ 15'$

[উভয়পক্ষে 10 যোগ করিয়া]

$=-{\cdot}60206+10{\cdot}23420=9{\cdot}63214.$

এক্ষণে, $L \tan 23°13' = 9{\cdot}63240$ (স্বীকার)

এবং $L \tan \frac{B-C}{2} = 9{\cdot}63214$

$\therefore$ অন্তর $= 2$ । (সংক্ষেপে) ;

$\because$ 35 অন্তর হয় $1'$ বা $60''$এর জন্য,

$\therefore$ 26 „ „ $\frac{60''}{35} \times 26$ বা $44{\cdot}57''$এর জন্য

$\therefore \frac{B-C}{2} = 23°13' - 44{\cdot}57'' = 23°12'15''$ (আসন্ন)......(2)

এখন (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $B = 59°45' + 23°12'15''$
$= 82°57'15''$

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $C = 36°32'45''$.

উদা. 4. $A = 60°15'$, $B = 54°30'$ এবং $c = 100$ সে. মি., b নির্ণয় কর।
[$\log 8{\cdot}9646162 = {\cdot}9525317$, $L \sin 54°30' = 9{\cdot}9106860$.
$L \sin 65°15' = 9{\cdot}9581543$.]

এখানে $C = 180° - (A+B) = 180° - 114°45' = 65°15'$

$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin B}$, $\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{100 \sin B}{\sin C}$.

$\therefore \log b = \log 10^2 + \log \sin B - \log \sin C$
$= 2 + \log \sin 54°30' - \log \sin 65°15'$
$= 2 + L \sin 54°30' - 10 - (L \sin 65°15' - 10)$
$= 2 + L \sin 54°30' - L \sin 65°15'$
$= 2 + 9{\cdot}9106860 - 9{\cdot}9581543 = 1{\cdot}9525317$.

এক্ষণে, $\because$ $\log b$-এর অংশক প্রদত্ত $\log 8{\cdot}9646162$-এর অংশকের সমান এবং $\log b$-এর পূর্ণক 1, $\therefore b = 8{\cdot}9646162$ সে. মি.।

উদা. 5. $A = 70°$, $B = 40°50'$ এবং $c = 4{\cdot}85$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

$\because$ এখানে $A + B = 110°50'$, $\therefore C = 180° - (C+B) = 69°10'$
তালিকা হইতে $L \sin 70° = 9{\cdot}97299$
$L \sin 40°50' = 9{\cdot}81540$
$L \sin 69°10' = 9{\cdot}97063$

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{4{\cdot}85 \times \sin 70°}{\sin 69°10'}$

$\therefore \log a = \log 4\cdot85 + L\sin 70^\circ - L\sin 69^\circ10'$

$= \cdot68574 + 9\cdot97299 - 9\cdot97063 = \cdot68810$

$= \log 4\cdot88$ (প্রায়),

$\therefore a = 4\cdot88.$

আবার, $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{4\cdot85 \times \sin 40^\circ50'}{\sin 69^\circ10'}$

$\therefore \log b = \log 4\cdot85 + L\sin 40^\circ50' - L\sin 69^\circ10'$

$= \cdot68574 + 9\cdot81349 - 9\cdot97063$

$= \cdot53060 = \log 3\cdot39$ (প্রায়)

$\therefore b = 3\cdot39.$

অতএব সমাধান হইল $a = 4\cdot88$, $b = 3\cdot39$ এবং $C = 69^\circ10'$.

উদা. 6. $c = 123$, $A = 29^\circ17'$, $B = 135^\circ$ হইলে ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুটি নির্ণয় কর। [$\log 2 = \cdot3010300$, $\log 123 = 2\cdot0899051$, $\log 32110 = 4\cdot5066403$, 1-এর জন্য অন্তর 135, $L\sin 15^\circ42'40'' = 9\cdot4327596$ 1′এর জন্য অন্তর $= 543$.]

এখানে $A + B = 29^\circ17' + 135^\circ = 164^\circ17'$.

$\therefore C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 164^\circ17' = 15^\circ43'$.

অতএব B কোণ বৃহত্তম বলিয়া b বৃহত্তম বাহু হইবে।

$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\quad \therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C}$,

বা, $b = \frac{c \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ43'} = \frac{c \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ43'}$ [$\because \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$]

$$= \frac{123 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 15^\circ43'}$$

$\therefore \log b = \log 123 + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log \sin 15^\circ43' \cdots (1)$

আবার, $15^\circ43' - 15^\circ42'40'' = 20''$ (অন্তর)

$\because$ 60″-এর জন্য অন্তর হয় 543

$\therefore$ 20″ " " " " $\frac{543}{60} \times 20$ বা $\cdot181$.

$\therefore L\sin 15^\circ43' = 9\cdot4327596 + \cdot0000181 = 9\cdot4327777.$

$\therefore \log \sin 15^\circ43' = 9\cdot4327777 - 10 = \bar{1}\cdot4327777.$

এক্ষণে (1) হইতে পাই

$\log b = \log 123 + \log 1 - \frac{1}{2}\log 2 - \log \sin 15°43'$

$[\because \quad \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}]$

$= 2{\cdot}0899051 - \frac{1}{2} \times {\cdot}3010300 - \bar{1}{\cdot}4327777$

$= 2{\cdot}0899051 - {\cdot}1505150 + 1 - {\cdot}4327777 = 2{\cdot}5066124.$

এখানে প্রাপ্ত লগের অংশক ·5066124 এবং প্রদত্ত লগ 32110-এর অংশক ·5066403.

উভয়ের অন্তর = ·5066403 − ·5066124 = 279 (সংক্ষেপে)

∵ 135 অন্তর হয় 1 এর জন্য

∴ 279 „ „ $\frac{279}{135}$ বা 2·056 এর জন্য

∴ ·5066124 হইল (32110 − 2·066) বা 32107·93 এর লগের অংশক।

এক্ষণে, ∵ log bএর পূর্ণক 2,

∴ log b = log 321·0793, ∴ b = 321·0793.

উদা. 7. একটি ত্রিভুজের ভূমিটি 7 ফুট এবং ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় 129°23′ ও 38°36′ ; উহার ক্ষুদ্রতর বাহুটির দৈর্ঘ্য কত ?

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ভূমি BC অর্থাৎ $a = 7$,

B = 38°36′ ও C = 129°23′ ; অতএব, B কোণের বিপরীত বাহু bএর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

অবশিষ্ট A কোণ = 180° − (38°36′ + 129°23)′ = 12°1′.

$\because \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \quad \therefore \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{7 \times \sin 38°36'}{\sin 12°1'},$

$\therefore \quad \log b = \log 7 + \log \sin 38°36' - \log \sin 12°1'$

$= \log 7 + L \sin 38°36' - L \sin 12°1'$

$= {\cdot}84510 + 9{\cdot}79510 - 9{\cdot}31845$ [তালিকা হইতে]

$= 1{\cdot}32175.$

এক্ষণে, তালিকা হইতে পাই 2097-এর অংশক ·32163,

·32175
·32163

∴ অন্তর = 12, কিন্তু তালিকা হইতে পাই 1-এর জন্য অন্তর 21,

∴ 12 অন্তর হইবে $\frac{12}{21}$ বা ·57 এর জন্য।

∴ ·32175 হইল 2097·6 (প্রায়)-এর লগের অংশক এবং উহার পূর্ণক 1 বলিয়া log b = log 20·976. অতএব, b = 20·976.

প্রশ্নমালা 16B

ত্রিভুজের সমাধান কর :—

1. $b=\surd$-, $c=1$ এবং $A=30^\circ$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

2. $b=\sqrt{6}$, $a=1+\sqrt{3}$ এবং $C=45^\circ$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

3. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 ও 3 সে. মি. এবং অন্তর্ভূত কোণটি 40°. ডিগ্রী এবং মিনিটে অপর কোণ দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

4. একটি ত্রিভুজের $b=540$, $c=420$ এবং $A=52^\circ6'$. B এবং C নির্ণয় কর। [L tan 26°3′ = 9·6891430, L tan 14°20′ = 9·4074189 L tan 14°21′ = 9·4079543.] [C. U. '34]

5. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 ও 5 ফুট এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণটি 120°. অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর।

[log 4·8 = 6812412, L tan 8°12′ = 9·1586706 এবং 60″ এর জন্য অন্তর = ·0008940.] [C. U. '40, '49 ; B. U. E. '63]

6. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 18 ফুট ও 2 ফুট এবং অন্তর্ভূত কোণটি 55°. অবশিষ্ট কোণ দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

[log 2 = ·3010300, L cot 27°30′ = 10·2835233, L tan 56°46′ = 10·1363769 এবং 1′ এর জন্য অন্তর = ·0002763.] [C. U. '42]

7. $a : b = 7 : 3$ এবং $C=60^\circ$. A এবং B নির্ণয় কর।

[log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213, L tan 34°42′ = 9·8403776, 1′ এর জন্য অন্তর = 2699.] [B. H. U. '40]

8. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 14 এবং 11 এবং অন্তর্ভূত কোণটি 60°. অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর।

[L tan 11°44′ = 9·3174299, L tan 11°45′ = 9·3180640 ; log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213.] [C. U. '44]

9. কোন ত্রিভুজে $b=2·25$, $c=1·75$, $A=54^\circ$. B এবং C নির্ণয় কর।

[log 2 = ·301030, L tan 63° = 10·292834, L tan 13°47′ = 9·389724, L tan 13°48′ = 9·390270.] [C.U. '31]

10. $a=70$, $b=35$, $C=36^\circ52'12''$ হইলে অবশিষ্ট কোণ দুইটি A ও B নির্ণয় কর। [log 3 = 0·4771213, L cot 18°26′6″ = 10·4771213.]

11. $b=243$, $c=681$ এবং $A=50^\circ42'$; তালিকা হইতে A এবং B নির্ণয় কর।

12. $b=80, c=100$ এবং $A=60^\circ$ হইলে, অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর। [$\log 3 = \cdot47712$, $L \tan 10^\circ 53' 36'' = 9\cdot28432$.] [C. U. '46]

13. $a=204, b=91$ এবং $\tan \frac{A}{2} = \frac{17}{6}$ দেখাও যে, $c=125$.

14 $a=19$, $B=52^\circ 28'$ এবং $C=93^\circ 40'$; b নির্ণয় কর।
[$\log 27038 = 4\cdot4319746$, $\log 19 = 1\cdot2787536$, $\log 27037 = 4\cdot4319585$, $L \sin 52^\circ 28' = 9\cdot8992727$, $L \sin 33^\circ 52' = 9\cdot7460595$.] [P. U. '36]

15. $b=10$, $A=45^\circ$; $B=66^\circ 42' 20''$; a নির্ণয় কর।
[$\log 2 = \cdot3010300$, $\log 7\cdot698622 = \cdot8864131$,
$L \sin 66^\circ 42' = 9\cdot9630538$, 1এর জন্য অন্তর=544.] [C. U. 1906]

16. $A=C=75^\circ$, $b=\sqrt{8}$, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

17. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপ 2 : 2 : 1. ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর।

18. $a=39$, $A=81^\circ 35'$, $B=27^\circ 55'$ ত্রিভুজটি সমাধান কর।
[C. U. '33]

19. $b=1000$, $A=45^\circ$, $C=68^\circ 17' 40''$ হইলে, ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর। [$\log 2 = \cdot3010300$, $\log 7\cdot6986 = \cdot8864118$, $1'$ এর জন্য অন্তর $=57$, $L \sin 66^\circ 42' = 9\cdot9630538$, $1'$-এর জন্য অন্তর=544.]

20. $B=45^\circ$, $C=10^\circ$ এবং $A=200$ ফুট হইলে b নির্ণয় কর।
[$\log 2 = \cdot30103$, $L \sin 55^\circ = 9\cdot9133645$, $\log 1726\cdot4 = 3\cdot2371414$, $\log 1726\cdot5 = 3\cdot2371666$. [C.U. '47]

§ 166. (ঙ) দুইটি বাহু এবং তাহাদের একটির বিপরীত কোণ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং A কোণ (a বাহুর বিপরীত কোণ) দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে অর্থাৎ c বাহু এবং B ও C কোণ নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ হইতে পাই $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

সুতরাং $L \sin B = \log b + L \sin A - \log a$,

অতএব উহা হইতে B পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, $\because$ $A+B+C=180^\circ$ এবং A ও B জানা গিয়াছে,

$\therefore$ C কোণও জানা যাইবে।

আবার, $\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore \quad c=\frac{a \sin C}{\sin A}, \text{ অথবা } c=\frac{b \sin C}{\sin B},$$

সুতরাং $\log c=\log a+L \sin C-L \sin A$,

অথবা, $\log c=\log b+L \sin C-L \sin B$, ইহাদের যে কোন একটি হইতে c নির্ণয় করা যাইবে। অতএব, এইভাবে ত্রিভুজটির সমাধান হইবে।

এরূপস্থলে কিন্তু কয়েক প্রকার বিভিন্ন অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে। কারণ, প্রদত্ত অংশগুলি এরূপ হইতে পারে যে তাহাদের সাহায্যে হয়ত (1) কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না, সুতরাং ত্রিভুজের সমাধান হইবে না, (2) হয়ত একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে, অথবা (3) হয়ত দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে, সুতরাং দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।

এই তিন প্রকার অবস্থার (cases) বিষয় নিম্নে আলোচনা করা হইতেছে :

(1) $\sin B=\frac{b \sin A}{a}$, এক্ষেত্রে যদি $b \sin A>a$ হয়, তবে $\frac{b \sin A}{a}>1$ হইবে অর্থাৎ $\sin B>1$ হইবে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ কোন কোণের সাইন 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। অতএব, এক্ষেত্রে B-এর মান নির্ণয় করা যায় না। অতএব, ত্রিভুজ অঙ্কনই সম্ভব হয় না, সুতরাং ত্রিভুজের সমাধান হইতে পারে না।

(2) যদি $b \sin A=a$ হয়, তবে $\frac{b \sin A}{a}=1$ হইবে

অর্থাৎ $\sin B=1=\sin 90°$ হইবে, সুতরাং $B=90°$ হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে, এবং $b^2=a^2+c^2$, বা $b=\sqrt{a^2+c^2}$ হইতে bএর মান পাওয়া যাইবে। এক্ষেত্রে দ্রষ্টব্য এই যে $a=b$, বা $a>b$ হইলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নহে।

(3) যদি $b \sin A<a$ হয় তবে, $\sin B<1$ হইবে এবং B নির্ণয় করা যাইবে। আমরা জানি দুইটি সম্পূরক (supplementary) কোণের সাইন সমান হয়, সুতরাং এক্ষেত্রে B-র দুইটি মান পাওয়া যাইবে—একটি 0° হইতে 90°এর মধ্যবর্তী এবং অপরটি 90° হইতে 180°-র মধ্যবর্তী অর্থাৎ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং অন্যটি স্থূলকোণ। কিন্তু দুইটি মানই সর্বক্ষেত্রে গ্রহণযোগ্য (admissible) না হইতে পারে। এস্থলে তিন প্রকার অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে। যথা—

(i) যদি $a>b$ হয়, তবে $A<B$ হইবে, সুতরাং B-র মান স্থূলকোণটি গ্রাহ্য হইতে পারে না। কারণ, তাহাতে ত্রিভুজের A ও B দুইটি কোণের

সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া যায়। অতএব, এস্থলে B-র মান সূক্ষ্মকোণটিই গ্রহণ করিতে হইবে এবং ত্রিভুজের একটিমাত্র সমাধান পাওয়া যাইবে।

ii) যদি $a=b$ হয়, তবে A=B হইবে, এবং এক্ষেত্রেও B-র কেবল সূক্ষ্মকোণ মানটিই গ্রাহ্য হইবে এবং ত্রিভুজের একটিমাত্র সমাধান হইবে।

(iii) যদি $a<b$ হয়, তবে A<B হইবে, সুতরাং এক্ষেত্রে B সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হইতে পারে। অতএব, এস্থলে B-র সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ এই দুইটি মানই গ্রাহ্য হইবে এবং প্রদত্ত অংশগুলির সাহায্য **দুইটি ত্রিভুজ** অঙ্কন সম্ভব হইবে অর্থাৎ ত্রিভুজের দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে। ইহাকে **অনিশ্চয় অবস্থা** বা **দ্ব্যর্থক অবস্থা** (ambiguous case) বলে। এস্থলে A সূক্ষ্মকোণ হইবে এবং B-র মান দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে।

উপরে লব্ধ সিদ্ধান্তগুলি এক্ষেত্রে নিম্নে প্রদত্ত হইল—যদি a, b ও A প্রদত্ত থাকে, এবং

(1) যদি $b \sin A>a$ হয়, তবে কোন ত্রিভুজ হইবে না;

(9) যদি $b \sin A=a$ হয়, তবে একটি সমকোণী-ত্রিভুজ সমাধানস্বরূপ পাওয়া যাইবে।

(3) যদি $a \geqslant b$ হয় (সুতরাং $a>b \sin A$), তবে একটি মাত্র সমাধান হইবে এবং C সূক্ষ্মকোণ হইবে।

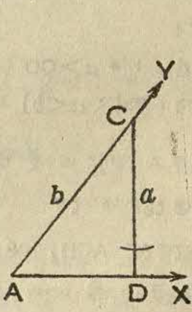
[এক্ষেত্রে $a>b$ অথবা $a=b$ হইতে পারে, ইহাই $\geqslant$ চিহ্নের অর্থ]

(4) যদি $b \sin A<a$ এবং $a<b$ হয়, তবে দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে এবং ইহাকে দ্ব্যর্থক অবস্থা বলা হয়।

§ 16·7. দ্ব্যর্থক অবস্থার জ্যামিতিক আলোচনা।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের a, b এবং A দেওয়া আছে।

যে কোন সরলরেখা ^{A}X লও এবং A বিন্দুতে A কোণের সমান ∠XAY আঁকা। $\overrightarrow{AY}$ হইতে AC=b কাটিয়া লও এবং CD ⊥ $\overrightarrow{AX}$ টান।



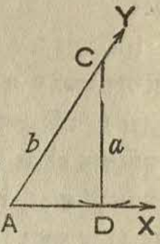
$$\therefore \quad \frac{CD}{AC}=\sin A,$$

$$\therefore \quad CD=AC \sin A=b \sin A.$$

এক্ষণে C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর।

বৃত্তটি $\overrightarrow{AX}$-কে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে (ধর B বিন্দু) তাহার সহিত C বিন্দু যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট ABC ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, (1) যদি $a<CD$ (অর্থাৎ $a<b \sin A$) হয়, তবে বৃত্তটি AX-কে কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না; সুতরাং কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।

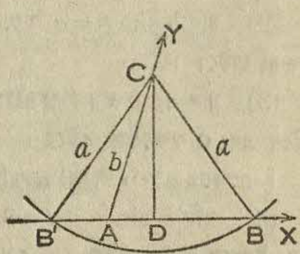


(2) যদি $a=CD$ হয়, অর্থাৎ $a=b \sin A$ হয়, তবে বৃত্তটি $\overrightarrow{AX}$ কে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং CAD সমকোণী ত্রিভুজটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। [এস্থলে $a=b$ হইতে পারিবে না]

(3) যদি $a>CD$ (অর্থাৎ $a>b \sin A$) হয়, তবে দুইটি অবস্থা হইতে পারে। যথা, (i) $a>b$, অথবা, (ii) $a=b$ হইতে পারে।

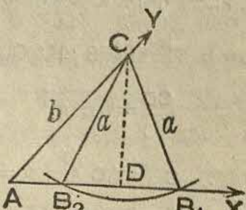
(i) $a>b$ হইলে বৃত্তটি $\overrightarrow{AX}$-কে A বিন্দুর দুইটি বিপরীত পার্শ্বে B ও B বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এখানে AB′C ত্রিভুজের $AC=b$, $CB'=a$ বটে, কিন্তু ∠CAB′ প্রদত্ত A কোণের সমান না হইয়া A-র সম্পূরক কোণ হইয়াছে, সুতরাং এই ত্রিভুজ গ্রাহ্য হইবে না। অতএব, এক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজই একমাত্র সমাধান হইবে।



(ii) এস্থলে যদি $a=b$ হয়, তবে B′ বিন্দু A বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে, সুতরাং ABC ত্রিভুজই একমাত্র সমাধান হইবে এবং উহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

(4) যদি $a>CD$ (অর্থাৎ $a>b \sin A$) কিন্তু b (বা AC) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (অর্থাৎ $a<b$) হয়, তবে বৃত্তটি $\overrightarrow{AX}$-কে A বিন্দুর একই পার্শ্বে B_1 ও B_2 বিন্দুতে ছেদ করিবে।



এক্ষেত্রে ACB_1 ও ACB_2 দুইটি ত্রিভুজেরই তিনটি অংশ প্রদত্ত অংশত্রয়ের সমান। কারণ, উহাদের ∠A = প্রদত্ত কোণ A, $CA=b$ এবং $CB_1=CB_2=a$.

অতএব, এক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ অর্থাৎ দুইটি সমাধান পাওয়া গেল। ইহাই দ্ব্যর্থক অবস্থা (Ambiguous Case)।

[দ্রষ্টব্য : দ্ব্যর্থক অবস্থায় লব্ধ দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটি সূক্ষ্মকোণী এবং অপরটি স্থূলকোণী হইবে। ত্রিভুজদ্বয়ের $B_1+B_2=180°$, সুতরাং উহারা পরস্পর সম্পূরক এবং $\sin B_1=\sin B_2$]

উদাহরণমালা 16 C

উদা. 1 $b=3, c=3\sqrt{3}$ এবং $B=30°$ হইলে, C এবং A নির্ণয় কর।

এখানে $b<c$, সুতরাং $B<C$. অতএব C সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হইতে পারে এবং C-এর মান দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে।

এক্ষণে, $\because \dfrac{\sin C}{c}=\dfrac{\sin B}{b}$,

$$\therefore \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{c\times\sin 30°}{b}=\frac{3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=\sin 60°$ বা $\sin(180°-60°)$. $\therefore C=60°$ বা $120°$.

$C=60°$ হইলে, $A=180°-(B+C)=180°-(30°+60°)=90°$;

অথবা $C=120°$ হইলে, $A=180°-(B+C)=180°-(30°+120°)=30°$;

অতএব $C=60°$ এবং $A=90°$, অথবা $C=120°$ এবং $A=30°$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণে $C=60°$ হইলে $A=90°$ হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে। আর $C=120°$ হইলে $A=30°=B$ হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।]

উদা. 2. $a=6, c=2\sqrt{2}$ এবং $C=45°$ হইলে, সম্ভব ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

সূত্র হইতে পাই $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$,

এক্ষেত্রে $a\sin C=6\times\sin 45°=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ এবং $c=2\sqrt{2}$.

$\therefore a\sin C>c$, বা, $\dfrac{a\sin C}{c}>1$ বা, $\sin A>1$

কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ ত্রিভুজ অসম্ভব হইবে, সুতরাং এখানে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে।

উদা. 3. যদি $b=100, a=b\sqrt{2}$ ও $B=30°$ হয়, তবে ত্রিভুজটি সমাধান কর এবং দ্ব্যর্থকক্ষেত্রে দুইটি সমাধান দাও।

এখানে $b<a$, সুতরাং $B<A$, $\therefore$ A-এর দুইটি পরস্পর সম্পূরক মান হইবে। অতএব ইহা দ্ব্যর্থক বলিয়া দুইটি সমাধান হইবে।

সূত্র হইতে পাই $\sin A=\frac{a \sin B}{b}=\frac{b\sqrt{2}\times \sin 30^\circ}{b}=\sqrt{2}\times \frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45^\circ \text{ বা } \sin (180^\circ-45^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ \text{ বা } \sin 135^\circ, \quad \therefore A=45^\circ \text{ বা } 135^\circ$$

এক্ষণে, (i) যদি $A=45^\circ$ হয়, তবে $C=180^\circ-(A+B)$
$=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$ হইবে ;

এবং $c=\frac{b \sin C}{\sin B}=\frac{100\times \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{100\times \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$

$$=\frac{100\times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{200\times(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}=\frac{100(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{100\times \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})=193{\cdot}185.$$

(ii) যদি $A=135^\circ$ হয়, তবে $C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$ হইবে,

এবং তখন $c=\frac{b \sin C}{\sin B}=\frac{100\times \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{100\times \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$

$$=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})=51{\cdot}76.$$

অতএব, এক্ষেত্রে সমাধান দুইটি হইল।

(i) $A=45^\circ$, $C=105^\circ$, $c=193{\cdot}185$; অথবা

(ii) $A=135^\circ$, $C=15^\circ$, $c=51{\cdot}76$.

উদা. 4. $C=26^\circ26'$, $b=127$ এবং $c=85$ হইলে, B নির্ণয় কর।

[$\log 1{\cdot}27={\cdot}1038037$, $\log 8{\cdot}5={\cdot}9294189$, $L \sin 26^\circ26'=9{\cdot}6485124$ এবং $\log \sin 41^\circ41'28''=\bar{1}{\cdot}8228972$]

এখানে $b \sin C<c$ এবং $c<b$, সুতরাং B সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইতে পারে।

$\because \log 1{\cdot}27={\cdot}1038037$, $\therefore \log 127=2{\cdot}1038037$,
$\therefore \log 8{\cdot}5={\cdot}9294189$, $\therefore \log 85=1{\cdot}9294189$,
এবং $\because \log \sin 41^\circ41'28''=\bar{1}{\cdot}8228972$
$\therefore L \sin 41^\circ41'28''=10+\bar{1}{\cdot}8228972=9{\cdot}8228972.$

এক্ষণে $\sin B=\frac{b \sin C}{c}=\frac{127 \sin 26^\circ26'}{85}$

$$\therefore L \sin B=\log 127+L \sin 26^\circ26'-\log 85$$
$$=2{\cdot}1038037+9{\cdot}6485124-1{\cdot}9294189$$
$$=9{\cdot}8228972=L \sin 41^\circ41'28''$$
$$\therefore B=41^\circ41'28'', \text{ বা } (180^\circ-41^\circ41'28'')$$
$$=41^\circ41'28'', \text{ বা } 138^\circ18'32''.$$

উদা. 5. যদি $a=4\cdot5$, $c=45$ ও C সমকোণ হয়, তবে A নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $L \sin 5^\circ 33'=8\cdot93157$ এবং 1'এর জন্য অন্তর=5260.

এখানে $\sin A=\frac{a \sin C}{c}=\frac{4\cdot5\times\sin 90^\circ}{46}$ [∵ $C=90^\circ$ (স্বীকার)]

$$=\frac{4\cdot5\times1}{45}=\frac{1}{10}.$$

∴ $\log \sin A=\log 1-\log 10=-1$ [∵ $\log 1=0$]

∴ $L \sin A=-1+10=9$

এবং $L \sin 5^\circ 33. \quad =8\,98157$ (প্রদত্ত)

∴ অন্তর $= \cdot01843$

কিন্তু 5260 অর্থাৎ ·05260 অন্তর হয় 60″-এর জন্য

∴ ·01843 ,, $\frac{60''\times1843}{5260}$ বা, 21″র জন্য

∴ $L \sin A=L \sin 5^\circ 33' 21''$, $A=5^\circ 33' 21''$.

উদা. 6. যদি △ABCএর a, b ও A দেওয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে দ্ব্যর্থক অবস্থায় cএর মান দুইটির অন্তর $2\sqrt{a^2-b^2 \sin^2 A}$ হয়।

[U. P. B. '41]

সূত্র হইতে পাই $a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$,

বা, $c^2+2b \cos A.c+b^2-a^2=0$, ইহা একটি c-এর দ্বিঘাত সমীকরণ; সুতরাং ইহা সমাধান করিয়া পাই

$$c=\frac{2b \cos A\pm\sqrt{4b^2 \cos^2 A-4(b^2-a^2)}}{2}$$

$$=\frac{2b \cos A\pm2\sqrt{b^2 \cos^2 A-b^2+a^2}}{2}$$

$$=b \cos A\pm\sqrt{a^2-b^2(1-\cos^2 A)}$$

$$=b \cos A\pm\sqrt{a^2-b^2 \sin^2 A}$$

অতএব, cএর মান দুইটি হইল $b \cos A+\sqrt{a^2-b^2} \sin A$ এবং $b \cos A-\sqrt{a^2-b^2 \sin^2 A}$.

∴ এই দুই মানের অন্তর$=2\sqrt{a^2-b^2 \sin^2 A}$

উদা. 2. $b=573$, $a=394$, $B=112^\circ 4'$ হইলে, A এবং C নির্ণয় কর।
[$\log 57\cdot3=1\cdot7581546$, $\log 3\cdot94=\cdot5954962$,
$L \sin 39^\circ 35'=9\cdot8042757$, 1′ এর জন্য অন্তর=1527,
এবং $L \cos 22^\circ 4'=9\cdot9669614$]

প্রদত্ত log 57·3 এবং log 3·94 হইতে পাই

$\therefore$ log 573 = 2·7581546 এবং log 394 = 2·5954962.

আবার, $B = 112°4' = 90° + 22°4'$

$\therefore \sin B = \sin(90° + 22°4') = \cos 22°4'$

সূত্র পাইতে পাই $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{394 \times \sin 112°4'}{573}$,

$$= \frac{394 \times \cos 22°4'}{573}$$

$\therefore$ L sin A = log 394 + L cos 22°4′ − log 573

= 2·5954962 + 9·9669614 − 2·7581546

= 9·8043030

এখন, L sin A = 9·8043030

কিন্তু L sin 39°35′ = 9·8042757

$\therefore$ অন্তর = 273 (সংক্ষেপে)

$\therefore$ 1527 অন্তর হয় 60″-এর জন্য

$\therefore$ 273 „ „ $\frac{60''}{1527} \times 273$ বা 11″ (প্রায়)-এর জন্য

$\therefore$ L sin A = L sin 39°35′11″

$\therefore$ A = 39°35′11″ এবং C = 180° − (A + B) = 28°20′48″.

প্রশ্নমালা 16 C

1. $a = \sqrt{6}$, $c = 2$, $A = 60°$ হইলে, B এবং C নির্ণয় কর।

2. $B = 60°$, $c = 6$ এবং $b = 3\sqrt{3}$. দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি সমাধান কর :—

3. $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $A = 45°$.

4. $b = 34$, $c = 70$, $B = 30°$. 5. $b = 20$, $c = 20\sqrt{2}$, $B = 30°$.

6. $C = 30°$, $b = 30$, $c = 10\sqrt{3}$. 7. $a = 5$, $c = 5\sqrt{3}$, $C = 60°$.

8. ABC ত্রিভুজে $c = 36·5$ সে. মি., $a = 45$ সে. মি. এবং $A = 43°15'$. তালিকার সাহায্যে AC নির্ণয় কর।

9. $a = 5$, $b = 7$ এবং $A = 30°$ হইলে, ডিগ্রী ও মিনিটে B নির্ণয় কর। [sin 44° = ·6967, sin 45° = ·7071.] [C. U. '29]

10. $b = 5$, $c = 4$ এবং $B = 45°$; A এবং C নির্ণয় কর।
[log 2 = ·30103, L sin 34°26′ = 9·752575]

11. $b = 112$, $c = 175$, $B = 36°20$, অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর।
[log 2 = ·30103, L sin 36°20′ = 2·77268 এবং
L sin 67°47′ = 9·96650]

12. $a=63, c=36$, $C=29°23'15''$ হইলে A নির্ণয় কর।

[log 2='3010300, log 6='8450980, L sin 29°23'=9'6907721, 1'এর জন্য অন্তর 2243, L sin 59°10'=9'9338222; 1'এর জন্য অন্তর=755]

13. $a=5, b=4$ এবং $A=45°$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর।

[log 2='30103, L sin 34°26'=9'7523919, L sin 34°27' =9'7525761.] [B. H. U. '51]

14. $a=5$, $b=8$ এবং $A=35°$ হইলে, c-এর ক্ষুদ্রতর মানটি নির্ণয় কর।

[log 2='30103, log 456706=5'659637, L sin 31°35'43'' =9'715261, L sin 35°=9'758591, L sin 66°35'=9'962672, L sin 66°36'=9'962727.] [A. U. '13]

15. $a=35, b=350$, $C=90°$ হইলে A নির্ণয় কর।

[L sin 5°44'=8'9995595, 1'এর জন্য অন্তর=12565.]

16. যদি $2b=3a$ এবং $\tan^2 A=\frac{3}{5}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহুটির এরূপ দুইটি মান হইবে যে একটি মান অপরটির দ্বিগুণ।

17. একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজে $b=1325$, $c=1665$ এবং $B=52°19'$, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

18. যদি দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্রে A ও C কোণের যথাক্রমে A_1, A_2 ও C_1, C_2 দুইটি করিয়া মান পাওয়া যায়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{\sin A_1}{\sin C_1}+\frac{\sin A_2}{\sin C_2}=2\cos B$$

19. যদি a, b, A প্রদত্ত থাকে এবং দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্রে তৃতীয় বাহুটির দুইটি মান c_1, c_2 হয় এবং $c_1>c_2$ হয়, তবে প্রমাণ কর :

(i) $c_1-c_2=2a\cos B$ [B. H. U. I. '28]

(ii) $\cos\frac{C_1-C_2}{2}=\frac{b\sin A}{a}$ [A. I. '41]

(iii) $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A$.

20. যে ক্ষেত্রে দুইটি সমাধান হয়, সেক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে Cএর মান দুইটি $\frac{(a+b)^2}{1+\cos C}+\frac{(b-c)^2}{1-\cos C}=\frac{2a^2}{\sin^2 A}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

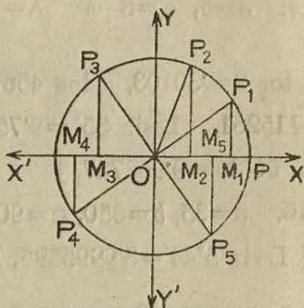
সপ্তদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের পরিবর্তন ও লেখ

(Changes in the Trigonometrical Ratios and their Graphs)

§ 17·1. কোণানুপাতের পরিবর্তন

কোন কোণের মান 0° হইতে ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে তাহার কোণানুপাতগুলির কিরূপ পরিবর্তন হয় তাহা আলোচনা করা হইতেছে।



মনে কর, $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ সরল-রেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং O-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (OP) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইয়াছে। এখন OP ব্যাসার্ধ টি কোণ-উৎপাদক-রেখা, কারণ উহাই ক্রমশঃ $\overrightarrow{OX}$ হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ঘুরিয়া বিভিন্ন কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। OP যখন প্রথমে $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত সমাপতিত ছিল, তখন XOP কোণের পরিমাণ ছিল 0°. ক্রমশঃ উহা বিভিন্ন অবস্থানে আসিয়া POP_1, POP_2 প্রভৃতি ধনাত্মক কোণগুলি উৎপন্ন করিতে থাকিল অতএব $OP=OP_1=OP_2=\cdots=$ব্যাসার্ধ এবং OP, OP_1 প্রভৃতি সতত ধনাত্মক। P_1M_1, P_2M_2,⋯ প্রভৃতি $\overrightarrow{XX'}$-এর উপর লম্বপাত করা হইল। প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে উহারা ধনাত্মক এবং অপর দুই পাদে ঋণাত্মক। OM_1, OM_2, OM_5 ধনাত্মক এবং OM_3, OM_4 ঋণাত্মক। এ সম্বন্ধে পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে।

§ 17·2. কোণের সাইনের পরিবর্তন (Changes of Sine)

সাইন$=\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$। যখন $m\angle XOP=0°$. তখন P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্বটি (PM) শূন্য এবং অতিভূজ OP, সুতরাং তখন sin XOP=0. এক্ষণে কোণটি যখন ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিবে তখন লম্ব P_1M_1 ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে কিন্তু অতিভুজটি সতত OP-র সমান থাকিবে এবং উভয়ই ধনাত্মক হইবে। অতএব, কোণটির সাইন ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে। XOP কোণটি যখন 90° হইবে, তখন উহার অতিভুজ (OP) ও লম্ব (PM) $\overrightarrow{OY}$-এর সহিত সমাপতিত হইবে এবং তখন লম্ব ও অতিভুজ সমান হওয়ায় কোণটির সাইন 1 হইবে। ইহাই sin XOP-এর বৃহত্তম মান।

আবার, যদি কোণটি 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িতে থাকে, তবে অতিভুজ (OP) একই থাকিবে, কিন্তু লম্বটি (PM) ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে, কিন্তু ধনাত্মক থাকিবে অতএব কোণটির সাইন ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। এইভাবে, যখন $m\angle XOP = 180°$ হইবে, তখন OP রেখা $\overrightarrow{OX'}$-এর সহিত মিলিত হইবে, কিন্তু লম্বটি (PM) শূন্য হইবে। তখন কোণটির সাইনের মান 0 হইবে। অতএব, কোণটি 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে উহার সাইন 1 হইতে ক্রমশঃ হ্রাস পাইয়া শূন্য হইবে।

এখন যদি কোণটি ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িতে থাকে, তবে লম্বটি (PM) ক্রমশঃ শূন্য হইতে বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু ঋণাত্মক হইবে। অতএব, কোণটির সাইনের সাংখ্যমান ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু উহা ঋণাত্মক হইবে; সুতরাং প্রকৃতপক্ষে উহার মান ক্রমশঃ 0 হইতে কমিতে থাকিবে। অতিভুজ OP যখন $\overrightarrow{OY'}$-এর সহিত মিলিবে অর্থাৎ কোণটির পরিমাপ 270° হইবে তখন (PM) লম্বটিও $\overrightarrow{OY'}$-এর সহিত মিলিত হইয়া OP-র সমান হইবে। তখন কোণটির (270°) সাইন −1 হইবে। অতএব কোণটি ক্রমশঃ 180° হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 270 হইলে উহার সাইনের মান ক্রমশ 0 হইতে −1 পর্যন্ত কমিবে।

চতুর্থ পাদে কোণটি যখন 270° হইতে ক্রমশঃ বাড়িয়া 360° হইবে তখন লম্বটি ঋণাত্মক থাকিয়া ক্রমশঃ কমিয়া (OP হইতে) 0 হইবে, সুতরাং কোণটির সাইনের সাংখ্যমান ক্রমশঃ কমিয়া 1 হইতে 0 হইবে অর্থাৎ প্রকৃতপক্ষে উহা বৃদ্ধি পাইয়া −1 হইতে 0 (শূন্য) হইবে।

এস্থলে কোন কোণের (মনে কর θ) সাইনের পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করিয়া যাহা জানা গেল, তাহার সংক্ষিপ্তসার নিম্নে দেওয়া হইল :—

θ কোণটি ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে, sin θ ক্রমশঃ
0 হইতে 1 পর্যন্ত বাড়িবে।

θ কোণ ক্রমশঃ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে, sin θ ক্রমশঃ
1 হইতে 0 পর্যন্ত কমিবে।

θ কোণ ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে, sin θ ক্রমশঃ
0 হইতে কমিয়া −1 হইবে;

এবং θ কোণ ক্রমশঃ 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে, sin θ ক্রমশঃ
−1 হইতে বাড়িয়া 0 হইবে।

§ 17·3. **কোণের কোসাইনের পরিবর্তন (Changes in Cosine)**

কোসাইন $= \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}}$. পূর্বে দেখা গিয়াছে যে, প্রথম পাদে $m\angle XOP$

ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্যন্ত যত বাড়িবে, উহার ভূমি (OM) ক্রমশঃ তত কমিবে (চিত্রে OM_1, OM_2, প্রভৃতি দেখ) কিন্তু উহার অতিভুজ (OP) একই থাকিবে এবং দুইটিই ধনাত্মক হইবে। অতএব কোণটির কোসাইন ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। যখন $m\angle XOP=0°$, তখন ভূমি (OM) ও অতিভুজ (OP) সমান, সুতরাং তখন কোণটির কোসাইন 1 এবং যখন $m\angle XOP=90°$, তখন OP ও $\overrightarrow{OY}$ সমাপতিত বলিয়া ভূমির (OM) মান তখন 0, সুতরাং কোণটির কোসাইন তখন 0. অতএব কোণটি ক্রমশঃ 0 হইতে 90° হইলে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ কমিয়া 1 হইতে 0 হইবে।

দ্বিতীয় পাদে কোণটি 90° হইতে 180° পর্যন্ত যত বাড়িবে, ভূমি (OM) তত বাড়িবে, সুতরাং উহার কোসাইনের সাংখ্যমান বাড়িবে কিন্তু ঋণাত্মক হইবে এবং উহা 180° হইলে ভূমি ও অতিভুজ সমান হইবে। অতএব কোণ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ 0 হইতে কমিয়া −1 হইবে।

তৃতীয় পাদে, কোণটি বাড়িলে ভূমি ঋণাত্মক থাকিবে, কিন্তু ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে এবং কোণটি 270° হইলে ভূমির দৈর্ঘ্য 0 হইবে। অতএব, কোণটি 180° হইতে 270° পর্যন্ত যত বাড়িবে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ তত বাড়িয়া −1 হইতে 0 হইবে। (এখানে কোসাইনের সাংখ্যমান কমিতেছে, কিন্তু মানটি ঋণাত্মক বলিয়া উহার মান বাড়িতেছে)।

আবার, চতুর্থ পাদে ভূমি (OM) ধনাত্মক হইবে এবং ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে, কোণটি যখন 360°, তখন ভূমি PM=অতিভুজ PO, সুতরাং কোণটির কোসাইন 1. অতএব, কোণটি 270° হইতে 360° পর্যন্ত যত বাড়িবে, উহার কোসাইন 0 হইতে 1 পর্যন্ত বাড়িবে।

সংক্ষিপ্তসার :—

θ কোণ ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ 1 হইতে 0 পর্যন্ত কমিবে ;

θ কোণ ক্রমশঃ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে. $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে −1 পর্যন্ত কমিবে ;

θ কোণ ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ −1 হইতে 0 পর্যন্ত বাড়িবে ;

এবং θ কোণ ক্রমশঃ 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে 1 পর্যন্ত বাড়িবে।

§ 17·4. কোণের ট্যান্‌জেন্টের পরিবর্তন (Changes in tangent.)

ট্যানজেন্ট$=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$. প্রথম পাদে কোণের পরিমাপ যত বাড়িবে, লম্ব (PM) তত

বড় হইবে ভূমি (OM) তত কমিবে এবং উভয়েই ধনাত্মক হইবে। অতএব কোণটির tangnt ক্রমশঃ বাড়িবে।

কোণ 0° হইলে OP ও $\overrightarrow{OX}$ সমাপতিত হয় বলিয়া তখন লম্ব=0 এবং ভূমি=OP.

স্থতরাং কোণটির tangent= $\frac{0}{OP}=0$.

আবার, কোণটি 90° হইলে OP ও $\overrightarrow{OY}$ সমাপতিত বলিয়া লম্বটি=OP এবং ভূমি=0, স্থতরাং tan $90°=\frac{OP}{0}$ অর্থাৎ অসংজ্ঞেয় এবং মান অসীমের দিকে অগ্রসর হয়। অতএব, প্রথম পাদে কোণের tangent ক্রমশঃ 0 হইতে অসীমের দিকে বাড়িতে থাকে।

দ্বিতীয় পাদে লম্বটি (PM) ক্রমশঃ কমিবে এবং ভূমি ক্রমশঃ বাড়িবে, কিন্তু ভূমি ঋণাত্মক হইবে। এখানে দেখা যাইতেছে যে, কোণোৎপাদক রেখা OP যেইমাত্র $\overrightarrow{OY}$কে অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে প্রবেশ করে, তখনই উহার মান একেবারে ∞ হইতে – ∞ হইয়া যায়। এখানে tangent-এর মানের ক্রমের হঠাৎ ছেদ হয় অর্থাৎ হঠাৎ উহা ধনাত্মক অসীম হইতে ঋণাত্মক অসীম হইয়া যায়। কোণটি 180° হইলে OP ও $\overrightarrow{OX'}$ মিলিত হওয়ায় লম্বটি তখন শূন্য এবং ভূমি=OP, স্থতরাং উহার tangent=0. অতএব, দ্বিতীয় পাদে কোণের tangent-এর সাংখ্যমান ক্রমশঃ ∞ হইতে 0 পর্যন্ত কমে অর্থাৎ প্রকৃতপক্ষে উহা ক্রমশঃ – ∞ হইতে 0 পর্যন্ত বাড়ে।

তৃতীয় পাদে লম্বটি ক্রমশঃ বাড়ে, ভূমি ক্রমশঃ কমে এবং উভয়ই ঋণাত্মক হওয়ায় tangent ধনাত্মক হয়। কোণটি যখন 270° হয়, তখন OP ও $\overrightarrow{OY}$ মিলিত হওয়ায় ভূমি=0 এবং লম্ব=OP, স্থতরাং tangent $270°=\frac{OP}{0}$ =অসংজ্ঞেয় এবং মান অসীমের দিকে অগ্রসর হয়।

অতএব, তৃতীয় পাদে কোণের tangent 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বাড়িতে থাকে।

চতুর্থ পাদে ভূমিটি ধনাত্মক কিন্তু লম্বটি ঋণাত্মক, স্থতরাং tangent ঋণাত্মক হয়। আবার, এই পাদে লম্বটি ক্রমশঃ ছোট হয় এবং ভূমিটি ক্রমশঃ বড় হয়, স্থতরাং tangent-এর সাংখ্যমান কমিতে থাকে। এখানে দেখ কোণোৎপাদক রেখা OP যেইমাত্র $\overrightarrow{OY'}$ রেখাকে অতিক্রম করিল অর্থাৎ কোণটি যেইমাত্র 270° অতিক্রম করিল, তখনই উহার মান ∞ হইতে – ∞ হইল। অতএব, এস্থলেও কোণের tangent-এর মানের হঠাৎ ছেদ

হইতেছে। কোণটি যখন 360° হয়, তখন OP ও $\overrightarrow{OX}$ মিলিত হয় এবং লম্ব (PM) তখন শূন্য হয়, আর ভূমি হইয়া যায় OP-র সমান। । সুতরাং $\tan 360° = \frac{0}{OP} = 0$. অতএব, চতুর্থ পাদে কোণের tangent ক্রমশ: $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

সংক্ষিপ্তসার :—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশ: 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বাড়ে, এবং তারপর θ, 90°কে অতিক্রম করিলেই $\tan\theta$ র মান হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হয় ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে $\tan\theta$ ক্রমশ: $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বাড়ে।

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশ: 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বাড়ে, এবং তারপর θ, 270°-কে অতিক্রম করিলেই $\tan\theta$-র মান হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হয় ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশ: $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বাড়ে।

§ 17·5. কোণের কোট্যানজেন্টের পরিবর্তন (Changes in Cotangent).

$\cot\theta$-মান $\tan\theta$-র মানের অন্যোন্যক, অর্থাৎ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

সুতরাং $\tan\theta$-র পরিবর্তন হইতে $\cot\theta$-র পরিবর্তন জানা যায়। অতএব সংক্ষেপে বলা যায় :—

θ কোণ 0 হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে $\cot\theta$ ক্রমশ: ∞ হইতে 0 পর্যন্ত কমে ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে, $\cot\theta$ ক্রমশ: 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত কমে এবং তারপর θ, 180°-কে অতিক্রম করিলেই $\cot\theta$ হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হয় ,

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে, $\cot\theta$ ক্রমশ: ∞ হইতে 0 পর্যন্ত কমে ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে $\cot\theta$ ক্রমশ: 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত কমে, এবং তারপর θ, 360°-কে অতিক্রম করিলেই $\cot\theta$ হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে।

§ 17·6. কোণের সিক্যান্ট-এর পরিবর্তন (Changes in Secant)

cos θ-র অন্যোন্যক sec θ, সুতরাং cos θ-র পরিবর্তন হইতে sec θ-র পরিবর্তন নির্ণয় করা যায়।

সংক্ষেপে :—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশ: 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বাড়ে এবং তারপরই হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হইয়া থাকে ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে sec θ ক্রমশ: $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বাড়ে ;

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে sec θ ক্রমশ: -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত কমে এবং তারপরই উহা হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে।

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশ: ∞ হইতে কমিয়া 1 হয়।

§ 17·7. কোণের কোসিক্যান্ট-এর পরিবর্তন (Changes in Cosecant).

sin θ-র অন্যোন্যক cosec θ, সুতরাং sin θ-র পরিবর্তন হইতে cosec θ পরিবর্তন পাওয়া যায়।

সংক্ষেপে :—

θ কোণটি 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশ: ∞ হইতে 1 পর্যন্ত কমে।

কোণটি 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশ: 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বাড়ে এবং তারপরই হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হইয়া থাকে ;

কোণটি 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশ: $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বাড়ে ;

এবং কোণটি 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশ: -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত কমে এবং তারপরই উহা হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে।

§ 178. কোণোৎপাদক রেখা OP যদি 360° কোণ উৎপাদন করার পর আরও আবর্তিত হয় অর্থাৎ θ কোণটি যদি আরও বাড়িতে থাকে, তবে তাহার কোণানুপাতগুলির একইভাবে পুনরাবৃত্তি হইতে থাকে। কারণ কোন কোণের মান 360°-র কোন গুণিতক বৃদ্ধি পাইলে তাহার কোণানুপাতগুলি একই থাকে। সেইজন্য এইগুলিকে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic Functions) বলা হয়।

§ 17·9. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ
(Graphs of Trigonometrical Functions)

বীজগণিতীয় লেখ অঙ্কনের প্রণালীতে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির ($\sin x$, $\cos \theta$ প্রভৃতির) লেখ অঙ্কন করা যায়। এক্ষেত্রেও $\overrightarrow{XX'}$, $\overrightarrow{YY'}$ দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে অক্ষ ও উহাদের ছেদবিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধরা হয় এবং এক্ষেত্রেও অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক বীজগণিতের ন্যায়ই হইয়া থাকে।

এস্থলে x-অক্ষ বরাবর কোণটির মানগুলি এবং y-অক্ষ বরাবর উহার কোণানুপাতের মানগুলি বসাইয়া বিন্দুগুলি স্থাপন (plot) করিতে হয়। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত রেখাদ্বারা যোগ করিলে অপেক্ষকের লেখটি অঙ্কিত হইবে। লেখ কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার সময় x-অক্ষ বরাবর এবং y-অক্ষ বরাবর সুবিধামত একক নির্বাচন করিয়া লইতে হয়।

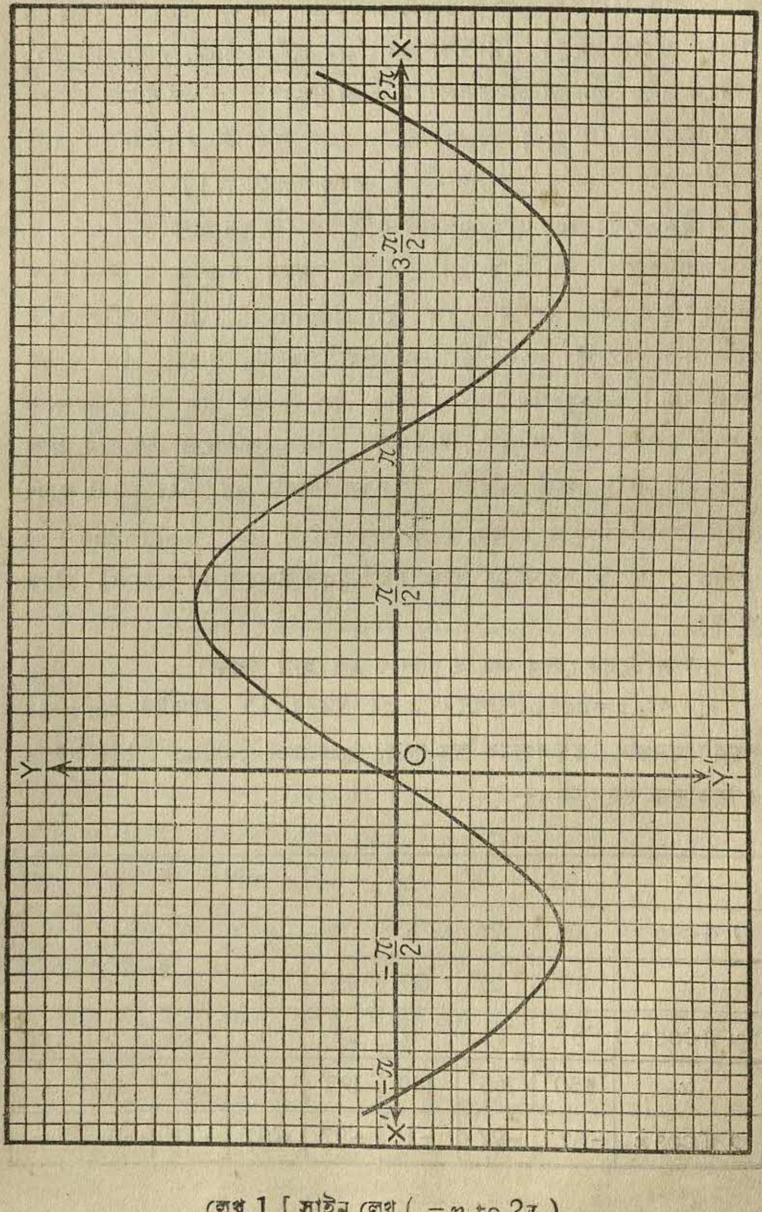
সাইন-লেখ অর্থাৎ sin x-এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y = \sin x$. এক্ষণে x-এর প্রত্যেক মানের জন্য sine-তালিকা (table of natural sines) হইতে $\sin x$ অর্থাৎ y-এর মান পাওয়া যাইবে। এখানে x-এর মানের 10° ব্যবধানে $\sin x$-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নিম্নে তালিকাবদ্ধ করা হইল।

x	-90°	-80°	-70°	-60°	-50°	-40°	-30°	-20°
y বা sin x	−1	−·98	−·94	−·87	−·77	−·64	−·50	−·34
x	-10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
y বা sin x	−·17	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87
x	70°	80°	90°	100°	110°	120°	.....	.....
y বা sin x	·94	·98	1	·98	·94	·87	.....	.....

এক্ষণে x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গাক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা 10° কোণ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 10 গুণ দৈর্ঘ্য দ্বারা 1 একক সূচিত করিয়া $(-90^\circ, -1)$, $(-80^\circ, -·98)$, প্রভৃতি

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত রেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। লেখ চিত্র 1 দেখ।



লেখ 1 [সাইন লেখ ($-n$ to 2π)

[দ্রষ্টব্য : (1) Natural sine-এর তালিকায় 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাইন দেওয়া আছে। 0° হইতে ক্ষুদ্রতর এবং 90° হইতে বৃহত্তর কোণের সাইন পাইবার জন্য $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$ সূত্রগুলির সাহায্য লইতে হইবে। (2) কোণগুলির মান 10° ব্যবধানে, 5° ব্যবধানে 15° ব্যবধানে বা যে কোন সুবিধামত ব্যবধানে লওয়া যায়। (3) y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 10 গুণ বা 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে একক লওয়াই সুবিধাজনক। (4) পরে অন্য অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কনে এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।]

সাইন লেখ (Sine graph)-এর কতিপয় বিশেষ প্রকৃতি :

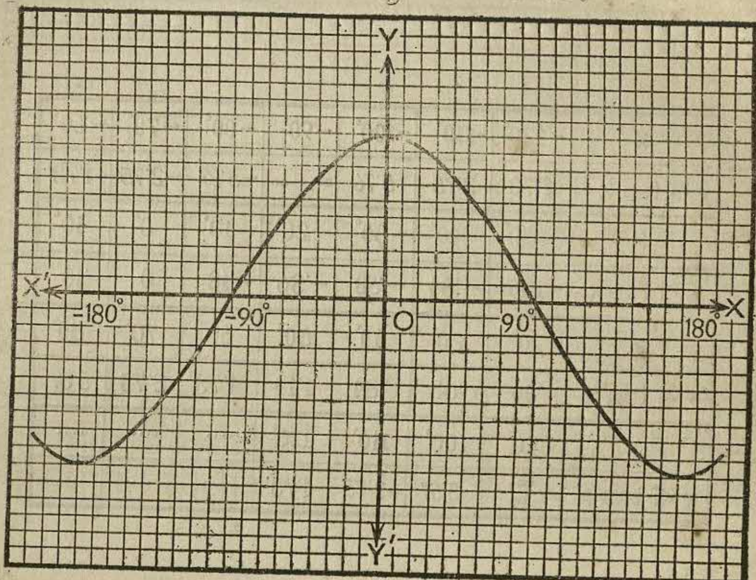
লেখটি হইতে দেখা যায় যে (i) উহা সমঞ্জস তরঙ্গাকারে উভয়দিকে বরাবর বিস্তৃত অর্থাৎ ছেদহীন বা সন্তত (continuous) ; (ii) লেখটির কোটি কখনও +1-এর বেশী ও −1-এর কম দেখা যায় না, সুতরাং $\sin x$-এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান −1 হইবে এবং x-এর মান 90°র বিজোড় গুণিতক হইলেই এই মানগুলি দেখা যায়। (iii) মূলবিন্দুতে এবং যে স্থলে x-এর মান 90°-র জোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে $\sin x$ এর মান 0, কারণ লেখটি ঐ সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে। (iv) $\therefore \sin(2n\pi + x) = \sin x$, $\therefore$ 0° হইতে 2π পর্যন্ত লেখাংশটুকুর উভয়দিকে পুনরাবৃত্তি হইতে থাকে।

কোসাইনের লেখ অর্থাৎ cos x-এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y = \cos x$. এখানে x এর মানের 15° ব্যবধানে $\cos x$-এর অনুরূপ মানগুলি (দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত) natural cosine table হইতে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

x	−90°	−75°	−60°	−45°	−30°	−15°	0°	15°
y বা $\cos x$	0	·26	·5	·71	·87	·97	1	·97
x	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°
y বা $\cos x$	·87	·71	·5	·26	0	−·26	−·5	−·71
x	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	.....
y বা $\cos x$	−·87	−·97	−1	−·97	−·87	−·71	−·5	.....

এখানে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $=10^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর ঐরূপ 10টি বাহুর সমষ্টি $=1$ ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল এবং লব্ধ বিন্দুগুলি পর পর হস্তাঙ্কিত রেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। লেখচিত্র 2 দেখ।



লেখ 2 [কোসাইন লেখ (-180° হইতে 180°)]

কোসাইন লেখ (Cosine graph)-এর কতিপয় বিশেষত্ব :

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, (i) -90° হইতে 90° পর্যন্ত লেখাংশ y অক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম (symmetrical), $\cos(-x)=\cos x$ হয় বলিয়া লেখটি এইরূপ হইয়াছে।

(ii) $\cos(2n\pi+x)=\cos x$, সুতরাং প্রত্যেক 360° ব্যবধানে লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

(ii) কোসাইন লেখ ঠিক সাইন লেখটির অনুরূপ। সাইন লেখটি যদি বামদিকে 90° পরিমাণ সরাইয়া দেওয়া যায় অর্থাৎ যদি মূলবিন্দু O-কে (লেখ চিত্র 1) বামদিকে 90° (অর্থাৎ 9টি ক্ষুদ্রতম বাহু) সরাইয়া দিয়া সেই নূতন বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়, তবে sine লেখ এবং cosine লেখ সম্পূর্ণ এক হইয়া যায়। কারণ, $\cos x=\sin(90^\circ+x)$.

ট্যান্‌জেন্ট লেখ অর্থাৎ tan x-এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y = \tan x$. এখানে x-এর মানের 10° ব্যবধানে $\tan x$-এর অনুরূপ মানগুলি natural tangent তালিকা হইতে (দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত লইয়া) নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

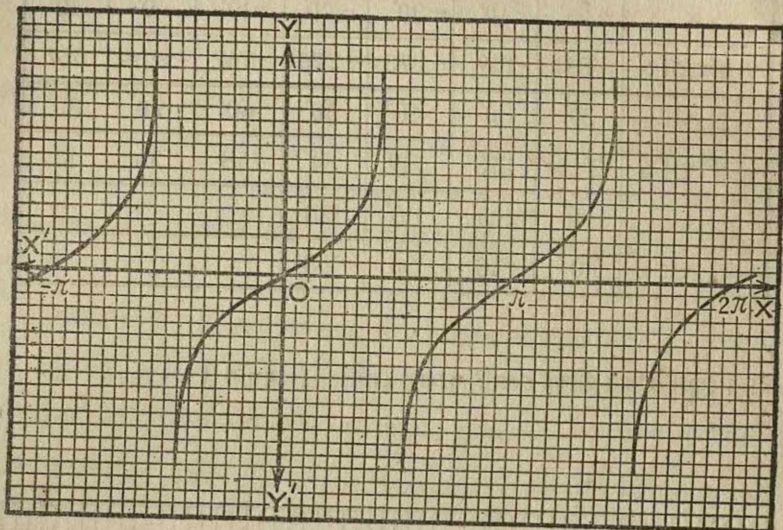
x	-120°	-110°	-100°	-90°	-80°	-70°	-60°
y বা $\tan x$	1·73	2·75	5·76	$\infty, -\infty$	−5·67	−2·75	−1·73
x	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°
y বা $\tan x$	−1·19	−·84	−·58	−·36	−·18	0	·18
x	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y বা $\tan x$	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67
x	90°	100°	110°	120°	....	....	....
y বা $\tan x$	$\infty, -\infty$	−5·67	−2·75	−1·73	....	....	....

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $= 10^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 3টি বাহুর সমষ্টিকে একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট ঐ বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল। ঐ হস্তঙ্কিত বিন্দুগুলি বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $\tan x$-এর লেখ পাওয়া গেল [লেখ চিত্র 3 দেখ।]

ট্যান্‌জেন্ট লেখ (Tangent graph) এর কতিপয় বিশেষত্ব :

লেখ চিত্র হইতে দেখা যায় যে, (i) ঐ লেখ অবিচ্ছিন্ন (continuous) নহে, উহার কতিপয় বিভিন্ন শাখা আছে। যে সকল বিন্দুতে x-এর মান 90°-র বিজোড় গুণিতক, সেই সকল বিন্দুতে লেখটি ছিন্ন হইয়াছে। এই বিন্দুগুলি হইতে x যখন বামদিক হইতে ডান দিকে সরে, $\tan x$-এর মনে হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

(ii) যে সকল বিন্দুতে x-এর মান 90°-র বিজোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলির দিকে x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে লেখটি অগ্রসর হইতে থাকে, কিন্তু তাহাদিগকে স্পর্শ করিতে পারে না। ঐ রেখাগুলিকে ঐ লেখটির বক্ররেখার **অসীমপথ** (asymptotes) বলে।



লেখ 3 [ট্যান্‌জেণ্ট লেখ ($-\pi$ হইতে 2π)]

(iii) $\because$ $\tan(n.180°+x)=\tan x$ (এখানে n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা), $\therefore$ প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে। লেখটির যে শাখাগুলি −90° হইতে 90° (সুতরাং অন্তর 180°) পর্যন্ত আছে, ডান ও বাম পার্শ্বে সেইগুলির পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

কোট্যান্‌জেণ্ট লেখ অর্থাৎ cot x-এর লেখ অঙ্কন।

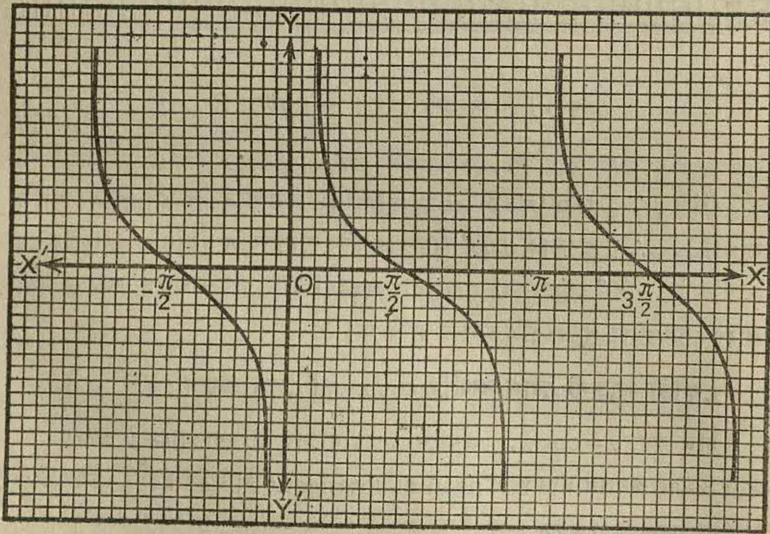
মনে কর, $y=\cot x$. এখানে x-এর মানের 10° ব্যবধানে y অর্থাৎ $\cot x$-এর অনুরূপ মানগুলি natural cotangent তালিকা হইতে লইয়া নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

এক্ষণে x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 10° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরিয়া তালিকার

স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা

x	-120°	-110°	-100°	-90°	-80°	-70°	-60°
y বা cot x	·58	·36	·18	0	−·18	−·36	−·58
x	-50°	-40°	-30°	-20°	-10°	0°	10°
y বা cot x	−·84	−1·19	−1·73	−2·75	−5·67	$-\infty, \infty$	5·67
x	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y বা cot x	2·75	1·73	1·19	·84	·58	·36	·18
x	90°	100°	110°	120°	.....	.....	.....
y বা cot x	0	−·18	−·36	−·58	.....	.....	.....

দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 4]



লেখ 4 [ক্যোট্যান্জেন্ট লেখ ($-\pi$ হইতে 2π)]

কোট্যান্‌জেন্ট লেখ (Cotangent graph) এর বিশেষত্ব :

(i) ইহাও একটি বিচ্ছিন্ন লেখ (discontinuous graph) 0°-তে এবং 180°-র যে কোন গুণিতক কোণে লেখটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

(ii) এই লেখটি ট্যান্‌জেন্ট লেখ-এর অনুরূপ। Tangent লেখটিকে বামদিকে বা ডান দিকে 90° সরাইয়া দিলে উহাই cotangent লেখ হইয়া যায়।

(iii) $\because$ $\cot(n.180+x)=\cot x$, $\therefore$ প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইয়া থাকে।

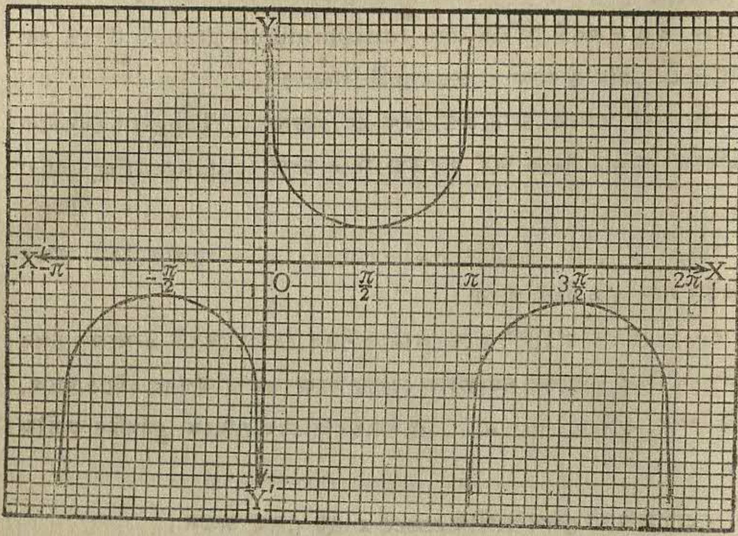
(iv) 0°-তে ও 180°-র যে-কোন গুণিতক কোণে লেখটি x-অক্ষের উপর ও নীচের দিকে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকে, কিন্তু স্পর্শ করিতে পারে না। ঐ সমান্তরাল রেখাগুলিকে লেখটির **অসীম পথ** বলে।

কোসেকাণ্ট লেখ অর্থাৎ cosec x-এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\text{cosec } x$. এখানে x-এর মানের 15° ব্যবধানে y অথবা cosec x-এর অনুরূপ মানগুলি natural cosecant তালিকা হইতে (এই তালিকা না পাইলে sin তালিকা হইতে $\text{cosec } x=\frac{1}{\sin x}$ সূত্র সাহায্যে) নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত কর।

x	−105°	−90°	−75°	−60°	−45°	−30°	−15°
y বা cosec x	−1·04	−1	−1·04	−1·15	−1·41	−2	−3·86
x	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
y বা cosec x	3·86	2	1·41	1·15	1·04	1	1·04
x	120°	135°	150°	165°	195°	210°	225°
y বা cosec x	1·15	1·41	2	3·86	−3·86	−2	−1·41

এক্ষণে x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু=10° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 3টি বাহু=1 একক ধরিয়া উপরের স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 5]



লেখ 5 [কোসেকাণ্ট লেখ ($-\pi$ হইতে 2π)]

কোসেকাণ্ট লেখ (Cosecant graph)-এর বিশেষত্ব :

(i) এই লেখটিও অবিচ্ছিন্ন নহে, ইহার বিভিন্ন শাখা বিচ্ছিন্ন লেখ। $0°$-তে এবং $180°$-র প্রত্যেক গুণিতক কোণে লেখটি বিচ্ছিন্ন হয়। এই বিন্দুগুলিতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলি **অসীম পথ** হইবে।

(ii) লেখটির কোন অংশ $y=1$ ও $y=-1$-এর মধ্যে থাকিবে না। কারণ, $-<\text{cosec } x<1$, বা, $-1<y<1$ সতত অসম্ভব। অতএব লেখটি $0°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত সীমার মধ্যে x-অক্ষের উপরে এবং $180°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত সীমার মধ্যে x-অক্ষের নীচে থাকিবে।

(iii) $\because$ $\text{cosec }(n.360°+x)=\text{cosec } x$, $\therefore$ প্রত্যেক $360°$ অন্তর লেখটির সমুদয় অংশের বামদিকে ও ডানদিকে পুনরাবৃত্তি হইবে।

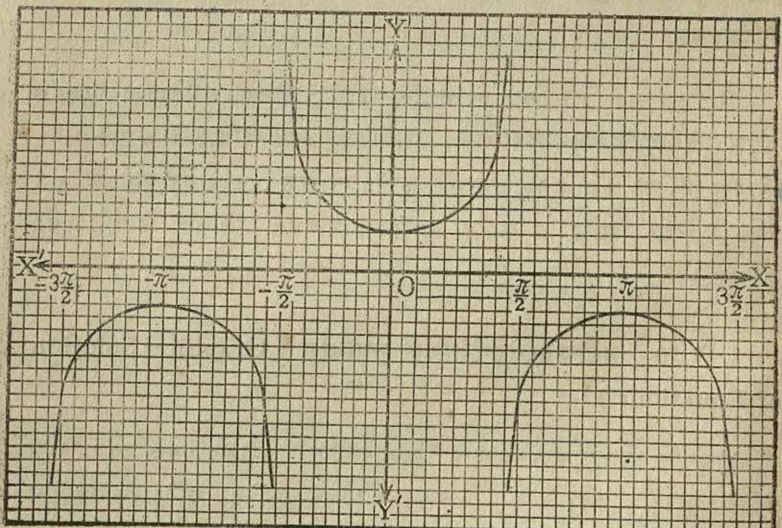
সেকাণ্ট লেখ অর্থাৎ sec x-এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\sec x$. এখানে x-এর মানের $15°$ ব্যবধানে y অর্থাৎ sec x-এর অনুরূপ মানগুলি natural secant তালিকা হইতে লইয়া নিম্নে স্থানাঙ্করূপে তালিকাভুক্ত করিতে হইবে। কিন্তু natural secant তালিকা

পাওয়া না যাইতে পারে। সেস্থলে natural cosine তালিকা হইতে মান লইয়া secant এর মান $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ সূত্র হইতে নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে।

x	–105°	....	–75°	–60°	–45°	–30°	–15°	0°
y বা sec x	–3·86	....	3·86	2	1·41	1·15	1·04	1
x	15°	30°	45°	60°	75°	105°	120°	135°
y বা sec x	1·04	1·15	1·41	2	3·86	–3·86	– 2	–1·41
x	150°	165°	180°	195°	210°	225°	....	....
y বা sec x	–1·15	–1·04	– 1	–1·04	–1·15	–1·14	....	....

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $= 10°$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ তিনটি বাহুর সমষ্টি $= 1$ একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল। এই বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি অঙ্কিত হইল। [লেখ 6 দেখ]



লেখ 6 $\left[\text{সেকান্ট লেখ} \left(-\frac{3\pi}{2} \text{ হইতে } \frac{3\pi}{2} \right) \right]$

সেকাণ্ট লেখ (Secant graph)-এর বিশেষত্ব ঃ

(i) সেকাণ্ট লেখটিও অবিচ্ছিন্ন লেখ নহে। $90°$-র প্রত্যেক বিজোড় গুণিতকে লেখটি বিচ্ছিন্ন হয় এবং ঐ সকল বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলি **অসীম পথ** হইবে।

(ii) $\because$ $\sec(n.360° + x) = \sec x$, $\therefore$ প্রত্যেক $360°$ অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

(iii) লেখটি cosecant লেখ-এর অনুরূপ। cosecant লেখকে বামদিকে $90°$ পরিমাণ সরাইয়া দিলে তাহাই secant লেখ হইবে। কারণ, $\operatorname{cosec}(90° + x) = \sec x$.

এ পর্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কন প্রণালী আলোচনা করা হইয়াছে। ঐগুলি সংক্রান্ত অপেক্ষকের অর্থাৎ $\sin 2x$, $2\cos 3x$ প্রভৃতির লেখাঙ্কন করিতে হইলে, তালিকা প্রস্তুত করিবার সময় প্রথম সারিতে x-এর বিভিন্ন মান, দ্বিতীয় সারিতে $2x$ বা $3x$-এর বিভিন্ন মান এবং তৃতীয় সারিতে সম্পূর্ণ অপেক্ষকটির ($\sin 2x$ প্রভৃতির) মানগুলি লিখিতে হয়। তৎপরে নিজের নির্ধারিত scale অনুসারে বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কন করিতে হয়।

আবার, $\tan x + \cot x$ প্রভৃতি ত্রিকোণমিতিক রাশিমালার লেখও অনুরূপ প্রণালীতে অঙ্কন করা যায়। তালিকার প্রথম সারিতে x-এর মানগুলি, দ্বিতীয় সারিতে $\tan x$এর মানগুলি, তৃতীয় সারিতে $\cot x$-এর মানগুলি এবং চতুর্থ সারিতে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারির যোগফল লিখিয়া লেখ অঙ্কন করিতে হয়।

§ 17·10. সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Graphical Solution of Equations) :

বীজগণিতের সমীকরণের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক সমীকরণেরও লেখ অঙ্কন করিয়া সমাধান করা যায়। প্রদত্ত সমীকরণ দেখিয়া সুবিধামত প্রণালী অবলম্বন করিতে হয়। (i) সমীকরণের দুই পক্ষের দুইটি লেখ অঙ্কন করিয়া তাহাদের পরস্পর ছেদবিন্দুগুলির ভুজগুলির মানই সমীকরণের নির্ণেয় সমাধান হইবে। অথবা, (ii) প্রথম সমীকরণের পদগুলিকে একদিকে (সাধারণতঃ

বামদিকে) পক্ষান্তর করিয়া লইতে হয়, ইহাতে অন্য পক্ষ 0 (শূন্য) হইবে। তৎপরে বামপক্ষের লেখ অঙ্কন করিলে বক্রলেখটি x-অক্ষকে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজগুলির মানই সমীকরণের সমাধান হইবে।

উদাহরণমালা 17

উদা. 1. $x=0$ হইতে $x=2\pi$ সীমার মধ্যে $y=\sin x+\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে x-এর মান নির্ণয় কর, যখন (i) $y=0$, (ii) y-এর মান বৃহত্তম, (iii) yএর মান সর্বনিম্ন। [C. U. '34]

এখানে x-এর বিভিন্ন মান 15° বা $\frac{\pi}{12}$ ব্যবধানে লইয়া তালিকা হইতে $\sin x$ ও $\cos x$-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করিয়া তাহাদের সমষ্টিগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুইটি বাহুর সমষ্টি দ্বারা 15° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 10টি বাহুর সমষ্টি দ্বারা 1 একক সূচিত করিয়া পরপৃষ্ঠার বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 7 দেখ।]

(i) লেখটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিবে সেই বিন্দুগুলিতে $y=0$ হইবে। এখানে লেখটি x-অক্ষকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সেখানে $x=\frac{3\pi}{4}$ এবং $x=\frac{7\pi}{4}$. অতএব, যখন $x=\frac{3\pi}{4}$ ও $x=\frac{7\pi}{4}$ তখন $y=0$.

(ii) লেখ হইতে দেখা যায় যে, লেখটির ঊর্ধ্বতম বিন্দুর ভুজ $\frac{\pi}{4}$, সুতরাং $x=\frac{\pi}{4}$ হইলে y-এর মান বৃহত্তম হইবে।

(iii) আবার, লেখটির নিম্নতম বিন্দুর ভুজ $=\frac{5\pi}{4}$, সুতরাং যখন $x=\frac{5\pi}{4}$ বা, 225°, তখন y-এর মান ক্ষুদ্রতম।

[দ্রষ্টব্য : এখানে সমীকরণটি $y=\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x.\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.\ \cos x.\right)$$

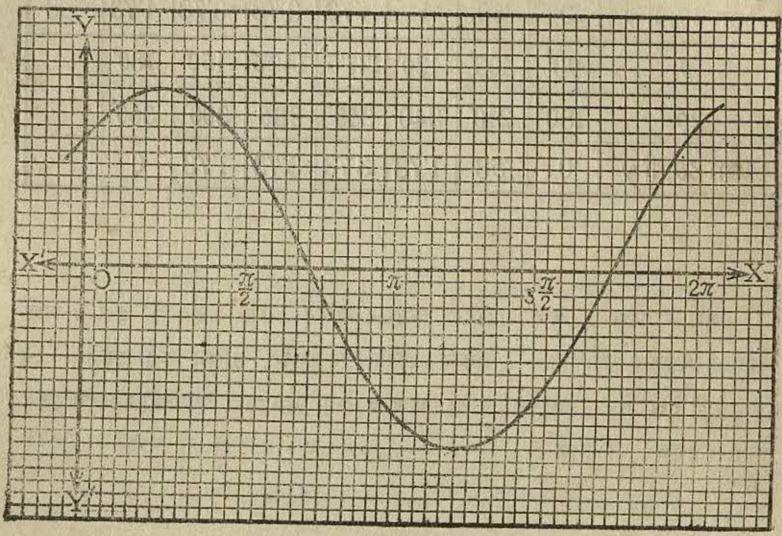
x	$0°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	·26	·5	·7	·87	·97	1
$\cos x$	1	·97	·87	·7	·5	·26	0
y বা $\sin x + \cos x$	1	1·23	1·37	1·4	1·37	1·23	1
x	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$
$\sin x$	·97	·87	·7	·5	·26	0	− ·26
$\cos x$	− ·26	− ·5	− ·7	− ·87	− ·97	−1	− ·97
y বা $\sin x + \cos x$	·71	·37	0	− ·37	− ·71	−1	− 1·23

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin x$	− ·5	− ·7	− ·87	− ·97	− 1	− ·97	− ·87
$\cos x$	− ·87	− ·7	− ·5	− ·26	0	·26	·5
y বা $\sin x + \cos x$	−1·37	−1·4	−1·37	−1·29	− 1	− ·71	− ·37
x	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π	.....	.....	.....
$\sin x$	− ·7	− ·5	− ·26	0	.....	.....	.....
$\cos x$	·7	·87	·97	1	.....	.....	.....
y বা $\sin x + \cos x$	0	·37	·71	1	.....	.....	.....

$$= \sqrt{2}\,(\sin x.\ \cos 45° + \sin 45°\ \cos x)$$

$$= \sqrt{2}\,\sin (45° + x)$$ লেখা যায়।

অতএব তালিকা হইতে x-এর বিভিন্ন মানে $\sin(45°+x)$-এর মানগুলিকে $\sqrt{2}$ বা 1·414 দ্বারা গুণ করিয়া y-এর বিভিন্ন অনুরূপ মানগুলি পাওয়া যাইতে পারে।]



লেখ 7 [$y=\sin x+\cos x$-এর লেখ]

উদা. 2. $\theta=0°$ এবং $\theta=\pi$-এর মধ্যে $\cot\theta-\tan\theta=2$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

এখানে $\cot\theta-\tan\theta=2$,

বা, $\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=2$, বা, $1-\tan^2\theta=2\tan\theta$,

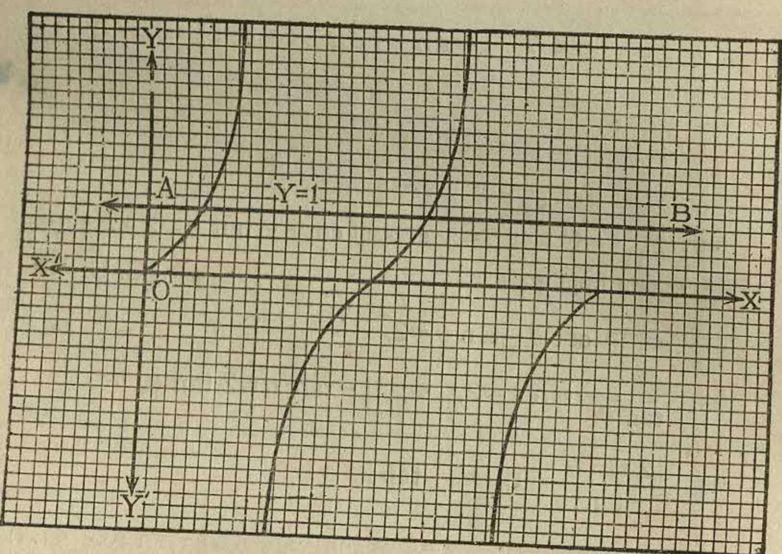
বা, $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1$, বা, $\tan 2\theta=1$.

এখানে $y=\tan 2\theta$ এবং $y=1$ এই সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করিয়া তাহাদের ছেদবিন্দুগুলি হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

(i) $y = \tan 2\theta$.

θ	0°	15°	$22{\cdot}5^\circ$	30°	$37{\cdot}5^\circ$	$52{\cdot}5^\circ$	60°	70°
2θ	0°	30°	45°	60°	75°	105°	120°	150°
$\tan 2\theta$ বা y	0	·58	1	1·73	3·73	-3·73	-1·73	-·58
θ	90°	105°	120°	$127{\cdot}5^\circ$	$142{\cdot}5^\circ$	150°	180°	....
2θ	180°	210°	240°	255°	285°	300°	360°	....
$\tan 2\theta$ বা y	0	·58	1·73	3·73	-3·73	-1·73	0	......

লেখ কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর বর্গের একটি বাহু $=5^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 5টি বাহু $=1$ একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y = \tan 2\theta$ সমীকরণের লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 8]



লেখ 8

(ii) আবার, x-অক্ষ হইতে উপর দিকে 1 একক দূরে এবং x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানা হইল। উহাই $y=1$ সমীকরণের লেখ হইল।

ঐ সরলরেখাটি প্রথম সমীকরণের লেখকে দুইটি বিন্দুতে (প্রদত্ত সীমার মধ্যে) ছেদ করিয়াছে এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $=22·5°$ ও $112·5°$.

অতএব নির্ণেয় সমাধান হইল $\theta=22·5°$ ও $112·5°$

উদা. 3. $\operatorname{cosec} x=\cot x+\sqrt{3}$ সমীকরণের $x=0$ এবং $x=\pi$-এর মধ্যে লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '42]

এখানে $\operatorname{cosec} x=\cot x+\sqrt{3}$, বা, $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\sqrt{3}$,

বা, $1=\cos x+\sqrt{3}\sin x$, বা, $\frac{1}{2}=\cos x.\frac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin x$,

বা, $\frac{1}{2}=\cos x\cos 60°+\sin x\sin 60°$, বা, $\frac{1}{2}=\cos(x-60°)$.

অতএব $y=\frac{1}{2}=·5$ এবং $y=\cos(x-60°)$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটির ছেদবিন্দু হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

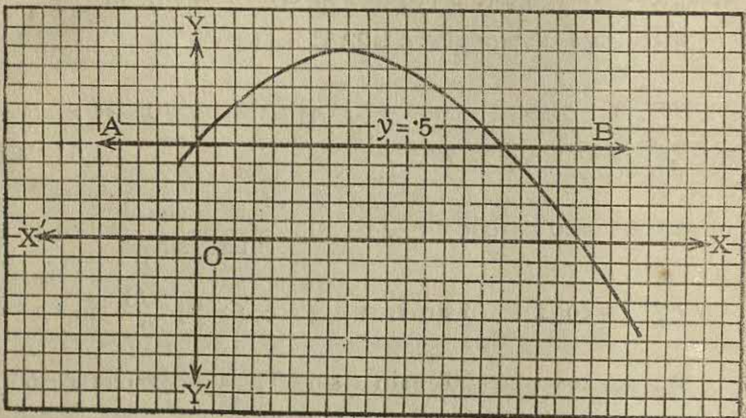
(i) $y=·5$-এর লেখ হইল x-অক্ষের উপরদিকে ঐ অক্ষ হইতে ·5 একক দূরে x-অক্ষের সমান্তরাল $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা। [লেখ 9 দেখ]

(ii) $y=\cos(x-60°)$.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$x-60°$	−60°	−45°	−30°	−15°	0°	15°	30°
y বা $\cos(x-60°)$	·5	·71	·87	·97	1	·97	·87
x	105°	120°	135°	150°	165°	180°	.....
$x-60°$	45°	60°	75°	90°	105°	120°	.....
y বা $\cos(x-60°)$	·71	·5	·26	0	−·26	−·5	.....

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহু 7·5° এবং y-অক্ষ বরাবর ঐরূপে 1টি বাহু 1 এককের সমান ধরিয়া উপরের (0°, ·5), (15°, ’71).

প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y = \cos(x - 60°)$ সমীকরণের লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 9 দেখ।]



লেখ 9

এখানে প্রদত্ত সীমার মধ্যে লেখদ্বয় যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের ভুজ 0° ও 120° সূচিত করে।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $x = 0°$ ও $120°$.

উদা. 4. $3 \sin x + 4 \cos x$-এর লেখ চিত্র অঙ্কন কর। অপেক্ষকটির বৃহত্তম মান কি ? [C. U. '50]

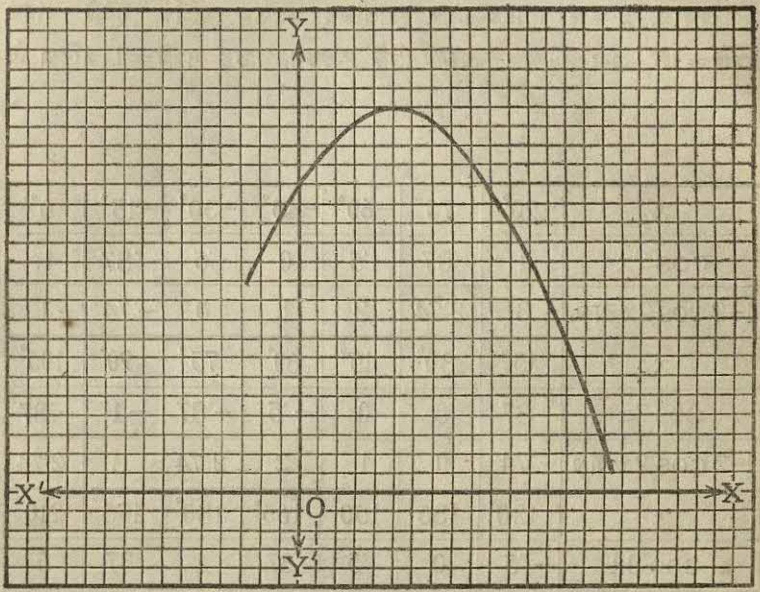
মনে কর, $y = 3 \sin x + 4 \cos x$.

প্রথমে x-এর মানের 15° ব্যবধানে অনুরূপ $\sin x$ ও $\cos x$-এর মানগুলি তালিকা হইতে নির্ণয় করিয়া নিম্নে x ও y-এর মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
3 sin x	-·78	0	·78	1·5	2·12	2·61	2·91	3	2·91	2·61
4 cos x	3·86	4	3·86	3·46	2·83	2·00	1·03	0	-1·04	-2·00
y	3·08	4	4·64	4·96	4·95	4·61	3·94	3	1·87	·61

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমষ্টি = 15 এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 4টি বাহুর সমষ্টি = 1 ধরিয়া উপরের

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 10]



লেখ 10

লেখটি হইতে দেখা যায় যে y-এর বৃহত্তম মান 5. অতএব নির্ণেয় বৃহত্তম মান $=5$.

উদা. 5. লেখ অঙ্কন দ্বারা $2\sin^2 x=\cos 2x$ সমীকরণের সমাধান করিয়া কেবল $-\frac{\pi}{2}$ ও $\frac{3\pi}{3}$ এর মধ্যবর্তী x-এর মানগুলি নির্ণয় কর।

[C. U. '46, '48]

এখানে, $2\sin^2 x=\cos 2x$, বা, $2\sin^2 x-\cos 2x=0$,

বা, $1-\cos 2x-\cos 2x=0$, বা, $1-2\cos 2x=0$,

মনে কর, $y=1-2\cos 2x$, সুতরাং $y=0$. এই দুই সমীকরণের লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুগুলি হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

$y=0$ সমীকরণের লেখ হইল x-অক্ষ। এখন $y=1-2\cos 2x$এর লেখ অঙ্কনের জন্য x-এর 15° ব্যবধানে মানগুলি ধরিয়া তালিকা হইতে y-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত করা হইল।

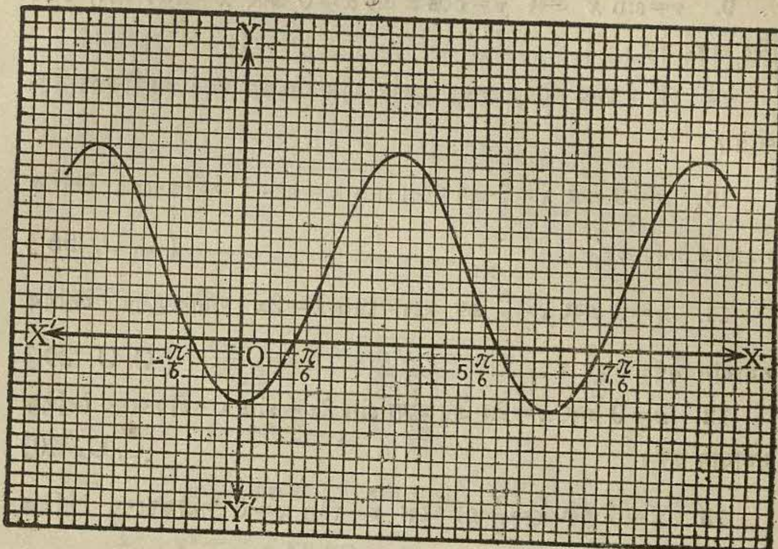
এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুইটি বাহুর সমষ্টি $=15^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর 5টি অনুরূপ বাহুর সমষ্টি $=1$ ধরিয়া ঐ

x	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°
cos 2x	−1	−·87	−·5	0	·5	·87	1
1−2 cos 2x বা y	3	2·74	2	1	0	−·74	−1
x	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
cos 2x	·87	·5	0	−·5	−·87	−1	−·87
1−2 cos 2x বা y	−·74	0	1	2	2·74	3	2·74
x	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°
cos 2x	−·5	0	·5	·87	1	·87	·5
1−2 cos 2x বা y	2	1	0	−·74	−1	−·74	0
x	225°	240°	255°	270°	.....	.....	.....
cos 2x	0	−·5	−·87	−1	.....	.....	.....
1−2 cos 2x বা y	1	2	2·74	3	.....	.....	.....

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 11 দেখ।]

এক্ষণে লেখটি x-অক্ষকে (অর্থাৎ $y=0$ সমীকরণের লেখকে) চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ বিন্দুগুলিতে ভুজ অর্থাৎ x-এর মান $=-30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ এবং কোটি $=0$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $x=-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.



[লেখ 11]

প্রশ্নমালা 18

লেখচিত্র অঙ্কন কর :—

1. $\sin 2\theta$ এবং $\cos 2\theta$এর $\theta=0°$ এবং $\theta=210°$এর মধ্যে।

2. $\frac{1}{\cos 2x}$ এবং $\frac{1}{\cot 2x}$ এর $x=-\frac{\pi}{2}$ এবং $x=\pi$এর মধ্যে।

3. $\sin x+\cos x$ এবং $\cos 2x$এর $x=0$ এবং $x=\pi$-এর মধ্যে।

4. $\tan 3x$এর $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$এর মধ্যে।

5. $\sec\frac{x}{2}$এর $x=-\frac{\pi}{2}$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$এর মধ্যে।

6. $10°$ ব্যবধানে $\sec x$-এর মানের তালিকা প্রস্তুত করিয়া $y=\sec x$ সমীকরণের $x=0°$ হইতে $x=90°$এর মধ্যে লেখ অঙ্কন কর।

7. $\theta=0°$ এবং $\theta=\pi$-এর মধ্যে $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-এর লেখ অঙ্কন কর। লেখ দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [C. U. '36]

8. $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে $\tan x=1$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর।

9. $y=\sin x$ এবং $y=\cos x$ এর $x=0$ এবং $x=\pi$এর মধ্যে লেখ চিত্র অঙ্কন কর।

এই দুই মানের মধ্যে xএর কোন্ মান $\sin x=\cos x$ সমীকরণ সিদ্ধ করে ?

10. $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে $\tan x=\cos x$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '56]

11. $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে $\tan x=2x$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '39]

12. $x=0$ এবং $x=2\pi$-এর মধ্যে $\sin 2x=\sin x$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান কর। [C. U. '40]

13. $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে $x-\tan x=0$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান কর।

14. $\theta=0^\circ$ ও $\theta=270^\circ$-এর মধ্যে $5\sin\theta+2\cos\theta=5$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। [C. U. '47]

15. $y=\tan x$ এই tangent লেখটির যে শাখায় $x=\frac{1}{2}\pi$ অন্তর্ভুক্ত তাহার লেখ অঙ্কন কর এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর নিকটে লেখটির প্রকৃতি আলোচনা কর। [C. U. '57]

16. একই x-অক্ষ ও y-অক্ষ লইয়া $-\frac{\pi}{2}$ ও $+\frac{\pi}{2}$ এই সীমার মধ্যে $y=x$ $y=\sin x$ ও $y=\tan x$-এর লেখগুলি অঙ্কিত কর। মূল বিন্দুর নিকটে লেখগুলির প্রকৃতি দেখিয়া মূল বিন্দুতে তাহাদের মধ্যে কোন সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে পার কি ? [C. U. '52]

বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 1. (a) $12 \tan x+5=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, x এরূপ ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ হইলে $\cos x$ ও $\sin x$ নির্ণয় কর।

(b) $\sin \theta=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ সম্ভব কিনা নির্ণয় কর।

[x, y, z বাস্তব] [W.B.B.S.E. 1973]

(a) $12 \tan x+5=0$ বা $\tan x=-\frac{5}{12}$ $\therefore$ $90^\circ<x<180^\circ$.

এক্ষণে, $\tan x=-\frac{5}{12}$ হইতে পাই,

$$\frac{\sin x}{5}=\frac{\cos x}{-12}=\frac{\pm\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}{\sqrt{25+144}}=\pm\frac{1}{13}$$

$\therefore$ $\sin x=\frac{5}{13}$ এবং $\cos x=-\frac{12}{13}$

(b) $\because$ $-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$, $\sin\theta=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ হইতে পাই

$x^2+y^2+z^2\leqslant xy+yz+zx$

বা, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\leqslant 0$

বা, $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\leqslant 0.$

বা, $x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\leqslant 0.$

বা, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leqslant 0.$

এক্ষণে x, y, z বাস্তব হওয়ায়, তিনটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার যোগফল শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

$\therefore$ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

বা, $(x-y)^2=(y-z)^2=(z-x)^2=0$

$\because$ $x=y, y=z, z=x,$ বা, $x=y=z.$

সুতরাং $x=y=z$ হইলে $\sin\theta=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ হইতে পারে।

উদা. 2. প্রমাণ কর, $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4.$ [I. I. T. '74]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=4.\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=4.\frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=4.\frac{\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}=4.\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=4=\text{ডানপক্ষ।}$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $a\cos\theta+b\sin\theta$-র বৃহত্তম মান $\sqrt{a^2+b^2}$.

মনে কর, $\frac{b}{a}=\tan\alpha$. $\therefore\ \frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1}$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

সুতরাং $a\cos\theta+b\sin\theta$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\cos\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta\sin\alpha$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$$

সুতরাং $a\cos\theta+b\sin\theta$-র বৃহত্তম মান $\sqrt{a^2+b^2}$

[কারণ, $\cos(\theta-\alpha)$-র বৃহত্তম মান 1]

উদা. 4. $\frac{\cos^3\theta}{\cos(\alpha-3\theta)}=\frac{\sin^3\theta}{\sin(\alpha-3\theta)}=k$ হইলে প্রমাণ কর যে, $2k^2-k\cos\alpha-1=0$.

$$k=\frac{\cos^3\theta}{\cos(\alpha-3\theta)}=\frac{\sin^3\theta}{\sin(\alpha-3\theta)}$$

বা, $k=\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\cos(\alpha-3\theta)\sin\theta}=\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\sin(\alpha-3\theta)\cos\theta}$

$$=\frac{\cos^3\theta\sin\theta+\sin^3\theta\cos\theta}{\cos(\alpha-3\theta)\sin\theta+\sin(\alpha-3\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin(\theta+\alpha-3\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin(\alpha-2\theta)}$$

$\therefore\ \frac{1}{k}=\frac{\sin(\alpha-2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$ বা, $\frac{1}{2k}=\frac{\sin(\alpha-2\theta)}{\sin 2\theta}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos 2\theta-\cos\alpha\sin 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$=\sin\alpha\cot 2\theta-\cos\alpha$$

বা, $\frac{1}{2k}+\cos\alpha=\sin\alpha\cot 2\theta\cdots\cdots(2)$

আবার $k=\frac{\cos^3\theta\cos\theta}{\cos(\alpha-3\theta)\cos\theta}=\frac{\sin^3\theta\sin\theta}{\sin(\alpha-3\theta)\sin\theta}$

$$=\frac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{\cos(\alpha-3\theta)\cos\theta-\sin(\alpha-3\theta)\sin 3\theta}$$

$$=\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos(\alpha-3\theta+\theta)}=\frac{\cos 2\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}$$

$$=\frac{\cos 2\theta}{\cos\alpha\cos 2\theta+\sin\alpha\sin 2\theta}=\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha\tan 2\theta}$$

বা, $\frac{1}{k}=\cos\alpha+\sin\alpha\tan 2\alpha$

$\therefore\ \frac{1}{k}-\cos\alpha=\sin\alpha\tan 2\theta\cdots\cdots(2)$

সুতরাং (1) ও (2)-এর উভয়পক্ষ গুণ করিয়া পাই,

$$\left(\frac{1}{2k}+\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{k}-\cos\alpha\right)=\sin^2\alpha.$$

বা, $\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k}\cos\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

বা, $\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k}\cos\alpha=1$

বা, $\frac{1+k\cos\alpha}{2k^2}=1$, বা, $1+k\cos\alpha=2k^2$

বা, $2k^2-k\cos\alpha-1=0$.

উদা. 5. $x\sin\theta+y\cos\theta=2a\sin 2\theta$

এবং $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

$x\sin\theta+y\cos\theta=2a\sin 2\theta\cdots\cdots(1)$

$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta\cdots\cdots(2)$

সমীকরণ-(1) ও (2) হইতে x ও y সমাধান করিয়া পাই,

$x=a\cos\theta\,(2-\cos 2\theta)$ এবং $y=a\sin\theta\,(2+\cos 2\theta)$

$\therefore\ x=a\cos\theta\,(\cos^2\theta+3\sin^2\theta),\ y=a\sin\theta\,(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$[\because\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta]$

$\therefore\ x+y=a\,(\cos^3\theta+3\cos\theta\sin^2\theta+3\cos^2\theta\sin\theta+\sin^3\theta)$

$=a\,(\cos\theta+\sin\theta)^3\quad\therefore\ (x+y)^2=a^2(1+\sin 2\theta)^3$

এবং $x-y=a\,(\cos^3\theta+3\cos\theta\sin^2\theta-3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$

$=a\,(\cos\theta-\sin\theta)^3$

$\therefore\ (x-y)^2=a^2(1-\sin 2\theta)^3$

$\therefore\ (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(1+\sin 2\theta+1-\sin 2\theta)$

বা, $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

উদা. 6. $\frac{\tan(\alpha+\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0.$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$$

বা, $\frac{\sin(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)}=\frac{\sin\gamma\ \cos\beta}{\cos\gamma\ \sin\beta}$

বা, $\frac{\sin(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)}$

$=\frac{\sin\gamma\ \cos\beta+\cos\gamma\ \sin\beta}{\sin\gamma\ \cos\beta-\cos\gamma\ \sin\beta}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{\sin(\alpha+\beta-\gamma+\alpha-\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta-\gamma-\alpha+\beta-\gamma)}=\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}$

বা, $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\beta-\gamma)}=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}$

বা, $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)}=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}$

বা, $\sin 2\alpha=-2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$

$=-(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$

$\therefore\ \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0.$

উদা. 7. $A+B=\frac{\pi}{4}$ হইলে, দেখাও যে $(1+\tan A)(1+\tan+B)=2.$

$\because\ A+B=\frac{\pi}{4},\ \therefore\ \tan(A+B)=\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\ \tan B}=1$, বা, $\tan A+\tan B=1-\tan A\ \tan B$

বা, $1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2$

[পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয়পক্ষে 1 যোগ করিয়া]

বা, $(1+\tan A)(1+\tan B)=2.$

উদা. 8. $\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\tan\alpha\ \tan\beta=\tan^2\gamma.$ [W. B. B. E. 1975]

$\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$, বা, $\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}$

বা, $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\{\alpha-(\alpha-\beta)\}}{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad \sin^2\gamma=\frac{\sin\beta\sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\ldots(1)$$

$$\therefore\quad \cos^2\gamma=1-\sin^2\gamma=1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\ldots(2)$$

(1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\tan^2\gamma=\tan\alpha\tan\beta$.

উদা. 9. $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}+\cos^{-1}\dfrac{y}{b}=\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}\cos\alpha+\dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$ [W. B. B. E. '75]

$$\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$$

বা, $\cos^{-1}\left[\dfrac{xy}{ab}-\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}\right]=\alpha.$

বা, $\dfrac{xy}{ab}-\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}=\cos\alpha.$

বা, $\dfrac{xy}{ab}-\cos\alpha=\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}$

বা, $\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2}-\dfrac{2xy}{ab}\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2}$

বা, $1-\cos^2\alpha=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}\cos\alpha+\dfrac{y^2}{b^2}$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}\cos\alpha+\dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\left(\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right)-\cot^{-1}\left(\dfrac{\cos\phi}{x-\sin\phi}\right)$ এর মান x নিরপেক্ষ এবং ইহার সরলতম মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $\tan^{-1}\left(\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right)=\alpha$ এবং $\cot^{-1}\left(\dfrac{\cos\phi}{x-\sin\phi}\right)=\beta.$

$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}$ এবং $\cot\beta=\dfrac{\cos\phi}{x-\sin\phi}.$

বা, $\tan\beta=\dfrac{x-\sin\phi}{\cos\phi}.$

এক্ষণে $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}-\dfrac{x-\sin\phi}{\cos\phi}}{1+\left(\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right)\left(\dfrac{x-\sin\phi}{\cos\phi}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{x\cos^2\phi-x+\sin\phi+x^2\sin\phi-x\sin^2\phi}{\cos\phi\,(1-x\sin\phi)}}{\dfrac{\cos\phi-x\sin\phi\cos\phi+x^2\cos\phi-x\sin\phi\cos\phi}{\cos\phi\,(1-x\sin\phi)}}$$

$$=\frac{-x\sin^2\phi+\sin\phi+x^2\sin\phi-x\sin^2\phi}{\cos\phi-2x\sin\phi\cos\phi+x^2\cos\phi}$$

$$=\frac{\sin\phi\,(1+x^2-2x\sin\phi)}{\cos\phi\,(1-2x\sin\phi+x^2)}=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\tan\phi.$$

$\therefore\ \alpha-\beta=\phi.$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালা x নিরপেক্ষ এবং ইহার সরলতম মান ϕ.

উদা. 11. প্রমাণ কর যে,

$$\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\{\operatorname{cosec}\tan^{-1}x-\tan\cot^{-1}x\}$$

মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha,\quad\therefore\ \tan\alpha=x$

$\therefore\ \operatorname{cosec}\tan^{-1}x=\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{1+\cot^2\alpha}$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

$\tan\cot^{-1}x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$=\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{x}$$

$\therefore$ দক্ষিণ পক্ষ$=2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{1}{x}\right)=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

$$=\tan^{-1}\frac{2\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{1-\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}{x^2}}=\tan^{-1}2\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)x}{x^2-(x^2+1+1-2\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2(\sqrt{x^2+1}-1)x}{2\sqrt{x^2+1}-2}=\tan^{-1}\frac{2(\sqrt{x^2+1}-1)x}{2(\sqrt{x^2+1}-1)}=\tan^{-1}x.$$

উদা. 12. x-এর জন্য নিম্নের সমীকরণটি সমাধান কর :—

$$\cos^3\alpha\sec x+\sin^3\alpha\operatorname{cosec} x=1.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\cos^3\alpha.\frac{1}{\cos x}+\sin^3\alpha.\ \frac{1}{\sin x}=1$$

বা, $\cos^3\alpha\sin x+\sin^3\alpha\cos x=\sin x\cos x$

বা, $\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)\sin x+\sin^3\alpha\cos x=\sin x\cos x$

বা, $\sin^3\alpha\cos x-\cos\alpha\sin^2\alpha\sin x$

$$=\sin x\cos x-\sin x\cos\alpha$$

বা, $\sin^2\alpha(\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x)=\sin x(\cos x-\cos\alpha)$

বা, $\sin^2\alpha\sin(\alpha-x)=\sin x.\,2\sin\frac{\alpha+x}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}$

বা, $\sin^2\alpha.2\sin\frac{\alpha-x}{2}\cos\frac{\alpha-x}{2}=2\sin x.\sin\frac{\alpha+x}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}$

বা, $2\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha-x}{2}=2\sin x\sin\frac{\alpha+x}{2}$

বা, $2\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha-x}{2}=\cos\frac{x-\alpha}{2}-\cos\frac{1}{2}(3x+\alpha)$

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}(3x-\alpha)=\cos\frac{x-\alpha}{2}(1-2\sin^2\alpha)$

$$=\cos\frac{x-\alpha}{2}\cos 2\alpha,$$

বা, $2\cos\frac{1}{2}(3x-\alpha)=2\cos\frac{x-\alpha}{2}\cos 2\alpha$

$$=\cos\frac{(x+3\alpha)}{2}+\cos\frac{(x-5\alpha)}{2}$$

বা, $\cos\frac{3x-\alpha}{2}-\cos\frac{x+3\alpha}{2}=\cos\frac{x-5\alpha}{2}-\cos\frac{3x-\alpha}{2}$

বা, $\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin(x+\alpha)=-\sin(x-\alpha)\sin\frac{1}{2}(x+3\alpha)$

$\therefore\ \sin\frac{x-\alpha}{2}=0\cdots\cdots(1)$

অথবা, $\sin(x+\alpha)=-2\sin\frac{1}{2}(x+3\alpha)\cos\frac{x-\alpha}{2}$

$=-\{\sin(x+\alpha)+\sin 2\alpha\}$

বা, $\sin(x+\alpha)=-\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$x=n\pi+\alpha$ [(1) হইতে]

বা, $x=n\pi-\alpha+(-1)^{n-1}\sin^{-1}(\sin\alpha\cos\alpha)$ [(2) হইতে]

উদা. 13. একটি বৃত্তাকার থালা (বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a') ভূমি হইতে 5 উচ্চতায় অনুভূমিক তলে থাকিয়া একটি উলম্ব দেওয়ালকে স্পর্শ করে। থালার কেন্দ্রে একটি 'c' উচ্চতাবিশিষ্ট জ্বলন্ত মোমবাতি উলম্ব অবস্থায় থাকিলে প্রমাণ কর যে, দেওয়ালের উপর ছায়ার প্রস্থ $\frac{2a}{c}\sqrt{b^2+2bc}$.

[I. I. T. 1971]

মনে কর, ছায়ার দৈর্ঘ্য $2x$ এবং y থালার ব্যাসার্ধের অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য।

$\therefore\ x^2+a^2=y^2$, বা, $x^2=y^2-a^2$.

আবার, $\frac{y}{a}=\frac{b+c}{c}$, বা, $y=\frac{a(b+c)}{c}$

$\therefore\ x^2=\frac{a^2(b+c)^2}{c^2}-a^2=\frac{a^2}{c^2}\left\{(b+c)^2-c^2\right\}=\frac{a^2}{c^2}\left(2bc+b^2\right)$

$\therefore\ x=\frac{a}{c}\sqrt{b^2+2bc}.$

সুতরাং নির্ণেয় ছায়ার প্রস্থ $=2x=\frac{2a}{c}\sqrt{2bc+b^2}$.

উদা. 14. তালিকা ব্যবহার না করিয়া প্রমাণ কর যে,

$\sin 10^\circ\sin 50^\circ+\sin 50^\circ\sin 250^\circ+\sin 250^\circ\sin 10^\circ=-\frac{3}{4}$.

বামপক্ষ $=\sin 10^\circ\sin 50^\circ+\sin 50^\circ\sin 250^\circ+\sin 250^\circ\sin 10^\circ$

$=\frac{1}{2}[\cos 40^\circ-\cos 60^\circ+\cos 200^\circ-\cos 300^\circ+\cos 240^\circ-\cos 260^\circ]$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos 40^\circ-\tfrac{1}{2}+\cos(180^\circ+20^\circ)-\cos(360^\circ-60^\circ)$$
$$+\cos(180^\circ+60^\circ)-\cos(270^\circ-10^\circ)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\cos 40^\circ-\tfrac{1}{2}-\cos 20^\circ-\cos 60^\circ-\cos 60^\circ+\sin 10^\circ]$$
$$=\tfrac{1}{2}[-\tfrac{3}{2}+2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\sin\frac{20^\circ-40^\circ}{2}+\sin 10^\circ]$$
$$=\tfrac{1}{2}[-\tfrac{3}{2}+2\sin 30^\circ\sin(-10^\circ)+\sin 10^\circ]$$
$$=-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\sin 10^\circ+\tfrac{1}{2}\sin 10=-\tfrac{3}{4}=$$ ডানপক্ষ।

উদা. 15. $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$ [W. B. B. E, 1971]

$\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, বা, $\dfrac{a+b}{a}\sin^4\alpha+\dfrac{a+b}{b}\cos^4\alpha=1.$

বা, $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\sin^4\alpha+\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\cos^4\alpha=1.$

বা, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\dfrac{b}{a}\sin^4\alpha+\dfrac{a}{b}\cos^4\alpha=1.$

বা, $(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)$

$$+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha\right)^2-2\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha$$
$$+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=1.$$

বা, $\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=1.$

বা, $1+\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=1,$

বা, $\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cos^2\alpha=0.$

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{a}=\dfrac{\cos^2\alpha}{b}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}.$

$\therefore\ \sin^2\alpha=\dfrac{a}{a+b},\ \cos^2\alpha=\dfrac{b}{a+b}.$

$$\therefore \quad \frac{\sin^8 \alpha}{a^3}+\frac{\cos^8 \alpha}{b^3}=\frac{\frac{a^4}{(a+b)^4}}{a^3}+\frac{\frac{b^4}{(a+b)^4}}{b^3}$$

$$=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

উদা. 16. একটি বৃত্তের a এবং b সে. মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে যথাক্রমে θ ও 3θ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে দেখাও যে, $r=a\sqrt{\frac{a}{3a-b}}$ সে. মি.।

মনে কর, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যার দৈর্ঘ্য a. OA ও OB যোগ কর। এক্ষণে $\triangle$AOB হইতে পাই, $AB^2=OA^2+OB^2-2OA.\ OB\cos AOB$

বা, $a^2=2r^2-2r^2\cos\theta=2r^2(1-\cos\theta)=4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\therefore \quad a=2r\sin\frac{\theta}{2}$, বা, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{a}{2r}$.

অনুরূপে $\sin\frac{3\theta}{2}=\frac{b}{2r}$.

এক্ষণে $\sin\frac{3\theta}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}-4\sin^3\frac{\theta}{2}$

$\therefore \quad \frac{b}{2r}=3\frac{a}{2r}-4.\frac{a^3}{8r^3}=\frac{3a}{2r}-\frac{a^3}{2r^3}$ বা, $b=3a-\frac{a^3}{r^2}$

$\therefore \quad \frac{a^3}{r^2}=3a-b$, বা, $r^2=\frac{a^3}{3a-b}$, $\therefore \quad r=a\sqrt{\frac{a}{3a-b}}$.

উত্তরমালা

ত্রিকোণমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $3° 40' 14''$ (ii) $8° 27' 30''$ (iii) $21° 36'$
2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{27}{40}$ (iii) $4\frac{13}{8375}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) 20
3. (i) $114° 32' 43{\cdot}\dot{6}\dot{3}'$ (ii) $100°$ (iii) $120°$
4. (i) $\frac{\pi}{6}$ (i) $\frac{151\pi}{360}$ 5. 28 মিটার 6. $90°$ 7. $6\frac{32}{85}$ সে.মি.
8. 2500 ফুট 9. $\frac{55}{567}$ মাইল 10. $7'9{\cdot}5\dot{4}''$ 11. $5 : 4$.

প্রশ্নমালা 2A

33. 2 34. 0 35. 1 36. 0 37. 0 38. 0

প্রশ্নমালা 2B

1. $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

   $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$.

2. $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ 3. $\frac{12}{5}, \frac{13}{5}$ 4. $\frac{3}{5}, \frac{5}{4}$ 5. $\frac{3}{4}$
6. $\frac{60}{11}, \frac{61}{60}$ 13. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$

   $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$ 14. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 15. $\frac{1}{7}$ 16. $\frac{16}{63}$.

প্রশ্নমালা 3A

1. 9. 2. 1. 3. $1\frac{1}{4}$. 4. $9\frac{2}{3}$. 10. 0. 11. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

প্রশ্নমালা 3B

3. $x^2+y^2=b^2$; 2. $xy=a^2$ 3. $ac=b^2$ 4. $xy=ab$.

প্রশ্নমালা 3C

1. $30°$. 2. $60°$. 3. $30°, 60°$. 4. $0°, 90°$.
5. $60°$. 6. $45°$. 7. $45°$. 8. $6°$
9. $5°$. 10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 11. $x=3, \theta=30°$
12. $p=2, \theta=60°$. 13. $x=-\frac{5}{3}$. 14. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
16. $\theta=60°$. 17. $A=30°$.

প্রশ্নমালা 4

1. 173·2 ফু. বা $100\sqrt{3}$ ফু. **2.** $150\sqrt{3}$ গজ **3.** 103·92 ফু.
4. 10·392 ফু. **5.** 9 ফু. **6.** $15\sqrt{2}$ ফু. **7.** 30°
8. 68·3 ফু. **9.** 17·32 ফু. **10.** $15\sqrt{3}$ ফু. **11.** 141·96 ফু.
12. 2·732 ফু. **13.** 94·64 ফু. **14.** 165·37 ফু. (প্রায়) **15.** 40 ফু.
16. 37·32. ফু. (প্রায়) **17.** $40\sqrt{3}$ ফু. **18.** 63·4 ফু. (প্রায়) **19.** 30°
20. 51·96 ফু., 30 ফু. **21.** 200 ফু. **22.** ·866 মা. বা ·433 মা.
23. 173·2 গজ **24.** উচ্চতা = 17·32 ফু., একটি খুঁটি হইতে 10 ফুট দূরে
25. 173·2 মি. **26.** 81·96 ফুট (প্রায়) **27.** 30 ফুট।

প্রশ্নমালা 5

1. (i), (ii), **2.** (iv) **3.** না **4.** না **5.** না
6. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** $-\frac{1}{2}$ **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **9.** $\theta=30°$.
10. (i) সমাধান নাই (ii) সমাধান নাই।

প্রশ্নমালা 6

1. 60°, $\frac{1}{2}$ **2.** 45°, 1 **3.** 30°, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **4.** 1 **5.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
6. $\sqrt{3}$ **7.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8.** -1 **9.** $-\sqrt{2}$ **10.** -2
11. $-\sqrt{3}$ **12.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **13.** 0 **14.** 1 **19.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
20. $\pm\frac{15}{17}$ **21.** 0 **22.** $-\tan 38°$ **23.** $-\cos 30°$
24. $-\sin\frac{\pi}{9}$ **25.** 120°, 300°, −60°, −240° **26.** 60°, 120°
27. 30°, 150° **28.** 30°, 330° **29.** 60°, 90°, 270°, 300°
30. 30°, 150° **31.** 45°, 135°, 225°, 315°
32. (i) $\pm\frac{1}{2}$ (ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) ± 1
33. (i) 240° (ii) 330° (iii) 405° **34.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$
35. -10 **36.** (i) $\sin\theta$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) 3 **39.** -1

প্রশ্নমালা 7

1. (i) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2+\sqrt{3}$ (iii) $-(2+\sqrt{3})$ **2.** (i) $\sin 6\alpha$
(ii) $\cos 60°=\frac{1}{2}$; (iii) $-\sin\beta$. (iv) $\tan\theta$.
3. $\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$
$+\sin A\sin B\sin C$.
4. $\sqrt{2}$ **6.** $\frac{33}{65}$ **7.** $-\frac{85}{36}$ **8.** $-\frac{278}{29}$ **31.** 0 **32.** 1.

প্রশ্নমালা 8

1. $\sin 7\theta+\sin 3\theta$ 2. $\sin 15\theta+\sin\theta$ 3. $\frac{1}{2}(\cos 6\theta+\cos\theta)$
4. $\cos(2A-B)-\cos(4A+B)$ 5. $\sqrt{3}\cos 20^\circ$
6. $-2\cos 5\theta\sin 2\theta$ 7. $2\cos 5A\cos 2A$
8. $2\sin 8\theta\sin\theta$ 9. 0 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{1}{8}$ 12. $\frac{3}{8}$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 28. $4\sin(B+C)\sin(C+A)\sin(A+B)$
29. $\sin(A+B+C)+\sin(A-B-C)+\sin(A+B+C)+\sin(A-B+C)$
32. $\frac{3}{4}$ 33. $\tan 4A$ 35. $\pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{4-a^2-b^2}}$.

প্রশ্নমালা 9

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{23}{27}$ 3. $\frac{1}{7}$ 4. 2.

প্রশ্নমালা 10

1. $\frac{1}{4}\{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$, $\frac{1}{4}\{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
3. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{8}$ 4. $\dfrac{3}{4}$ 5. $\dfrac{1}{2}$ 8. $\dfrac{16}{305}$, $\dfrac{49}{305}$
10. $\dfrac{1}{16}$ 11. $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$, $\pm\sqrt{\left(\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}$
20. অশুদ্ধ ; $2\sin\frac{\theta}{2}=-\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}$
23. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 24. $2\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$

প্রশ্নমালা 12

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 2. $n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$ 3. $2n\pi+\dfrac{7\pi}{6}$
4. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ অথবা $2n\pi-\frac{\pi}{6}$
4. (a) $\theta=2m\pi$ বা $(2p+1)\pi-\frac{\pi}{3}$ 5. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$
6. $n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 7. $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$
8. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{12}$ 9. $2n\pi+\frac{\pi}{3}$
10. $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ 11. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা, $n\pi+\cot^{-1}\frac{1}{2}$
12. $\dfrac{r\pi}{m+(-1)^r n}$ যেখানে r কোন অখণ্ড সংখ্যা বা 0

13. $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ বা $\frac{2n\pi}{3}$ 14. $(2n+1)\frac{\pi}{14}$

14. (a) $x=\frac{2n+1}{p+q}\cdot\frac{\pi}{2}$ 15. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

16. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ 17 $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$

18 $2n\pi$ অথবা $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 19. $\frac{n\pi}{3}$ বা $\frac{1}{12}\pi(6n\pm1)$

20. $\frac{n\pi}{4}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{24}$ 21. $n\pi$ বা $\frac{1}{4}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{24}$

22. $\frac{n\pi}{2}$(বা $n\pi$) 23. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ অথবা $n\pi+\frac{\pi}{3}$ 24. $\frac{1}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

25. $\frac{1}{3}n\pi$ বা $n\pi$ বা $\frac{1}{2}n\pi$ 26. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

27. $2n\pi$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi-\frac{\pi}{4}$ 28. $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{40}$

29. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}$ 30. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 31. $2n\pi$ বা $\frac{1}{6}(4n+1)\pi$

32. $\frac{1}{3}n\pi$ বা $n\pi\pm\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 33. $2n\pi-\alpha$ বা $(4n-1)\frac{\pi}{2}+\alpha$

34. $(2n+1)\frac{\pi}{8}$, বা, $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, বা, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

35. $2n\pi+\alpha$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$ 36. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $2n\pi-\frac{611x}{2700}$

37. $2m\pi$ বা $\frac{4m\pi}{n\pm1}$ 38. 90°, 450°, 810° 39. $\frac{n\pi}{6}$

40. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $\sin^{-1}(-\frac{3}{5})$ 42. 30°, 120°, 150°

43. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ 44. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{-7\pi}{12}$ 45. $\frac{\pi}{3}$

46. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{13}{3}\pi$ 47. 75° বা 345°

48. $x=y=45°$ 49. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $2n\pi+\frac{58\pi}{225}$

প্রশ্নমালা 13

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $-\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{6}$ 4. $\frac{\pi}{2}$ 5. $\frac{\pi}{2}$ 6. 1

7. (i) $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\text{coses}^{-1}\frac{1}{x}$$

(ii) $$\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{1+x^2}}=\cos^{-1}\frac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}}=\cot^{-1}\frac{1}{x}$$

$$=\sec^{-1}(\pm\sqrt{1+x^2})=\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}$$

33. ± 1 **34.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ **35.** $-\frac{1}{6}$ বা 1 **36.** 3
37. 0 বা $\frac{1}{2}$ **38.** 13 **39.** 1 **40.** $\pm\frac{1}{2}$ **41.** $=4\frac{6}{9}1$
42. $\pm\frac{25}{24}$ **43.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **44.** $\frac{a+b}{1-ab}$ **45.** $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$
46. 2 **47.** $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ **48.** কোনমান নাই **49.** অসংজ্ঞেয়।

প্রশ্নমালা 14 A

1. A=30°, B=120°, C=30° **2.** 60° বা 120° **3.** 43
4. $\frac{4}{7}$ **5.** $\frac{4}{5}$ **6.** 30° **7.** 84 **8.** 21·3 (আসন্ন)
9. 7776 বর্গ একক। **10.** B=90°, A=30°, C=60° **11.** 120°.

প্রশ্নমালা 14 B

1. $r=4$, $r_1=10\frac{1}{2}$ **2.** $R=\frac{abc}{4\Delta}$ **23.** 7 : 2.

প্রশ্নমালা 15

1. ·70571 **2.** ·90482 **3.** ·71857 **4.** ·26095
5. 1·24884 **6.** 1·29752 **7.** 9·84758 **8.** 9·61614
9. 9·81911 **10.** 10·28229 **11.** 68·57′ **12.** 3·68372.
13. ·0353441 **14.** ·61837 **15.** ·30317175 **16.** 2·64114
17. 35°24′37″ **18.** ·66553 **19.** 53°18′12″
20. 76°21′29″ **21.** 1074013 **23.** 9·7867587
24. 79 51′47·2″ **24.** θ=27°39′55″ **25.** ·66843
26. 10·613296 **27.** 9·8505931 **28.** ·29974
30. 1·776 **31.** ·2394
32. 36°52′7″ **33.** 16°41′15″.

প্রশ্নমালা 16 A

1. A=41°23′14″, B=47°46′50″, C=90°49′56″ **2.** 9·6743937
3. 38°56′33″, 47°41′7″, 83°22′20″ **4.** 58°56′33″
5. 78°27′46″·8 (আসন্ন) **6.** 88°59′41″ (প্রায়)
7. 48°11′23″, 53°24′43″, 73°23′54″ **8.** 55°46′16″·14 (প্রায়)
9. 104°28′39″·1 (প্রায়) **10.** 71°42′ (প্রায়) **11.** 53°7′48″
12. 60°, 45°, 75° **13.** A=120°, B=C=30° **14.** 120°
16. 30°, 105° ; 2 : $\sqrt{2}$: ($\sqrt{3}+1$) **17.** 2 : ($\sqrt{3}+1$)

18. $1 : \sqrt{3} : 2$ 21. $12 : 5 : 13$ 22. $2 : (\sqrt{3}+1)$
23. $\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$ 24. 14·35948.

প্রশ্নমালা 16 B

1. $a=1$, $B=120°$, $C=30°$ 2. $c=2$, $A=75°$, $B=60°$
3. 16°3′·5, 123°56′·5 4. $B=78°17'39·6''$, $C=49°36'20·4''$
5. $A=38°12'47''·5$, $B=81°47'12''·5$ 6. 119°16′51″, 5°43′9″
7. $A=94°41'54''$, $B=25°17'6''$
8. $A=71°44'29·5''$, $B=48°15'30·5''$
9. $B=76°47'2·2''$, $C=49°12'57''·8$
10. $A=116°33'54''$, $B=26°33'54''$
11. $B=19°38'3''$, $C=109°39'57''$, $a=559·63$,
12. 70°53′36″, 49°6′24″ 14. 27·0375
15. 7·698622 16. $B=30°$, $a=c=2(\sqrt{3}+1)$
17. $\sqrt{5}+1$; 72°, 72°, 36° 18. $C=70°30'$, $b=18·33$, $c=37·05$
19. 769·8622 20. 172·6436.

প্রশ্নমালা 16 C

1. $B=75°$, $C=45°$
3. $B_1=105°$, $C_1=30°$, $b_1=\sqrt{2}$; $B_2=75°$, $C_2=60°$, $b_2=\sqrt{6}$
4. কোন সমাধান নাই 5. $A_1=105°$, $C_1=45°$, $a_1=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $A_2=15°$, $C_2=135°$, $a_2=10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
6. $B=60°$, $A=90°$, $a=20\sqrt{3}$; অথবা, $B=120°$, $A=30°$, $a=10\sqrt{3}$
7. $A=30°$; $B=90°$, $b=10$ 8. 63·996 ফুট।
9. 44°25′39″ 10. $A=100°34'$, $B=34°26$
11. $A=75°53'$, $C=67°47'$, অথবা $A=31°27'$, $C=112°13'$
12. 50°10′35″ বা 120°49′25″ 13. $B=34°27'$ (প্রায়), $C=100°33'$
14. 4·56706 15. 5°44′21″
17. $A=31°39'33''$, $C=96°1'27''$, $a=878·753$.

প্রশ্নমালা 17

7. $\theta=\frac{\pi}{4}$ 8. $x=n\pi+\frac{1}{4}\pi$ 9. $x=\frac{\pi}{4}$ 10. $x=38°10'$ (প্রায়)
11. $x=0$, $x=1·17$ রেডি. (প্রায়) 12. $x=0°, 60°, 180°, 300°, 360°$
13. $x=0$ 14. $\theta=90°$ ও 46°25′ (প্রায়)
15. লেখটি $x=\frac{\pi}{2}$ রেখার নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু উহাকে কখনও স্পর্শ করিবে না, সুতরাং $y=\frac{\pi}{2}$ রেখাটি ঐ বক্র লেখটির অসীম পথ হইবে।
16. লেখ অঙ্কনের সময় x-এর radian মান ধরিবে। লেখগুলি মূল বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে। ইহা হইতে বুঝা যায় যে x অতি ক্ষুদ্র হইলে $\sin x = x = \tan x$.

TRIGONOMETRIC TABLES

TABLE III

NATURAL SINES (সাধারণ সাইন)

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences (গড় অন্তর) 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES (সাধারণ কোসাইন)

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences (গড় অন্তর)								
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

TABLE II(B)

সাধারণ সাইন ও কোসাইন

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	97875	97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°	এখানে অন্তর অতি ক্ষুদ্র বলিয়া নগণ্য।								
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																

NATURAL COSINES (সাধারণ কোসাইন)

TABLE IV

NATURAL TANGENTS (স্বাভাবিক ট্যানজেন্ট)

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences (গড় অন্তর)								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

TABLE IV]

সাধারণ ট্যান্‌জেণ্ট-কোট্যান্‌জেণ্ট

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	132	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55813	·56194	·56577	·56962	·57248	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	136	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS (সাধারণ কোট্যান্‌জেণ্ট)

NATURAL TANGENTS (সাধারণ ট্যানজেণ্ট)

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences (গড় অন্তর)								
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22759	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	383	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

TABLE IV সাধারণ ট্যান্‌জেণ্ট ও কোট্যান্‌জেণ্ট

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·078	10·385	10·712	11·059	11·4301	5°									
85°	11·430	11·826	12·251	12·706	13·197	13·727	14·301	4°									
86°	14·301	14·924	15·605	16·350	17·169	18·075	19·081	3°									
87°	19·081	20·206	21·470	22·904	24·542	26·432	28·636	2°									
88°	28·636	31·242	34·368	38·188	42·964	49·104	57·290	1°									
89°	57·290	68·750	85·940	114·59	171·89	343·77	+∞	0°									
90°	+∞																

অন্তর অতি দ্রুত বদলায় বলিয়া তালিকাভুক্ত করা সম্ভব নহে।

অতি ছোট x মিনিট (x') কোণের cot x' বা tan (90°−x) প্রায় 3437·7 ÷ x-এর সমান।

NATURAL COTANGENTS (সাধারণ কোট্যান্‌জেণ্ট)

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°									
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9 01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

Mean Differences (গড় অন্তর)

এখানে অন্তর অতি দ্রুত বদলায় বলিয়া তালিকাভুক্ত করা সম্ভব নহে। কোণ অতি ছোট x' (x মিনিট) হইলে $\log \sin x'$ বা $\log \cos (90^\circ - x') = \log x + \bar{4}\cdot46373$.

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77773	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	35	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

লগারিদ্‌মিক সাইন

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91248	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

লগারিদ্‌মিক সাইন ও কোসাইন

TABLE V]

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	15	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI
LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences (গড় অন্তর)								
0°	$-\infty$	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87958	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

অন্তর এত দ্রুত বদলায় যে তালিকাভুক্ত করা সম্ভব নহে। অতি ক্ষুদ্র x মিনিট কোণ হইলে $\log \tan x'$ বা $\log \cot (90^\circ - x')$ $= \log x + \bar{4}\cdot46373$.

লগারিদ্‌মিক ট্যান্‌জেন্ট—কোট্যানজেন্ট

TABLE VI]

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228

LOGARITHMIC COTANGENTS

লগারিদ্মিক ট্যানজেন্ট

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences (গড় অন্তর)								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57708	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76118	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·89057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

এখানে অন্তর এত দ্রুত বদলায় যে তালিকাভুক্ত করা অসম্ভব।

LOGARITHMIC COTANGENTS

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
CO-ORDINATE GEOMETRY

চিহ্নসম্বন্ধে বক্তব্য

1. A এবং B বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে সাধারণতঃ AB দ্বারা প্রকাশ করা হইবে। এই রেখাংশের দৈর্ঘ্যকেও AB দ্বারা প্রকাশ করা হইবে। AB কখন রেখাংশকে আর কখন রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে প্রকাশ করিবে, তাহা প্রসঙ্গ হইতে বুঝিতে হইবে।

2. $\overline{AB}$ দ্বারা A ও B বিন্দু সংযোজক নিয়ন্ত্রিত রেখাংশকে প্রকাশ করা হয়। নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$-র প্রারম্ভিক বিন্দু A ও অন্তিম বিন্দু B.

3. $\overleftrightarrow{AB}$ দ্বারা A ও B বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে প্রকাশ করা হয়।

4. $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার যে অংশের প্রারম্ভবিন্দু A এবং যাহা B বিন্দুর দিকে অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত তাহাকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\overrightarrow{AB}$, A হইতে B-র দিকে অভিমুখিতাকেও প্রকাশ করে।

5. $m\angle ABC$ দ্বারা $\angle ABC$-র পরিমাপকে বুঝান হয়।

6. $m\triangle ABC$-র অর্থ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ।

প্রয়োজনীয় তথ্য

1 সেট্ঃ যে কোন সংখ্যক বস্তুর সমাহারকে সেট্ (set) বলে। কোন শ্রেণীর সকল ছাত্র, কোন গ্রন্থাগারের সকল পুস্তক, এক ঝুড়ি আম, কোন সমতলের সকল বিন্দু, ইত্যাদি, প্রত্যেকটি সমাহার এক একটি সেটের উদাহরণ। কোন সেট্ যে সকল বস্তুর সমাহার, সেই সকল বস্তুর প্রত্যেকটিকে সেট্‌টির পদ (element বা member) বলে। সাধারণতঃ ইংরাজী হরফের বড় অক্ষর দ্বারা সেট্ এবং ছোট অক্ষরের দ্বারা সেটের পদকে চিহ্নিত করা হয়। যদি a, কোন সেট্ S-এর একটি পদ হয়, তবে লেখা হয় $a \in S$ এবং পড়া হয় a, S-সেটের একটি পদ। যদি b কোন সেট্ S-র পদ না হয়, তবে লেখা হয় $b \notin S$ এবং পড়া হয় b, সেট্ S-এর পদ নয়। পদগুলির বিশেষ এক বা একাধিক ধর্ম দ্বারা সেট্ নির্ধারিত হয়। সকল ধনাত্মক অখণ্ড-সংখ্যার সেট্ N-এর (মনে কর) প্রত্যেক পদের বিশেষ ধর্ম এই যে পদটি একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। $3 \in N$ এবং $-7 \notin N$; কারণ, 3 একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং -7 ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নয়। সুতরাং কোন সেটের পদগুলির ঐ এক বা একাধিক ধর্ম দ্বারা কোন বস্তু, কোন সেটের পদ কিংবা পদ নহে, তাহা নির্ধারণ করা সম্ভব। তোমার শ্রেণীর সকল খর্বকায় ছাত্রের সমাহার একটি সেট্ নয়। কোন ছাত্রের উচ্চতা কত হইলে, তাহাকে খর্বকায় বলা হইবে, তাহা নির্ণয় করা সম্ভব নহে। সেই কারণে খর্বকায় এই ধর্মটি দ্বারা কোন ছাত্র সেট্‌টির পদ কিংবা পদ নয়, তাহা নির্ধারণ করা সম্ভব নহে।

যদি কোন সেট্ A-র প্রত্যেকটি পদ অপর একটি সেট্ S-এর একটি পদ হয়, তবে সেট্ A-কে সেট্ S-এর একটি উপসেট্ (subset) বলা হয় এবং লেখা হয় $A \subset S$. $A \subset S$-কে সেট্ A, সেট্ S-এর অন্তর্গত এইরূপ পড়া হয়। উপসেটের সংজ্ঞা অনুযায়ী $S \subset S$. যদি A ও B দুইটি সেট্ এইরূপ হয় যে, $A \subset B$ এবং $B \subset A$, তবে লেখা হয় $A \equiv B$ অর্থাৎ A ও B সেট্ দুইটি অভিন্ন।

মনে কর, A ও B দুইটি সেট্। যে সকল বস্তু, A ও B বা উভয়েরই পদ তাহাদের সমাহারকে A ও B সেট্ দুইটির যোগ (union) বলা হয় এবং লেখা হয় $A \cup B$.

$\therefore$ $a \in A \cup B$ হইলে $a \in A$ বা $a \in B$.

যে সকল বস্তু A এবং B উভয় সেটেরই পদ তাহাদের সমাহারকে A ও B সেট্ দুইটির ছেদ (Intersection) বলা হয় এবং লেখা হয় $A \cap B$. যদি $a \in A \cap B$ হয়, তবে $a \in A$ এবং $a \in B$.

2. 1·1 সম্পর্ক : তোমরা ভূগোল পুস্তকে মানচিত্র দেখিয়াছ। কোন দেশের প্রত্যেকটি স্থানের জন্য তোমরা ঐ দেশের মানচিত্রে একটি এবং একটি মাত্র বিন্দু দেখিতে পাও এবং ঐ মানচিত্রের প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য দেশটির একটি এবং একটি মাত্র স্থান পাইবে। কোন দেশ এবং উহার মানচিত্রের মধ্যে এই সম্পর্ককে উহাদের একটি 1-1 সম্পর্ক (1-1 Correspondence) বলা হয়।

তোমার শ্রেণীর প্রত্যেকটি ছাত্রের একটি এবং একটি মাত্র ক্রমিক সংখ্যা আছে এবং প্রত্যেকটি ক্রমিক সংখ্যার জন্য তোমার শ্রেণীর একটি এবং একটি মাত্র ছাত্র আছে। সুতরাং তোমার শ্রেণীর সকল ছাত্র এবং তাহাদের ক্রমিক সংখ্যাগুলির একটি 1-1 সম্পর্ক আছে।

$1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 6, \ldots$ সম্পর্কটি সকল অযুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যার সেট্ ও সকল যুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যার সেটের মধ্যে একটি 1-1 সম্পর্ক। $1 \leftrightarrow -1, 2 \leftrightarrow -2, 3 \leftrightarrow -3, \ldots$ সম্পর্কটি সকল ধনাত্মক ও সকল ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সেট্ দুইটির মধ্যে একটি 1-1 সম্পর্ক।

3. বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of rational numbers) :

বাস্তব সংখ্যাসমূহ নিম্নলিখিতভাবে একটি সরলরেখার উপরিস্থ বিন্দু হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

একটি সরলরেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু O লওয়া হইল। O বিন্দুটি সরলরেখাকে দুইটি অংশে ভাগ করে। একটি অংশকে ধনাত্মক দিক এবং অপর অংশটিকে ঋণাত্মক দিক হিসাবে লওয়া হয়। সাধারণতঃ O বিন্দুর ডানদিকের অংশটিকে ধনাত্মক দিক ধরা হয়। ধনাত্মক অংশে (অর্থাৎ O বিন্দুর ডানদিকে) আর একটি বিন্দু I লওয়া হইল। 0 (শূন্য) সংখ্যাটিকে O বিন্দুর দ্বারা এবং 1 সংখ্যাটিকে I বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইল। O বিন্দুকে মূলবিন্দু (origin) এবং OI দৈর্ঘ্যকে একক দৈর্ঘ্য (unit length) বলে। এখন যে কোন বাস্তব সংখ্যাকে $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার উপর একটি বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

a যদি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে ইহাকে O বিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত একটি বিন্দু P দ্বারা সূচিত করা হইবে, যাহাতে $OP = a.OI$, হয়।

যে কোন ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা $-b$কে O বিন্দুর বামদিকে অবস্থিত এবং O হইতে OI দৈর্ঘ্যের b গুণ দূরত্বের বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইবে। যেমন -1কে I'

বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে OI′ = OI, −2 সংখ্যাটি O-এর বাম দিকে অবস্থিত A′ বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে OA′ = 2.OI, ইত্যাদি।

এইরূপে যে কোন বাস্তব সংখ্যাকে $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার জন্য $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার একটি এবং একটি মাত্র বিন্দু পাওয়া যায় ও বিপরীতক্রমে $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার প্রত্যেক বিন্দুর জন্য একটি এবং একটি মাত্র বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায়। সুতরাং সকল বাস্তব সংখ্যার সেটের সহিত $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার সকল বিন্দুর সেটের একটি এক-এক সম্পর্ক বিদ্যমান।

4. **নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ** (Directed line-segment) :

কোন সরলরেখার যে কোন সীমাবদ্ধ অংশকে **রেখাংশ** বলা হয়। কোন সরলরেখার যে কোন দুইটি বিন্দু A ও B একটি রেখাংশ নির্ণয় করে। এই রেখাংশকে AB বা BA দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং A ও B এই রেখাংশের দুইটি প্রান্তবিন্দু। A এবং B-র দূরত্ব হইল এই রেখাংশের দৈর্ঘ্য। যে কোন রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুইটির একটিকে প্রারম্ভবিন্দু (initial point) ও অপরটিকে অন্তিমবিন্দু (terminal point) ধরিয়া রেখাংশটিকে নিয়ন্ত্রিত (directed) করা হয়। নিয়ন্ত্রিত রেখাংশকে প্রকাশ করিবার জন্য আমরা নিম্নলিখিত প্রথা অনুসরণ করিব। A ও B বিন্দুদ্বয় সংযোজক নিয়ন্ত্রিত রেখাংশকে $\overline{AB}$ দ্বারা নির্দেশ করা হইবে। $\overline{AB}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের প্রারম্ভ-বিন্দু A ও অন্তিমবিন্দু B এবং $\overline{BA}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের প্রারম্ভবিন্দু B ও অন্তিম-বিন্দু A. কোন রেখাংশের দৈর্ঘ্যই উহার পরিমাপ এবং উহা কোন নির্দিষ্ট দিককে নির্দেশ করে। কোন নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের অভিমুখিতা উহার প্রারম্ভ বিন্দু হইতে অন্তিম বিন্দুর দিকে। সুতরাং $\overline{AB}$ ও $\overline{BA}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটির পরিমাপ সমান ও অভিমুখিতা পরস্পর বিপরীত। মনে কর, একই সরলরেখায় অবস্থিত OA এবং OB রেখাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x_1 ও x_2. নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ ও $\overline{BA}$কে যথাক্রমে $x_2 - x_1$ ও $x_1 - x_2$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং $\overline{AB} = -\overline{BA}$, $x_2 - x_1$ এবং $x_1 - x_2$কে যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{BA}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটির স্থানাঙ্ক অথবা মান (value) বলা হয়।

মনে কর, কোন সরলরেখার A, B ও C তিনটি বিন্দু। সুতরাং দৈর্ঘ্য হিসাবে AC = AB + BC (যখন B, A ও C-র অন্তর্বর্তী) বা, AC = AB − BC

(যখন B, A ও C-র অন্তর্বর্তী নয়)। কিন্তু নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ হিসাবে সর্বদাই $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ হইবে।

দুইটি নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের সমতার সংজ্ঞার উল্লেখ করিয়া বর্তমান আলোচনা শেষ করা হইল।

সংজ্ঞা : দুইটি নিয়ন্ত্রিত রেখাংশকে সমান বলা হয় যদি (i) উহারা একই সরলরেখায় অথবা সমান্তরাল সরলরেখায় অবস্থিত হয়; (ii) উহাদের দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং (iii) উহাদের একই অভিমুখিতা হয়।

প্রশ্নমালা 0

1. নিম্নের কোন্‌গুলি সেট ?

(i) শেষ দশটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) প্রথম দশটি ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা।

(iii) তোমার শ্রেণীর সকল ছাত্র।

(iv) তোমার শ্রেণীর সকল বুদ্ধিমান ছাত্র।

2. নীচের কোন্ সংখ্যাগুলি সকল যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার সেটের পদ ?

(i) 0 ; (ii) 1 ; (iii) 2 ; (iv) 3 ; (v) 4 ; (vi) 5.

3. মনে কর $A\equiv\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ এবং

$B\equiv\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $A\subset B$ কিনা বল।

4. $A\equiv\{1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4\}$ ও $B\equiv\{1, 2, 3, 4, 4, 5, 3\}$, দেখাও যে, $A\subset B$ এবং $B\subset A$, উহা হইতে প্রমাণ কর $A\equiv B$.

5. কোন সমতলের l_1 ও l_2 সরলরেখা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। L_1 ও L_2 যথাক্রমে l_1 ও l_2 সরলরেখাদ্বয়ের বিন্দুসমূহের সেট। $L_1\cap L_2$ নির্ণয় কর।

6. মনে কর m সকল ধনাত্মক সংখ্যার সেটের সকল মৌলিক সংখ্যার সেটের সহিত এরূপ একটি 1–1 সম্পর্ক যে $1\overset{m}{\leftrightarrow}2$, $2\overset{m}{\leftrightarrow}3$, $3\overset{m}{\leftrightarrow}5$, $4\overset{m}{\leftrightarrow}7$ $12\overset{m}{\leftrightarrow}x$ হইলে x নির্ণয় কর।

7. নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$-র মান 5 হইলে, নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{BA}$-র মান নির্ণয় কর।

8. A, B, C একটি সরলরেখার তিনটি বিন্দু এবং $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটির মান যথাক্রমে 5 ও 3. $\overline{AC}$ ও $\overline{CA}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটির মান নির্ণয় কর।

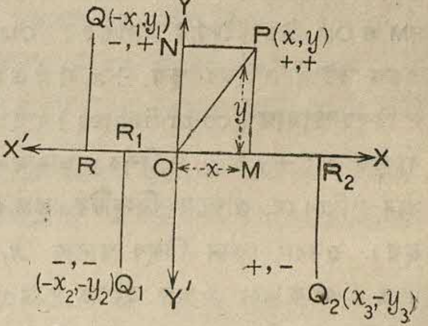
প্রথম অধ্যায়

স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)

§ 1·1. গণিতের যে শাখায় বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির আলোচনা করা হয়, তাহাকে **বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতি** (Analytical Geometry) বা **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** (Co-ordinate Geometry) বলা হয়। বর্তমান পুস্তকে কোন সমতলের জ্যামিতিক আলোচনা করা হইবে। সে কারণে, এই জ্যামিতিক আলোচনাকে সামতলিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বা দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Co-ordinate Geometry of two dimensions) বলা হয়।

§ 1·2. **কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক** (Cartesian Co-ordinates):

মনে কর, কোন সমতলে $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YX'}$ নির্দিষ্ট সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ সরলরেখাদ্বয় নির্দিষ্ট বলিয়া O বিন্দুও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ঐ সরলরেখা দুইটি সম্পর্কে ঐ সমতলে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর অবস্থান নির্ণয় করা যাইতে পারে। P হইতে $\overleftrightarrow{XX'}$ এর উপর PM এবং $\overleftrightarrow{YY'}$-এর উপর PN লম্ব টান। P বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট ভাবে নির্ণয় করিতে হইলে PM এবং PN এর পরিমাপ বা দৈর্ঘ্য এবং দিক উভয়ই জানা প্রয়োজন। কারণ, PM ও PN-এর কেবলমাত্র দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে, P বিন্দুর অবস্থান $\overleftrightarrow{XX'}$ রেখার উপরদিকে না নীচেরদিকে, বা $\overleftrightarrow{YY'}$ রেখার বামদিকে না ডানদিকে তাহা জানা যায় না। এই জন্য চিহ্নের (sign-এর) ব্যবহার প্রয়োজন।



চিত্র 1

চিত্র 1-এ দেখ, $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ রেখা সমতলকে চারিটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। প্রত্যেক অংশকে এক একটি পাদ (quadrant) বলা হয়। চিত্রে XOY কোণের মধ্যবর্তী অংশকে প্রথম পাদ. X'OY কোণের মধ্যবর্তী অংশকে দ্বিতীয় পাদ, X'OY' কোণের মধ্যবর্তী অংশকে তৃতীয় পাদ, এবং Y'OX কোণের মধ্যস্থিত অংশকে চতুর্থ পাদ বলা হয়। $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ রেখা

দুইটি, যাহাদের সম্পর্কে সমতলের যে-কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাহাদের প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) বলে। $\overleftrightarrow{XX'}$ সরলরেখাটিকে **ভুজাক্ষ** বা x-অক্ষ (x-axis) এবং $\overleftrightarrow{YY'}$কে **কোটি-অক্ষ** বা y-অক্ষ (y axis) বলা হয়। O বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (origin) বলে। প্রচলিত প্রথা অনুসারে y-অক্ষের ডানদিকে x-অক্ষ বরাবর বা x-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্ব বা দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক (positive) এবং y-অক্ষের বামদিকের অনুরূপ দৈর্ঘ্যগুলিকে ঋণাত্মক (negative) ধরিতে হয়। আবার x-অক্ষের উপর দিকে y-অক্ষ বরাবর বা y-অক্ষের সমান্তরাল দৈর্ঘ্যগুলিকে ধনাত্মক এবং x-অক্ষের নীচের দিকের অনুরূপ দৈর্ঘ্যগুলিকে ঋণাত্মক ধরা হয়। y-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব PN বা OM ($\because PN \cong OM$), $+x$ বা $-x$ একক হইলে চিহ্নযুক্ত x (অর্থাৎ $+x$ বা $-x$)-কে P বিন্দুর **ভুজ** (abscissa) এবং x-অক্ষ হইতে P-র দূরত্ব PM, $+y$ বা $-y$ একক হইলে চিহ্নযুক্ত y (অর্থাৎ $+y$ বা $-y$)-কে P বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বলে। চিত্রে P বিন্দু প্রথম পাদে অবস্থিত হওয়ায় PM ও OM উভয় দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। $OM = +x$ একক এবং $PM = +y$ একক হইলে, P বিন্দুর ভুজ $+x$ বা x এবং কোটি $+y$ বা y. (x, y)-কে P বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** (co-ordinates) বলে। $+x$ বা x, P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ এবং $+y$ বা y, P বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি। স্থানাঙ্ক লিখিবার সময় মনে রাখিবে যে, **প্রথমে বিন্দুটির ভুজ ও পরে উহার কোটি লিখিতে হয়।** সুতরাং কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে উহার y-অক্ষ হইতে দূরত্ব x একক এবং x-অক্ষ হইতে দূরত্ব y একক। অতঃপর এই পুস্তকে (লিখিবার সুবিধার জন্য) কোনও দৈর্ঘ্য x একক বা y একককে কেবলমাত্র x বা y দ্বারা সূচিত করা হইবে। $PM = x$ বলিতে বুঝিবে $PM = x$ একক। দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু Q-এর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(-x_1, y_1)$ [কোটি y_1 ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হইলেও, যেহেতু সাধারণতঃ ধনাত্মক চিহ্নটি লেখা হয় না, তাই y_1 লেখা হইল)। তৃতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু Q_1-এর ভুজ ও কোটি দুইটিই ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(-x_2, -y_2)$ হইবে। চতুর্থপাদে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু Q_2-এর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক, সুতরাং স্থানাঙ্ক $(x_3, -y_3)$ হইবে।

অতএব কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে উহা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা নির্দিষ্ট হইয়া যায়। কোন বিন্দুর অবস্থান জানা থাকিলে তাহার ভুজ

ও কোটি নির্ণয় করিয়া উহাদের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নসহ একটি বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে ভুজ এবং পরে কমা দিয়া কোটি লিখিলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে। তোমরা জান OM $=x$ একক বা PM $=y$ একক হইলে x বা y যে-কোন বাস্তব সংখ্যা হইতে পারে। সুতরাং বলিতে পারা যায় যে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক **দুইটি ক্রমিক চিহ্নযুক্ত বাস্তব সংখ্যা** (Two ordered signed real numbers)। ক্রমিক বলিতে বোঝান হইতেছে যে প্রথমে ভুজ ও পরে কোটি লিখিতে হয়। $(3, -4)$ ও $(-4, 3)$ দুইটি বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক। 3, প্রথম বিন্দুর ভুজ (কারণ, প্রথমে লেখা হইয়াছে) এবং দ্বিতীয় বিন্দুর কোটি (কারণ, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 3 পরে লেখা হইয়াছে)। আবার প্রথম ক্ষেত্রে -4, বিন্দুটির কোটি (কারণ, পরে লেখা হইয়াছে) এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে -4, বিন্দুটির ভুজ (কারণ, প্রথমে লেখা হইয়াছে)। সুতরাং কোন সমতলের সকল বিন্দুর সেটের সহিত সকল বাস্তব সংখ্যাযুগলের সেটের একটি $1-1$ সম্পর্ক বিদ্যমান।

মূলবিন্দু O-র ভুজ ও কোটি উভয়েই শূন্য বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, x-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর কোটি শূন্য (0) হয়, সুতরাং উহার স্থানাঙ্ক $(x, 0)$ এবং y-অক্ষস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ শূন্য (0) হয়, সুতরাং উহার স্থানাঙ্ক $(0, y)$.

আমরা $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ অক্ষ দুইটিকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত ধরিয়াছি। এরূপস্থলে স্থানাঙ্কগুলিকে **আয়তস্থানাঙ্ক** বা লম্ব স্থানাঙ্ক (rectangular-co-ordinates) বলা হয়।

যদি অক্ষদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত না হইয়া অন্য কোন কোণ XOY ($m\angle XOY \neq 90°$, বা $0°$)-এ নত হয় তবে উহাদিগকে তির্যক অক্ষদ্বয় (oblique axes) এবং স্থানাঙ্কগুলিকে **তির্যক স্থানাঙ্ক** (oblique co-ordinates) বলে।

বিখ্যাত দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ Descartes এই দুই প্রকার স্থানাঙ্ক প্রচলিত করেন বলিয়া ইহাদের **কার্তেসীয়** (cartesian) স্থানাঙ্ক বলা হয়। এই পুস্তকে তির্যক স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে না।

উদাহরণ 1. দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত একটি বিন্দুর x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে দূরত্ব যথাক্রমে 4 ও 5 একক। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (i) $(4, -5)$, (ii) $(5, 4)$, (iii) $(-5, 4)$, (iv) $(-5, -4)$. (i), (ii), (iii) ও (iv)-এর কোনটি সত্য বল।

সমাধান : যেহেতু বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, ∴ উহার ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক। আবার ভুজ y অক্ষ হইতে দূরত্ব বলিয়া বিন্দুটির ভুজ -5 ; কোটি x-অক্ষ হইতে দূরত্ব বলিয়া 4, যেহেতু স্থানাঙ্কে প্রথম ভুজ ও পরে কোটি লেখা হয়, সুতরাং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-5, 4)$, অতএব উপরের (iii)টি সত্য।

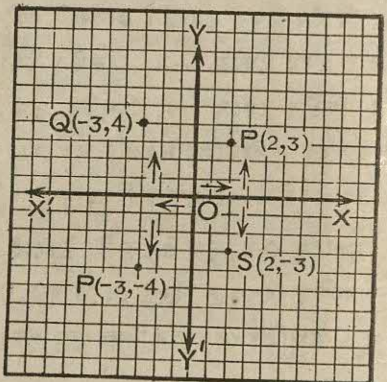
উদা. 2. গ্রেথ কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুদৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া নীচের বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

(i) P(2, 3) ; Q(−3, 4) ; R(−3, −4) এবং S(2. −3).

পাশের ছক কাগজে,

(i) মূলবিন্দু O হইতে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর 2 ঘর গিয়া উপরদিকে $\overrightarrow{OY}$-এর সমান্তরাল যে রেখাটি পাওয়া যায়, তাহা বরাবর 3-ঘর গিয়া P(2, 3) বিন্দুটি সংস্থাপিত করা হইল।

(ii) O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর 3 ঘর গিয়া সেখান হইতে $\overrightarrow{OY}$-এর সমান্তরাল উপরদিকে 4-ঘর গিয়া Q(−3, 4) বিন্দুটি সংস্থাপিত করা হইল।



চিত্র 2

(iii) O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর 3-ঘর গিয়া $\overrightarrow{OY'}$-এর সমান্তরাল রেখাটি বরাবর নীচের দিকে 4-ঘর গিয়া R(−3, −4) বিন্দুটি সংস্থাপিত করা হইল।

(iv) O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর 2-ঘর গিয়া $\overrightarrow{OY'}$-এর সমান্তরাল রেখাটি বরাবর নীচের দিকে 3 ঘর গিয়া S(2, −3) বিন্দুটি সংস্থাপিত করা হইল।

অনুশীলনী IA

1. নীচের বিন্দুগুলির কোন্‌টি কোন্ পাদে অবস্থিত বল।

(i) $(-2, 5)$, (ii) $(\cos 30°, -2 \sin 60°)$, (iii) $(\sqrt{3}+5, 2-\sqrt{3})$

2. শূন্যস্থান পূর্ণ কর :—

কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দুইটি — চিহ্নযুক্ত বাস্তব সংখ্যা।

3. চতুর্থ পাদে অবস্থিত একটি বিন্দুর x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে দূরত্ব যথাক্রমে 6 ও 7 একক। নীচের কোন্‌টি সত্য বল।

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (i) (6, 7), (ii) (7, −6), (iii) (−6, 7) ও (iv) (−7, −6)।

4. নীচের বিবৃতিটি শুদ্ধ না অশুদ্ধ ?

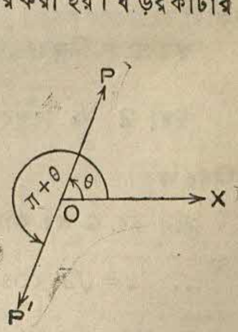
"x-অক্ষের যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার $(0, y)$".

5. ছক কাগজের উপর নীচের বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—

(i) (6, 7), (ii) (−5, 8), (iii) (4, 4) (iv) (−5, −5), (v) (0, 3) (vi) (−4, 0), (vii) (0, 0)

§ 1·3. **মেরুস্থানাঙ্ক বা পোলার স্থানাঙ্ক** (Polar co-ordinates) :

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যতীত অন্য আর এক প্রকার স্থানাঙ্কের সহিত এইবার তোমাদের পরিচিত করা হইতেছে। এই নূতন প্রকার স্থানাঙ্ককে **মেরুস্থানাঙ্ক** বা **পোলার স্থানাঙ্ক** বলা হয়। এই ক্ষেত্রে সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সম্পর্কে সমতলের প্রত্যেকটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে **পোল** বা **মেরু** বা মূলবিন্দু এবং ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে **প্রারম্ভিক রেখা** (Initial line) বা অক্ষ বলা হয়। মনে কর O মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{OX}$ প্রারম্ভিক রেখা। সমতলের যে-কোন P বিন্দুর সহিত O বিন্দু যোগ কর। OP দৈর্ঘ্য এবং ∠POX-এর পরিমাপ দ্বারা সমতলের উপরে P বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট হইবে। OP দৈর্ঘ্যকে P বিন্দুর **রেডিয়াস্‌-ভেক্টর** (radius vector) বা বাহিত-ব্যাসার্ধ এবং $m\angle POX$-কে **ভেক্টর-কোণ** বা বাহিত-কোণ (vectorial angle) বলে। সাধারণতঃ রেডিয়াস্‌-ভেক্টরকে r এবং ভেক্টর-কোণকে θ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। প্রারম্ভিক রেখা হইতে ভেক্টর কোণের পরিমাপ ত্রিকোণমিতির ন্যায় করা হয়। ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ধনাত্মক কোণ এবং ঐ গতির দিকে ঋণাত্মক কোণ পরিমাপ করা হয়। সুতরাং $OP = r$ একক এবং $m\angle POX = \theta$ একক হইলে P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ), সর্বদা প্রথমে রেডিয়াস্‌-ভেক্টর ও পরে ভেক্টর-কোণ লিখিতে হয়। $\overrightarrow{PO}$ কে P′ পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $OP' = r'$ হইলে P′-এর স্থানাঙ্ক হইবে $(r', \pi+\theta)$. রেডিয়াস্‌ ভেক্টরের অভিমুখিতার কথা চিন্তা করিলে P′ বিন্দুর স্থানাঙ্ককে $(-r', \theta)$-ও বলা যাইতে পারে। কিন্তু $(-r', \theta)$ ও $(r', \pi+\theta)$

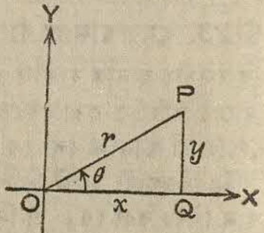


চিত্র 3

একই বিন্দুকে নির্দেশ করে বলিয়া মনে হইতে পারে যে নিয়ন্ত্রিত (ধনাত্মক ও ঋণাত্মক) রেডিয়াস্-ভেক্টর অপ্রয়োজনীয়। কিন্তু পোলার স্থানাঙ্কের ব্যাপক ব্যবহার করিলে দেখা যাইবে যে নিয়ন্ত্রিত রেডিয়াস্-ভেক্টর প্রয়োজনীয়। সুতরাং কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ন্যায় এক্ষেত্রেও বলা যায় যে, কোন বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক **দুইটি ক্রমিক চিহ্নযুক্ত বাস্তব সংখ্যা।**

পোলার স্থানাঙ্ক ও কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের পারস্পরিক সম্পর্ক :

কার্তেসীয় মূলবিন্দুকে পোলার মূলবিন্দু এবং কার্তেসীয় x-অক্ষকে প্রারম্ভিক রেখা মনে কর। মনে কর, কোন বিন্দু P-এর কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x,y) ও (r, θ)



চিত্র 4

সুতরাং পাশের চিত্র হইতে $x=r\cos\theta$, ও $y=r\sin\theta$.$\cdots(1)$

$$\therefore\quad x^2+y^2=r^2$$

এবং $\dfrac{y}{x}=\tan\theta.\quad\cdots(2)$

সূত্র-(1) দ্বারা পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে এবং সূত্র-(2) দ্বারা কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে পরিণত করা হয়।

উদা. 1. P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$, উহার পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)

$\therefore\quad r=\sqrt{1+3}=2$ এবং $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\ \therefore\ \theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

সুতরাং P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

উদা 2. Q বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ উহার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, Q-এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore\quad x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$ এবং $y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

সুতরাং Q বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(1, 1)$.

অনুশীলনী IB

1. নিম্নের বিন্দুসমূহের পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(a) $(-5, 12)$, (b) $(\sqrt{3}, -1)$, (c) $(4, 3)$.

2. নিম্নের বিন্দুসমূহকে ছক কাগজে স্থাপন কর এবং কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(a) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, (b) $\left(2a, \frac{\pi}{3}\right)$, (c) $(-3, 45°)$, (d) $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. একটি সমবাহু ত্রিভুজের কেন্দ্র মেরুবিন্দু O এবং একটি শীর্ষ প্রারম্ভিক রেখার উপর অবস্থিত। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য a হইলে উহার শীর্ষবিন্দুসমূহের মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

§ 1·4. **মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন** (Transformation of the origin and the axes) :

একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয় সম্বন্ধে ছাত্রছাত্রীদের অবহিত হওয়া প্রয়োজন। তোমরা নিশ্চয় লক্ষ্য করিয়াছ যে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের পূর্বে প্রথমেই অক্ষদ্বয় নির্দিষ্ট করা হইয়াছিল। মনে রাখিবে যে সমতলের যে কোন দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$কে অক্ষদ্বয় হিসাবে নির্দিষ্ট করা হয়। অর্থাৎ ইচ্ছামত যে-কোন দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখাকে অক্ষদ্বয় হিসাবে নির্দিষ্ট করা যায়। কিন্তু একবার অক্ষদ্বয় নির্দিষ্ট করা হইলে সমতলের যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্দিষ্ট হইবে। সুতরাং প্রয়োজন বা সুবিধানুসারে অক্ষদ্বয় নির্দিষ্ট করিতে হয়।

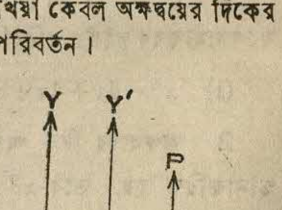
মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন :

কখন কখন প্রয়োজন হইলে মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়কে পরিবর্তিত অর্থাৎ স্থানান্তরিত করিতে হয়। ইহা তিন প্রকারের হইতে পারে। যথা—(1) অক্ষদ্বয়ের দিকের (direction) পরিবর্তন না করিয়া কেবল মূলবিন্দুর পরিবর্তন ; অথবা (2) মূলবিন্দু অপরিবর্তিত রাখিয়া কেবল অক্ষদ্বয়ের দিকের পরিবর্তন ; অথবা (3) মূলবিন্দু ও দিক উভয়ের পরিবর্তন।

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ মূল (আদি) অক্ষদ্বয় (এখানে প্রদত্ত মূলবিন্দু হইল O)।

মনে কর, ইহাদের সহিত সমান্তরাল পরিবর্তিত নূতন অক্ষদ্বয় হইল $\overrightarrow{O'X'}$ ও $\overrightarrow{O'Y'}$ (এখানে নূতন মূলবিন্দু হইল O′)।

মনে কর, মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নূতন মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y')। একই সমতলে



চিত্র 5

অবস্থিত P একটি বিন্দু। মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নূতন অক্ষদ্বয় অনুসারে উহার স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)। $\overrightarrow{OX}$-এর উপর PM ও ON লম্ব টান। PM যেন $\overrightarrow{O'X'}$কে M′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে $OM=x$, $MP=y$, $O'M'=x_1$, $M'P=y_1$, $ON=x'$ এবং $NO'=y'$.

অতএব, $x=OM=ON+NM=ON+O'M'=x'+x_1$;

এবং $y=MP=MM'+M'P=NO'+M'P=y'+y_1$;

অতএব দেখা যাইতেছে যে, x-এর স্থানে $x'+x_1$ এবং y-এর স্থানে $y'+y_1$ অর্থাৎ (x, y) স্থানাঙ্কের স্থানে $(x'+x_1, y'+y_1)$ বসাইলে আদি মূল বিন্দুটি (x', y') বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়।

উদাহরণ। $(-3, 2)$ বিন্দুগামী সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ে অক্ষদ্বয় পরিবর্তনের ফলে নিম্নের সমীকরণ দুইটির পরিবর্তিত আকার নির্ণয় কর :

(i) $3x+2y-7=0$ এবং (ii) $2x^2+y^2+4x-4y=0$.

সমাধান। $x=x'-3$ এবং $y=y'+2$ বসাইয়া পাই,

(i) $3(x'-3)+2(y'+2)-7=0$, বা, $3x'+2y'-12=0$.

এবং (ii) $2(x'-3)^2+(y'+2)^2+4(x'-3)-4(y'+2)=0$,

বা, $2(x'^2-6x'+9)+(y'^2+4y'+4)+4x'-12-4y'-8=0$,

বা, $2x'^2+y'^2-8x'+2=0$.

অনুশীলনী IC.

1. $(-2, 1)$ বিন্দুগামী সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ে অক্ষদ্বয় পরিবর্তনের ফলে সমীকরণ দুইটির পরিবর্তিত আকার নির্ণয় কর :

(i) $x^2-4y+4x+8=0$ এবং (ii) $2x^2+3y^2-4x+3y-8=0$

2. অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রাখিয়া যদি মূলবিন্দু $(3, 0)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়, তবে $x^2+y^2-2x+3y+4=0$ সমীকরণের পরিবর্তিত আকার নির্ণয় কর।

3. অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রাখিয়া যদি মূলবিন্দু $(-a+c, b)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়, তবে $(x+a)^2+(y-b)^2=c^2$ সমীকরণের পরিবর্তিত আকার নির্ণয় কর।

§ 1·5. রেখাংশের দৈর্ঘ্য বা দুইটি বিন্দুর দূরত্ব।

কোন দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় অথবা কোন রেখাংশের (line segment-এর) দৈর্ঘ্য নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(i) স্থানাঙ্কের সাহায্যে **মূলবিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।**

[চিত্র নং 1 দেখ এবং এখানে চিত্র অঙ্কিত কর।]

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ লম্ব অক্ষদ্বয় এবং P এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y)। মূলবিন্দু O হইতে P-এর দূরত্ব অর্থাৎ OP রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর PM লম্ব টান এবং OP যোগ কর।

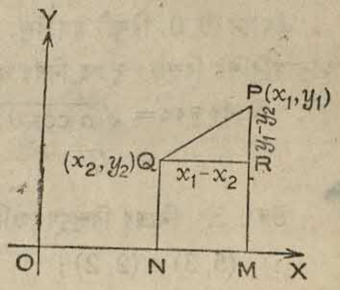
$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y), $\therefore$ $OM = x$ এবং $PM = y$.

$\therefore$ $OP^2 = OM^2 + PM^2 = x^2 + y^2$, অতএব, $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ii) স্থানাঙ্ক দ্বারা **দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়।**

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q দুইটি প্রদত্ত বিন্দু এবং বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)। PQ রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। [চিত্র 6 দেখ]।

P ও Q হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টান এবং Q হইতে PM-এর উপর QR লম্ব টান।



চিত্র 6

এক্ষণে, $OM = x_1$, $ON = x_2$. $PM = y_1$ এবং $QN = y_2$ হইল।

$\therefore$ $QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

এবং $PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$.

অতএব, PQR সমকোণী ত্রিভুজে

$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore$ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** (i) উপরের সূত্রটির অন্তর্গত x_1, y_1, x_2, y_2-এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন ঐ সূত্রটি সর্বদা সিদ্ধ। অতএব, P ও Q বিন্দু যে-কোন পাদে অবস্থিত হউক না কেন P ও Q-এর দূরত্ব নির্ণয়ে

ঐ সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে। (ii) মূলবিন্দু হইতে P-এর দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য এই সূত্রে $x_2=0$, $y_2=0$ ধরিলে নির্ণেয় দূরত্ব পাওয়া যাইবে, কারণ তখন Q বিন্দু মূলবিন্দু O-র সহিত মিলিত হইয়াছে বুঝিতে হইবে।]

উদা. 1. মূলবিন্দু হইতে নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর :

(a) $(-5, 12)$, (b) $(-4, -3)$, (c) $\{(m+n), (m-n)\}$.

(a) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0).

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}=\sqrt{169}=13.$

(b) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$

(c) এখানে প্রদত্ত বিন্দুর ভুজ $=m+n$ এবং কোটি $=m-n$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(m+n)^2+(m-n)^2}=\sqrt{2m^2+2n^2}$

$=\sqrt{2(m^2+n^2)}.$

উদা. 2. (0, 0) ও $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

এখানে (0, 0) বিন্দুটি মূলবিন্দু, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{a^2}\quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]=a.$

উদা. 3. নিম্নের বিন্দুযুগলগুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

(i) (5, 3) ও (2, 2) ; (ii) (3, −2), (−4, 3), ; এবং (iii) (ax, bx), $(by, -ay)$.

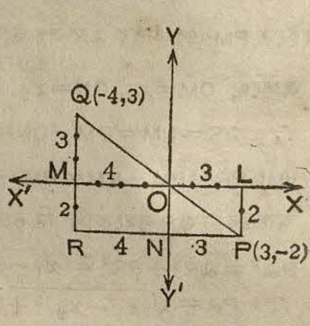
(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্বের সূত্র হইল

$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় দূরত্ব

$=\sqrt{(5-2)^2+(3-2)^2}$

$=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}.$



চিত্র 7

(ii) মনে কর, P (3, −2) ও Q (−4, 3) দুইটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর PL ও QM লম্ব টান। OY-এর উপর PN লম্ব টান। মনে কর বর্ধিত PN ও QM, R বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে PR = PN + NR = 3 + 4 = 7 এবং RQ = RM + QM = 2 + 3 = 5.

$\therefore$ PQ $= \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$.

[অন্য প্রকারে] নির্ণেয় দূরত্ব

$= \sqrt{\{3-(-4)\}^2+\{-2-(3)\}^2} = \sqrt{(7)^2+(-5)^2} = \sqrt{74}.$

(iii) এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(ax-by)^2+\{bx-(-ay)\}^2}$

$= \sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$

§ 1·6. পোলার স্থানাঙ্ক দ্বারা দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় :

দুইটি প্রদত্তবিন্দু P ও Q-এর পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2). P ও Q-এর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্রে O মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{OX}$ প্রারম্ভিক রেখা।

OP, OQ ও PQ যোগ কর।

$\therefore$ OP $= r_1$, OQ $= r_2$

$m\angle POX = \theta_1$ এবং $m\angle QOX = \theta_2$

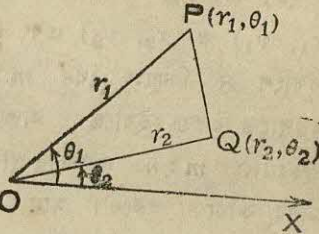
সুতরাং $m\angle POQ = \theta_1 - \theta_2$.

এক্ষণে POQ ত্রিভুজ হইতে পাই,

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos POQ$

$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore$ PQ $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$.



চিত্র 8

উদাহরণ। $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ ও $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

এখানে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{4^2+2^2-2.4.2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$= \sqrt{16+4-16\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{20-16.0}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

অনুশীলনী ID

1. মূলবিন্দু হইতে নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) (12, 5) ; (ii) (−3, 4) ; (iii) (−8, 12) ; (iv) (−6, 8) ;

(v) $\{(a+b), (a-b)\}$; (vi) $\left(a, \frac{\pi}{3}\right)$, (vii) $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$.

2. নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :—

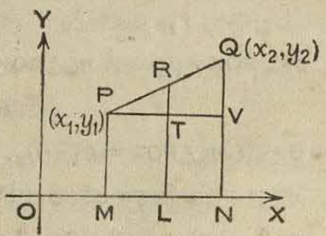
(*a*) (5, 2), (2, 3) ; (*b*) (26, 10), (2, 3) ; (*c*) (8, 12), (−4, 7) ; (*d*) (−3, −4), (5, −10) ; (*e*) $(m, 0), (0, n)$; (*f*) $(a+b, c-d), (a-b, c+d)$; (*g*) $(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, \cos\theta)$;

(*h*) $(a, -b), (-a, b)$; (*i*) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; (*j*) $\left(12, -\frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{\pi}{6}\right)$.

3. প্রমাণ কর যে $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ ও $(a\cos\phi,\ a\sin\phi)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $2a\sin\frac{\theta-\phi}{2}$.

§ 1·7. কোন নির্দিষ্ট রেখাংশকে কোন প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় :

(*a*) মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ লম্ব অক্ষদ্বয়, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং $\overline{PQ}$ রেখাংশ R বিন্দুতে যেন $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। অতএব, PR : RQ $= m : n$. R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।



চিত্র 9

(i) [চিত্র 9 দেখ]। মনে কর, R বিন্দু PQ-কে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে। $\overrightarrow{OX}$-এর উপর PM, QN ও RL লম্ব টান এবং $\overrightarrow{OX}$-এর সমান্তরাল $\overrightarrow{PV}$ রেখা টান, উহা যেন RL ও QN-কে যথাক্রমে T ও V বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, $\because\ \overline{RT} \parallel \overline{QV}$, $\therefore\ \frac{PT}{TV} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$,

কিন্তু $PT = ML = OL - OM = x - x_1$,

এবং $TV = LN = ON - OL = x_2 - x$;

$\therefore\ \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$, $\therefore\ x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$.

আবার, $\because\ \triangle PRT$ ও $\triangle PQV$ সদৃশ,

$\therefore\ \frac{RT}{QV} = \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n}\left[\because\ \frac{RQ}{PR} = \frac{n}{m},\ \therefore\ \frac{RQ+PR}{PR} = \frac{n+m}{m}.\right.$

$\left. \text{বা, } \frac{PQ}{PR} = \frac{n+m}{m},\ \therefore\ \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m+n}\right]$

কিন্তু RT = RL − TL = RL − PM = $y-y_1$,

এবং QV = QN − VN = QN − PM = (y_2-y_1),

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{RT}{QV}=\frac{m}{m+n},$$

বা, $y(m+n)=m(y_2-y_1)+y_1(m+n)=my_2+ny_1$,

$$\therefore \quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n},$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

(ii) যদি R বিন্দু $\overline{PQ}$ রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে (চিত্র নং 10 দেখ), তবে

PR : RQ = $m:n$ হইল।

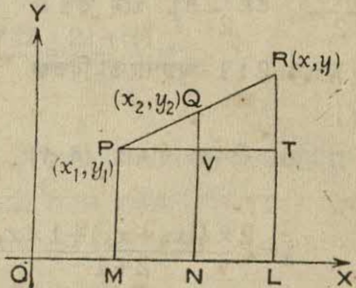
এখন, ∵ RT ∥ QV,

$$\therefore \quad \frac{PT}{TV}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n},$$

কিন্তু PT = ML = $x-x_1$,

এবং VT = NL = $x-x_2$,

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{m}{n},$$



চিত্র 10

বা, $x(m-n)=mx_2-nx_1$, $\therefore \quad x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$.

আবার △PRT ও △PQV সদৃশ বলিয়া $\frac{RT}{QV}=\frac{RP}{QP}=\frac{m}{m-n}$,

কিন্তু RT = $y-y_1$ এবং QV = y_2-y_1, $\therefore \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{m}{m-n}$,

বা, $y(m-n)=m(y_2-y_1)+y_1(m-n)=my_2-ny_1$,

$$\therefore \quad y=\frac{my_2-yn_1}{m-n}.$$

অতএব, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত: যদি R বিন্দু $\overline{PQ}$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ R যদি $\overline{PQ}$-এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m=n$ হইবে।

তখন $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{mx_2+mx_1}{m+m}=\frac{m(x_2+x_1)}{2m}=\frac{x_1+x_2}{2}$,

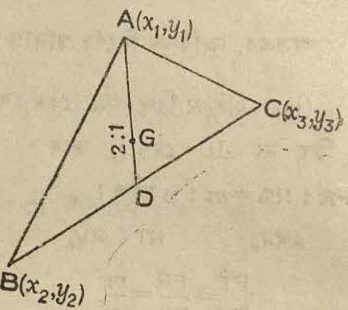
এবং $\frac{my_2+ny_1}{m+n}=\frac{my_2+my_1}{m+m}=\frac{m(y_2+y_1)}{2m}=\frac{y_2+y_1}{2}$ হইবে।

অতএব, তখন মধ্যবিন্দু Rএর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

(*b*) **ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়ঃ**

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).

$\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D লও এবং AD যোগ কর। D-র স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. মনে কর G বিন্দু $\overline{AD}$কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র 11

∴ G বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ হইলে,

$$\bar{x}=\frac{2\times\frac{1}{2}(x_2+x_3)+1\times x_1}{2+1}=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$$

এবং $$\bar{y}=\frac{2\times\frac{1}{2}(y_2+y_3)+1\times y_1}{2+1}=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে E ও F বিন্দু যথাক্রমে $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু হইলে $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$কে G$\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$ বিন্দু 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

সুতরাং G বিন্দুটি $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ প্রত্যেকটি সরলরেখায় অবস্থিত।
∴ $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$, G বিন্দুতে সমবিন্দু। কিন্তু $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$, ত্রিভুজটির মধ্যমা।

সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং উহাদের ছেদবিন্দুটি প্রত্যেক মধ্যমাকে সমত্রিখণ্ডিত করে। এই সমত্রিখণ্ডক বিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (centroid) বলে। সুতরাং ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইল $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$.

উদাহরণ 1. (7, −4) ও (−5, 6) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [H.S. 1964]

যেহেতু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

$\therefore$ এখানে মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7-5}{2}, \frac{-4+6}{2}\right)=\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right)=(1, 1)$.

উদা. 2. (8, 12) ও (−2, 7) বিন্দুযুগল সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x', y').

এক্ষণে, $x'=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$; $y'=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$

সূত্র অনুযায়ী, $x'=\frac{3\times -2+2\times 8}{3+2}=\frac{-6+16}{5}=2,$

$$y'=\frac{3\times 7+2\times 12}{2+3}=\frac{21+24}{5}=9$$

সুতরাং নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (2, 9).

উদা. 3. (4, 5) এবং (7, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 4 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x', y')

এক্ষণে, $x'=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$; $y'=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$.

সূত্র অনুযায়ী, $x'=\frac{4\times 7-3\times 4}{4-3}=\frac{28-12}{1}=16,$

$$y'=\frac{4\times -1-3\times 5}{4-3}=\frac{-4-15}{1}=-19,$$

সুতরাং নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (16, −19).

উদা. 4 (2, 3) এবং (5, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষদ্বারা কি অনুপাতে বিভক্ত হয়? [A. I. H. S. 1973]

মনে কর (2, 3) এবং (5, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষদ্বারা P বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5m+2n}{m+n}, \frac{-4m+3n}{m+n}\right)$

$\because$ P বিন্দু x-অক্ষের একটি বিন্দু, $\therefore$ উহার y-স্থানাঙ্ক শূন্য,

অর্থাৎ $\frac{-4m+3n}{m+n}=0$, বা, $-4m+3n=0$, $\therefore$ $4m=3n$

অর্থাৎ $\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$. সুতরাং নির্ণেয় অনুপাত 3 : 4.

উদা. 5. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (1, 7), (−4, 3) এবং (6, −1), ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y).

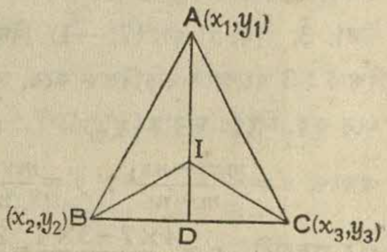
$$\therefore \quad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1-4+6}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{7+3-1}{3}=\frac{9}{3}=3.$$

সুতরাং নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (1, 3).

(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ও উহার বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a,b,c হইলে ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $A\equiv(x_1, y_1)$, $B\equiv(x_2, y_2)$ ও $C\equiv(x_3, y_3)$ এবং BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c.



চিত্র 11(A)

মনে কর, A কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\overleftrightarrow{AD}$, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর I-বিন্দুতে ADতে মিলিত হইয়াছে। এখানে I-বিন্দুই ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। I-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ ∠A র সমদ্বিখণ্ডক AD, $\therefore \quad \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$.

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c}\right)$.

আবার, ABD ত্রিভুজের ∠B-এর সমদ্বিখণ্ডক BI,

$\therefore \quad \frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}\cdots\cdots(i)$

এবং ACD ত্রিভুজের ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডক CI,

$\therefore \quad \frac{AI}{DI}=\frac{AC}{CD}\cdot\cdots(ii)$

(i) ও (ii) হইতে পাওয়া যায়,

$$\frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{c+b}{a}.$$

∴ I-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x=\frac{(c+b)\frac{(bx_2+cx_3)}{b+c}+ax_1}{c+b+a}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$$

$$\text{এবং } y=\frac{(c+b)\frac{(by_2+cy_3)}{b+c}+ay_1}{c+b+a}=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

অতএব, ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল

$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\ \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right).$$

উদাহরণ। একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(-1, -2)$, $(-1, 3)$ এবং $(11, -2)$; ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $A\equiv(-1; -2)$, $B\equiv(-1, 3)$ ও $C\equiv(11, -2)$

$$\therefore\ a=BC=\sqrt{(-1-11)^2+(3+2)^2}=\sqrt{144+25}$$
$$=\sqrt{169}=13 \text{ একক।}$$

$$b=CA=\sqrt{(11+1)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{144+0}=12 \text{ একক।}$$

$$c=AB=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{0+25}=5 \text{ একক।}$$

∴ অন্তঃকেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল

$$\left(\frac{13\times-1+12\times-1+5\times11}{13+12+5},\ \frac{13\times-2+12\times3+5\times-2}{13+12+5}\right)$$

বা, $(1, 0)$,

অনুশীলনী IE

1. নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগল-সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

(i) $(5, 0)$ এবং $(0, 7)$; (ii) $(-2, -4)$ এবং $(6, 2)$; (iii) $(4, -2)$ এবং $(3, -5)$.

2. নিম্নের বিন্দুযুগল-সংযোজক সরলরেখাংশ যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

(i) 6, −10) এবং (−4, 14) ; 3 : 4 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।

(ii) (3, 5) এবং (−2, −7) ; 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।

(iii) (−1, 2) এবং (4, −5) ; 2 : 3 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।

(iv) (3, 2) এবং (6, 5) ; 2 : 1 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।

3. (3, −4), (4, 7) এবং (6, 1) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

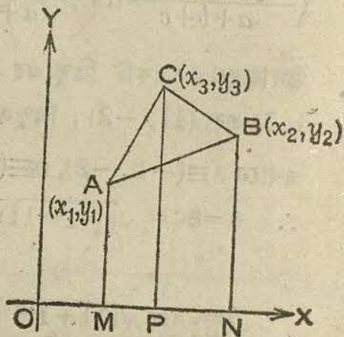
4. (−2, 3) এবং (3, −1) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর এবং (−2, 3)এর নিকটতর উহার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

§ 1·8. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B ও C-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

x-অক্ষের উপর AM, BN ও CP লম্ব টান।

এক্ষণে, $m\triangle ABC = m$ (ট্রাপিজিয়ম AMPC) $+ m$ (ট্রাপিজিয়ম PNBC) $- m$ (ট্রাপিজিয়ম AMNB).



চিত্র 12

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ উচ্চতা $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি,

$\therefore$ $\triangle ABC$-র ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}MP(AM+PC)+\frac{1}{2}PN(PC+BN)-\frac{1}{2}MN(AM+BN)$

$=\frac{1}{2}\{(x_3-x_1)(y_1+y_3)+(x_2-x_3)(y_3+y_2)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)\}$

$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$

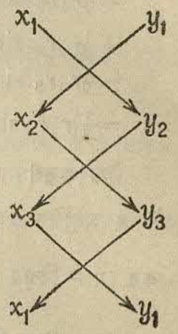
$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$.

[**দ্রষ্টব্য :** (a) মূলবিন্দু O সম্পর্কে প্রদত্ত ত্রিভুজের অবস্থান পাঁচ প্রকারের হইতে পারে। যথা, মূলবিন্দু O (1) ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ; (2) কোন কৌণিক বিন্দুতে অবস্থিত ; (3) কোন বাহুর উপর অবস্থিত, কিন্তু কৌণিক বিন্দুতে নহে ; (4) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের মধ্যে

অবস্থিত ; (5) ত্রিভুজটির বহির্ভূত এবং উহার কোন একটি কোণের বিপ্রতীপ কোণের বাহুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইতে পারে।

(*b*) উপরের সূত্রটি মনে রাখার জন্য নিম্নের নিয়মটি জানিয়া রাখ।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির ভুজগুলি এক স্তম্ভে নীচে নীচে লিখ এবং কোটিগুলি পাশাপাশি আর এক স্তম্ভে নীচে নীচে লিখ। সর্বশেষে প্রথম শীর্ষের স্থানাঙ্কগুলি আবার লিখ (পার্শ্বে চিত্র দেখ)। তৎপরে প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক ভুজকে পরবর্তী সারির কোটির সহিত গুণ কর (তীর-নির্দিষ্টভাবে) আবার ঐরূপে প্রত্যেক কোটিকে পরবর্তী সারির ভুজের সহিত গুণ কর। এইবার প্রথম গুণফলগুলির সমষ্টি হইতে দ্বিতীয় গুণফলগুলির সমষ্টি বিয়োগ কর ; এই বিয়োগফলের অর্ধেক হইবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল।

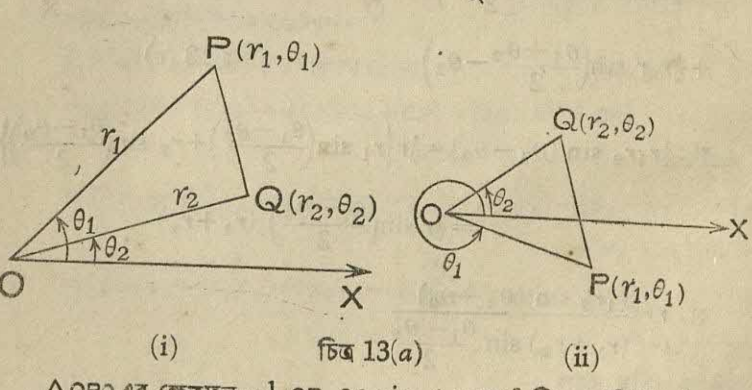


চিত্র 13

এইরূপে চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ প্রভৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

(*c*) প্রচলিত প্রথা (convention) এই যে, কোন সামন্তলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীতক্রমে লইলে উহার ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হয় এবং ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইক্রমে লইলে ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়।]

§ 1·9. (i) P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2) হইলে, OPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (O মূলবিন্দু) :—



(i) চিত্র 13(*a*) (ii)

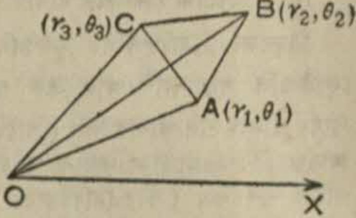
ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ OP. OQ $\sin \angle$QOP [ত্রিকোণমিতি হইতে]

$=\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$ [চিত্র i),

বা $=\frac{1}{2} r_1 . r_2 \sin\{2\pi-(\theta_1-\theta_2)\}$ [চিত্র (ii)]

সুতরাং ΔOPR $=\pm\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$.

(ii) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) ও (r_3, θ_3) হইলে $\triangle$ABC-র ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

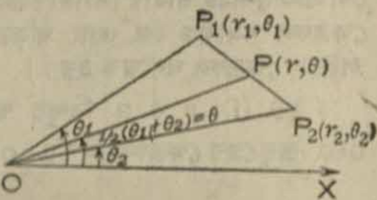


চিত্র 13 (*b*)

$$m\triangle ABC = m\triangle OAB + m\triangle OBC - m\triangle OAC.$$
$$= \tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) + \tfrac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2) - \tfrac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_3-\theta_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3)\}.$$

উদাহরণ। $P_1(r_1, \theta_1)$ ও $P_2(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু P-এর ভেক্টর কোণের পরিমাণ $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$. প্রমাণ কর যে P বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\dfrac{2r_1r_2\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}{r_1+r_2}$.

মনে কর P বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টরের দৈর্ঘ্য r. চিত্র হইতে



চিত্র 13 (*c*)

$$m\triangle P_1OP_2 = m\triangle P_1OP + m\triangle P_2OP,$$

বা, $\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)$
$$= \tfrac{1}{2}r_1r\sin\left(\theta_1-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \tfrac{1}{2}r_2r\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_2\right)$$

বা, $\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)=\frac{1}{2}r\left\{r_1\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)+r_2\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right\}$

$$=\tfrac{1}{2}r\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)(r_1+r_2)$$

বা, $r=\dfrac{r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)}{(r_1+r_2)\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}$

$$=\frac{2r_1r_2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{(r_1+r_2)\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}=\frac{2r_1r_2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{r_1+r_2}.$$

§ 1·10. **তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার শর্ত** (Condition for collinearity of three points)।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র হইতে তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার শর্ত পাওয়া যায়। যদি তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য (0) হয়, তবে বিন্দু তিনটি সমরেখ (collinear) হইয়া থাকে। মনে কর, বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)। অতএব নির্ণেয় শর্ত হইল,
$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0.$

§ 1·11. **শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।**

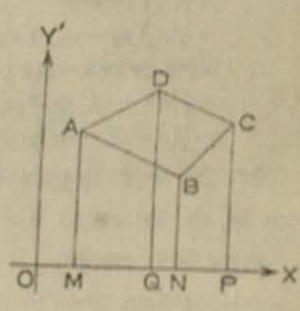
(To find the area of a quadrilateral whose vertices are given).

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ও (x_4, y_4)।

এই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

x-অক্ষের উপর AM, BN, CP, DQ লম্ব টান।

এখন, চতুর্ভুজ ABCD = ট্রাপিজিয়ম AMQD + ট্রাপিজিয়ম DQPC − ট্রাপিজিয়ম AMNB − ট্রাপিজিয়ম BNPC



চিত্র 14

$$=\tfrac{1}{2}MQ(AM+DQ)+\tfrac{1}{2}QP(DQ+CP)-\tfrac{1}{2}MN(AM+BN)-\tfrac{1}{2}NP(BN+CP)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_4-x_1)(y_1+y_4)+(x_3-x_4)(y_4+y_3)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)-(x_3-x_2)(y_2+y_3)\}$$

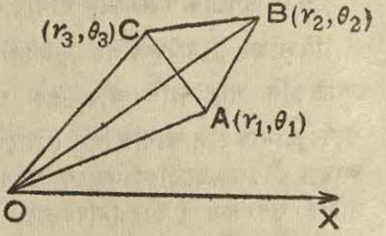
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}$$

[সরল করিয়া পাওয়া যায়]

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে n-ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল হইবে

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)\}.$$

(ii) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) ও (r_3, θ_3) হইলে $\triangle$ABCর ক্ষেত্রফল নির্ণয়:



চিত্র 13 (b)

$m\triangle ABC = m\triangle OAB + m\triangle OBC - m\triangle OAC.$

$= \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1).$

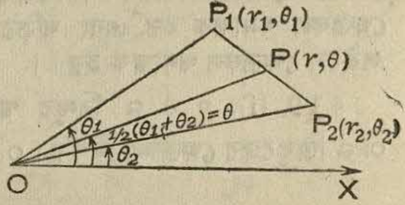
$+ \frac{1}{2}r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)$

$- \frac{1}{2}r_1r_3 \sin(\theta_3 - \theta_1)$

$= \frac{1}{2}\{r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_1r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)\}.$

উদাহরণ। $P_1(r_1, \theta_1)$ ও $P_2(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু P-এর ভেক্টর কোণের পরিমাণ $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$. প্রমাণ কর যে P বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\dfrac{2r_1r_2 \cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{r_1 + r_2}$.

মনে কর P বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টরের দৈর্ঘ্য r. চিত্র হইতে



চিত্র 13 (c)

$m\triangle P_1OP_2 = m\triangle P_1OP + m\triangle P_2OP,$

বা, $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$= \frac{1}{2}r_1r\sin\left(\theta_1 - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$+ \frac{1}{2}r_2r \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta_2\right)$

বা, $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2}r\left\{r_1 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + r_2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}r \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)(r_1 + r_2)$$

বা, $r = \dfrac{r_1r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{(r_1 + r_2)\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}$

$$= \frac{2r_1r_2 \sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{(r_1 + r_2)\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} = \frac{2r_1r_2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)}{r_1 + r_2}.$$

§ 1·10. তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার শর্ত (Condition for collinearity of three points)।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র হইতে তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার শর্ত পাওয়া যায়। যদি তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য (0) হয়, তবে বিন্দু তিনটি সমরেখ (collinear) হইয়া থাকে। মনে কর, বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3)। অতএব নির্ণেয় শর্ত হইল, $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$.

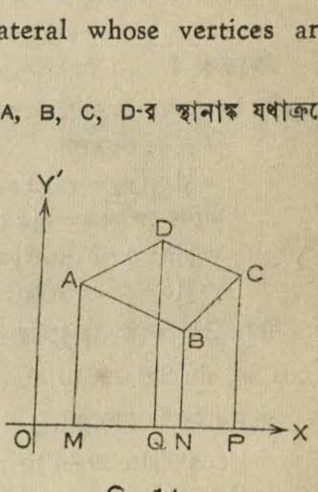
§ 1·11. শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইতে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

(To find the area of a quadrilateral whose vertices are given).

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ও (x_4, y_4)।

এই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

x-অক্ষের উপর AM, BN, CP, DQ লম্ব টান।



চিত্র 14

এখন, চতুর্ভুজ ABCD = ট্রাপিজিয়ম AMQD + ট্রাপিজিয়ম DQPC − ট্রাপিজিয়ম AMNB − ট্রাপিজিয়ম BNPC

$$=\tfrac{1}{2}MQ(AM+DQ)+\tfrac{1}{2}QP(DQ+CP)-\tfrac{1}{2}MN(AM+BN)-\tfrac{1}{2}NP(BN+CP)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_4-x_1)(y_1+y_4)+(x_3-x_4)(y_4+y_3)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)-(x_3-x_2)(y_2+y_3)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}$$

[সরল করিয়া পাওয়া যায়]

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে n-ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n) হইলে উহার ক্ষেত্রফল হইবে

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)\}.$$

[দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যেও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। যে কোন কর্ণ অঙ্কিত করিলে চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়। ঐ দুই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি লইলেই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে।

এক্ষেত্রে AC যুক্ত কর।

এক্ষণে চতুর্ভুজ ABCD $=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{x_1(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2+x_1y_3-x_1y_4$$
$$+x_3y_4-x_3y_1+x_4y_1-x_4y_3\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+(x_4y_1-x_1y_4)\}]$$

উদাহরণ 1. (a, bc), (b, ca) এবং (c, ab) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\},$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\tfrac{1}{2}\{a(ca-ab)+b(ab-bc)+c(bc-ca)\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ এবং $(0, 0)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল,

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\theta(\sin 3\theta-0)+\cos 3\theta(0-\sin\theta)+0(\sin\theta-\sin 3\theta)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta+0\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(3\theta-\theta)=\tfrac{1}{2}\sin 2\theta.$$

উদা. 3. একটি চতুর্ভুজের পর পর কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (1, 2), (3, 4), (5, −1) ও (4, −3) ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,\ x_4=4$

এবং $y_1=2,\ y_2=4,\ y_3=-1,\ y_4=-3.$

$\therefore$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}\{(1\times4-3\times2)+(3\times-1-5\times4)+(5\times-3-4\times-1)$$
$$+(4\times2-1\times-3)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(-2-23-11+11)=-12\tfrac{1}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=12\tfrac{1}{2}$ বর্গ একক।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $(a, 0), (0, b)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে যদি $a+b=ab$ হয়।

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে, যদি ঐ বিন্দু তিনটিকে শীর্ষবিন্দু করিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

এক্ষণে ঐরূপ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$

$=\frac{1}{2}\{a\times(b-1)+0(1-0)+1(0-b)\}$

$=\frac{1}{2}(ab-a-b)$.

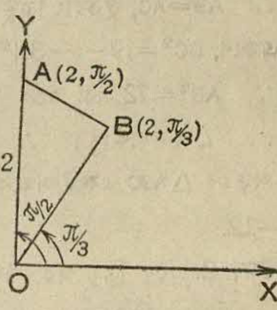
অতএব, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি

$\frac{1}{2}(ab-a-b)=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $ab-a-b=0$ হয়;

অর্থাৎ যদি $a+b=ab$ হয়।

উদা. 5. $(0, 0), \left(2, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির মেরু-স্থানাঙ্ক (Polar co-ordinates).
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

মনে কর, O, A, B যথাক্রমে প্রদত্ত বিন্দু তিনটিকে প্রকাশ করে।
$\therefore$ OA $=$ OB $=2$ এবং $m\angle$AOB $=m\angle$AOX $-\, m\angle$XOB $=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ $=\frac{\pi}{6}$. $\therefore$ $m\triangle$AOB বা $\triangle$AOB-র ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.\ 2.\ 2\sin\frac{\pi}{6}=1$ বর্গ একক।



চিত্র 14

অনুশীলনী 1F

1. নিম্নের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(i) $(2, -2), (4, 2)$ এবং $(-1, 3)$ (ii) $(3, 5), (-2, 4)$ এবং $(5, 2)$

(iii) $(8, 9), (2, 6)$ এবং $(9, 2)$ (iv) $(1, 2), (3, 0)$ এবং মূলবিন্দু।

(v) $(\cos\theta, \sin\theta), (\cos 2\theta, \sin 2\theta), (0, 0)$

(vi) $(a, b+c), (b, c+a), (c, a+b)$ [C. U. 1958]।

(vii) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right), \left(10, \frac{2\pi}{3}\right), \left(15, \frac{\pi}{2}\right)$ [মেরু-স্থানাঙ্ক]

(viii) $\left(-r, \frac{\pi}{6}\right), \left(r, \frac{\pi}{2}\right), \left(-2r, \frac{2\pi}{3}\right)$ [মেরু-স্থানাঙ্ক]

2. প্রমাণ কর যে, $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ এবং $(a, 2b)$ বিন্দুগুলি সমরেখ।

[C. U. (B. Sc.) '24]

3. $(5, 1)$, $(x, 3)$ ও $(2, 7)$ বিন্দুগুলির সংযোজক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক। x নির্ণয় কর। [H. S. 1967]

4. $(0, -4)$, $(-1, y)$ এবং $(3, 2)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, y-এর মান নির্ণয় কর।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. প্রমাণ কর যে $A(3, 1)$, $B(9, 7)$ ও $C(-3, 7)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

এখানে $AB^2=(3-9)^2+(1-7)^2=(-6)^2+(-6)^2=72.$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

আবার, $AC^2=\{3-(-3)\}^2+(1-7)^2=72$, $\therefore AC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$,

$\therefore$ $AB=AC$, সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

এক্ষণে, $BC^2=\{9-(-3)\}^2+(7-7)^2=(12)^2=144.$

$\because$ $AB^2=72$ এবং $AC^2=72$, $\therefore$ $AB^2+AC^2=144=BC^2$,

$\therefore$ $\angle A$ সমকোণ ; $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব $\triangle ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, এবং উহার অতিভুজ $BC=12$.

উদা. 2. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(2, -2)$, $(4, 2)$ ও $(-1, 3)$ তাহার পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর, A, B, C যথাক্রমে প্রদত্ত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(2, -2)$, $(4, 2)$ ও $(-1, 3)$.

মনে কর, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র S-এর স্থানাঙ্ক (x, y).

$\because$ $SA=SB=SC$ (পরিব্যাসার্ধ বলিয়া), $\therefore$ $SA^2=SB^2=SC^2$.

এক্ষণে, $SA^2=(x-2)^2+(y+2)^2$, $SB^2=(x-4)^2+(y-2)^2$ এবং $SC^2=(x+1)^2+(y-3)^2$,

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$

বা, $-4x+4y+8=-8x-4y+20=2x-6y+10$, ইহা হইতে সমাধান করিয়া পাই, $x=\frac{13}{11}$, $y=\frac{10}{11}$.

$\therefore$ পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{13}{11}, \frac{10}{11})$.

উদা. 3. দেখাও যে (4, 3) ও (8, 6) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যায়।

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)। মূলবিন্দু ও প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় সমরেখ হইলে ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার শর্ত হইল এই যে,

$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$ হইতে হইবে।

এখানে বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (0, 0), (4, 3) ও (8, 6);

সুতরাং এখানে $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)$

$$=(0\times3-0\times4)+(4\times6-8\times3)+(8\times0-0\times6)$$

$$=0+(24-24)+0=0.$$

∴ ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ, অর্থাৎ (4, 3) ও (8, 6) বিন্দুগামী সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়াও যাইবে।

[**বিকল্প প্রমাণ**]: মনে কর, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 3) ও (8, 6)। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0).

একণে, $OP=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5,$

$OQ=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10,$

এবং $PQ=\sqrt{(4-8)^2+(3-6)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

$OP+PQ=10=OQ.$

অতএব, O, P, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[**দ্রষ্টব্য :** OP+PQ=OQ হইলে, O, P, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। কারণ, যদি তাহা না হয়, তবে OPQ একটি ত্রিভুজ হইবে এবং ঐ ত্রিভুজের দুইটি বাহুর (OP ও PQ-এর) সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান হইবে কিন্তু তাহা অসম্ভব।]

উদা. 4. (3, 2) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখা (5, 4) বিন্দুতে কি অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে?

মনে কর, নির্ণেয় অনুপাত $=m:n$.

∴ (5, 4) বিন্দুটি (3, 2) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাকে $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে,

∴ $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ এই সূত্রটি হইতে পাই $5=\dfrac{m\times6+n\times3}{m+n},$

বা, $6m+3n=5m+5n$, বা, $m=2n$, $\therefore \frac{m}{n}=\frac{2}{1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=2:1$.

[**দ্রষ্টব্য :** (i) এখানে $\frac{m}{n}$ যদি ঋণাত্মক হইত অর্থাৎ যদি $\frac{m}{n}=-\frac{2}{1}$ হইত তবে বলিতে হইত যে, $2:1$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিয়াছে।

(ii) এখানে $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ হইতেও একই অনুপাত পাওয়া যাইত। নতুবা $(5, 4)$ বিন্দু $(3, 2)$ ও $(6, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত হইবে না।]

উদা. 5. (x, y) বিন্দুটি $(2, 3)$ ও $(-1, 2)$ বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী হইলে $3x+y=4$ হইবে।

(x, y) ও $(2, 3)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$;

এবং (x, y) ও $(-1, 2)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$\because$ এই দূরত্ব দুইটি সমান (স্বীকার),

$\therefore \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

বা, $(x+1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$,

বা, $x^2+2x+y^2-4y+5=x^2-4x+y^2-6y+13$,

বা, $6x+2y=8$, $\therefore 3x+y=4$.

উদা. 6. $(3, 5)$ ও $(x, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্বের বর্গ 17 ; x নির্ণয় কর।

$(3, 5)$ ও $(x, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(3-x)^2+(5-4)^2}$.

সুতরাং ঐ দূরত্বের বর্গ $=(3-x)^2+(5-4)^2=(3-x)^2 1+$,

$\therefore$ শর্ত হইতে $(3-x)^2+1=17$, বা $(3-x)^2=16$, বা, $3-x=\pm4$,

$\therefore x=3\pm4=-1$ বা 7. $\therefore$ নির্ণেয় ভুজ $=-1$ বা 7.

উদা. 7. কোন ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(2, -2)$, $(4, 2)$ ও $(-1, 3)$; B হইতে AC-র উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) হইলে সূত্রানুসারে উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$.

$\therefore$ এখানে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$=\frac{1}{2}\{2(2-3)+4(3+2)-1(-2-2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(-2+20+4)=11 \text{ বর্গ একক।}$$

আবার, যদি B হইতে AC-র উপর লম্বটি p একক দীর্ঘ হয়, তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হয় $\frac{1}{2}p.$ AC.

এখানে $AC=\sqrt{(2+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$ দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore\ \frac{1}{2}p.\sqrt{34}=11,\ \therefore\ p=\frac{22}{\sqrt{34}}=\frac{22\sqrt{34}}{34}=\frac{11}{17}\sqrt{34}$ দৈর্ঘ্য একক।

উদা. 8. মূলবিন্দু একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত এবং উহার দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2) ও (−3, 2), তৃতীয় শীর্ষ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [A. I. H. S. 1971]

মনে কর, A(3, 2) এবং B(−3, 2) দুইটি শীর্ষবিন্দু এবং $C(x, y)$ তৃতীয় শীর্ষবিন্দু।

এক্ষণে, $AB=\sqrt{(3+3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{36}=6.$

$$BC=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+6x+9+y^2-4y+4}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13},$$
$$AC=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2-6x+9+y^2-4y+4}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13},$$

যেহেতু ত্রিভুজটি সমবাহু, $\therefore$ AB = BC = AC. $\because$ BC = AC,

$\therefore\ \sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}=\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13},$

বা, $x^2+y^2+6x-4y+13=x^2+y^2-6x-4y+13.$

বা, $12x=0.\ \therefore\ x=0.$

যেহেতু AB = BC, $\therefore\ \sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}=6$

বা, $x^2+y^2+6x-4y+13=36$

বা, $y^2-4y+13=36$ [$x=0$ বসাইয়া]

বা, $y^2-4y-23=0$

$\therefore\ y=\frac{4\pm\sqrt{16+92}}{2}=2\pm3\sqrt{3}.$

এক্ষণে, $y=2+3\sqrt{3}$ হইলে তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি হয় $(0, 2+3\sqrt{3})$ এবং মূলবিন্দু ত্রিভুজটির বাহিরে থাকে।

সুতরাং তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(0, 2-3\sqrt{3})$.

উদা. 9. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(3, 0), B(0, 6) এবং C(6, 9). একটি সরলরেখা $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$কে 1 : 2 অনুপাতে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে বিভক্ত করে। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$m\triangle ABC = 9m\triangle ADE.$ [A. I. H. S. '72]

যেহেতু $\overline{AB}$, D বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়,

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x=\dfrac{0+6}{1+2}=2$; $y=\dfrac{6+0}{1+2}=2.$

আবার যেহেতু $\overline{AC}$, E বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়,

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x=\dfrac{6+6}{1+2}=4$; $y=\dfrac{9+0}{1+2}=3.$

এক্ষণে, $m\triangle ABC=\frac{1}{2}[3(6-9)+0(9-0)+6(0-6)]$
$=\frac{1}{2}[-9-36]=-\frac{45}{2}$ অর্থাৎ $\frac{45}{2}$ বর্গ একক।

আবার $m\triangle ADE=\frac{1}{2}[3(2-3)+2(3-0)+4(0-2)]$
$=\frac{1}{2}[-3+6-8]=-\frac{5}{2}$ অর্থাৎ $\frac{5}{2}$ বর্গ একক।

$\therefore$ $\dfrac{m\triangle ABC}{m\triangle ADE}=\dfrac{\frac{45}{2}\text{ বর্গ একক}}{\frac{5}{2}\text{ বর্গ একক}}=9.$

$\therefore$ $m\triangle ABC=9m\triangle ADE.$

উদা. 10. (*a*) দেখাও যে, (5, 2), (3, 7), (−1, 4) এবং (1, −1) একটি সামান্তরিকের পর পর চারিটি কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

মনে কর, A, B, C, D বিন্দু চতুষ্টয়ের স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে (5, 2), (3, 7), (−1, 4) এবং (1, −1)। যদি AC-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k) হয়, তবে $h=\frac{5-1}{2}=2$ এবং $k=\frac{2+4}{2}=3.$

আবার BD-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h_1, k_1) ধরিলে, $h_1=\frac{3+1}{2}=2$ এবং $k_1=\frac{7-1}{2}=3.$

$\therefore$ AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই বিন্দু। অর্থাৎ, A, B, C, D বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে যে চতুর্ভুজ পাওয়া যায়, তাহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইতেছে। অতএব, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

[**লক্ষ্য কর :** কোন চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয় যখন উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। এই জ্যামিতিক শর্ত লইয়া উপরের প্রশ্ন প্রমাণকরা হইল।]

(*b*) প্রমাণ কর যে A(3, 3), B(5, 5), C(6, 4), এবং D(4, 2) বিন্দুগুলিকে ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয়।

এখানে, $AB^2=(3-5)^2+(3-5)^2=8,$

এবং $CD^2=(6-4)^2+(4-2)^2=8,$ $\therefore$ AB = CD.

আবার, $BC^2=(5-6)^2+(5-4)^2=2$,

এবং $DA^2=(4-3)^2+(2-3)^2=2$, $\therefore$ $BC=DA$.

এক্ষণে, $AC^2=(3-6)^2+(3-4)^2=10$,

এবং $BD^2=(5-4)^2+(5-2)^2=10$, $\therefore$ $AC=BD$.

অতএব দেখা যাইতেছে, ABCD চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলি সমান ও কর্ণদ্বয়ও সমান। অতএব, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

[**দ্রষ্টব্য**ঃ বর্গক্ষেত্র প্রমাণ করিবার সময়, ক্ষেত্রটির বাহুগুলি পরস্পর সমান ও কর্ণদ্বয় সমান দেখাইবে এবং রম্বস প্রমাণ করিবার সময় বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কর্ণ দুইটি সমান নহে দেখাইবে।]

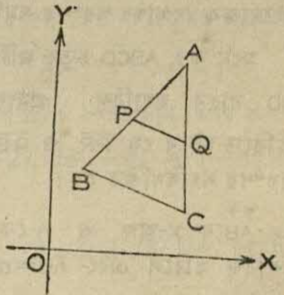
উদা. 11. প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ও (x_3, y_3) এবং P, Q যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $PQ=\frac{1}{2}BC$.

P-র স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$;

Q-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$.



চিত্র 15

$$\therefore \quad PQ=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_3}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}(x_2-x_3)^2+\tfrac{1}{4}(y_2-y_3)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}.$$

আবার, $BC=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$. $\therefore$ $PQ=\frac{1}{2}BC$.

উদা. 12. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই

বাহুর বর্গের সমষ্টি, উহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের বর্গ ও ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার বর্গের সমষ্টির দ্বিগুণ। [য়্যাপোলোনিয়াস উপপাদ্য]

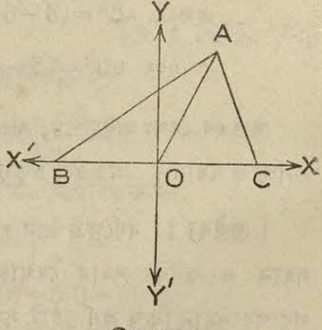
ত্রিভুজ ABC-র একটি মধ্যমা $\overline{AO}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2)$.

মনে কর, $BC=2l$. এখন BCকে x-অক্ষ ও উহার মধ্যবিন্দু Oকে মূলবিন্দু ধরিলে B ও C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-l, 0)$ এবং $(l, 0)$ হয়।

মনে কর A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).



চিত্র 16

$\therefore \quad AB^2=(\alpha+l)^2+\beta^2$.

$AC^2=(\alpha-l)^2+\beta^2, \quad AO^2=\alpha^2+\beta^2$ এবং $BO^2=(-l)^2=l^2$.

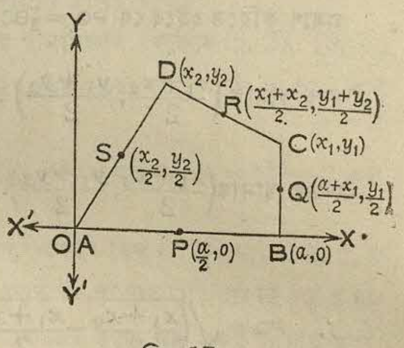
অতএব, $AB^2+AC^2=(\alpha+l)^2+\beta^2+(\alpha-l)^2+\beta^2$

$=2(\alpha^2+l^2)+2\beta^2=2(\alpha^2+\beta^2)+2l^2=2(AO^2+BO^2)$.

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C. U. 1958]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজটির P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{PR}$ ও $\overline{QS}$ পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

$\overleftrightarrow{AB}$কে X-অক্ষ ও A-কে মূলবিন্দু ধরিলে এবং $AB=a$ মনে করিলে A-র স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ B-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ হইবে। মনে কর, C ও D-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2).



চিত্র 17

এক্ষণে P, Q, R, S-এর স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে হইল

$$\left(\frac{a}{2}, 0\right), \left(\frac{a+x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right), \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ এবং } \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right).$$

অতএব, PR-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{2}\right) \text{ বা } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right).$$

আবার QS-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\frac{a+x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}}{2}\right) \text{ বা, } \left(\frac{a+x_1+x_2}{4}, \frac{y_1+y_2}{4}\right).$$

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, PR ও QS-এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক একই; সুতরাং উহারা একই বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অতএব, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

প্রশ্নমালা 1

1. P বিন্দুটি A(1, 2) ও B(4, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে বিভক্ত করায় AP=2PB হইয়াছে, P-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. (i). $(-2, 2)$ বিন্দুতে $(-4, 6)$ ও $(\frac{1}{2}, -3)$ সংযোজক সরলরেখা কি অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে?

(ii). (1, 3) বিন্দুটি (4, 6) ও (3, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?

3. $(x, 7)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 5 হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।

4. $(11, 3)$ ও $(3, y)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 10 হইলে দ্বিতীয় বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর।

5. $(12, 5)$ ও $(x, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের বর্গ 29; x-এর মান নির্ণয় কর।

6. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $(-4, -2)$, $(3, -9)$ ও $(-5, 3)$ তাহার পরিকেন্দ্র ও পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

7. প্রমাণ কর যে, $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

8. প্রমাণ কর যে, A $(3, 3)$, B $(-3, 5)$, C $(-5, 3)$ বিন্দু তিনটিকে ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। উহার ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [H.S. (Comp.) '64]

9. প্রমাণ কর যে $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ ও $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দুগুলি একটি $2a$ বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। [C.U. (B.Sc.) '52]

10. প্রমাণ কর যে, $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-1, 7)$ এবং $(-3, 6)$ বিন্দু চারিটি একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। [H.S. '65]

11. প্রমাণ কর যে, $(3, 4)$, $(-1, 7)$ এবং $(-3, -4)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

12. প্রমাণ কর যে. $(-7, 3)$ ও $(14, -6)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী। [H.S. '62 Comp]

13. প্রমাণ কর যে, $(1, 5)$, $(3, 14)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। [C. U.]

14. প্রমাণ কর যে, $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ এবং $(a, 2b)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

15. প্রমাণ কর যে, (x, y)-বিন্দু $(4, 7)$ ও $(-5, 8)$ বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী হইলে $9x-y+12=0$.

16. প্রমাণ কর যে, (x, y)-বিন্দু $(2, 4)$ ও $(-3, 3)$ বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী হইলে $5x+y=1$.

17. (x, y)-বিন্দুটি $(5, 0)$, $(0, 5)$ ও $(3, 4)$ বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী হইলে প্রমাণ কর যে, $x=0$, $y=0$.

18. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(3, 4)$, $(-4, 3)$ ও $(8, 6)$ তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে অথবা অন্য কোনও প্রকারে A হইতে $\overline{BC}$-র লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

19. $(-2, 3)$, $(2, 1)$ ও $(5, 3)$ হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

20. $(5, 4)$, $(3, 6)$ এবং $(1, 4)$ বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

21. কি শর্তে (x,y)-বিন্দুটি $(2,3)$ ও $(-1,2)$ বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়?

22. $(3, -4)$, $(4, 7)$ এবং $(2, 9)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

23. $(2, 0)$, $(4, 4)$ ও $(6, 2)$ যে ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু তাহার মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

24. প্রমাণ কর যে $(a-b, b-c)$, $(-a, -b)$ ও (b, c) যে ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু, মূল বিন্দুটি তাহার ভরকেন্দ্র।

25. প্রমাণ কর যে $(7, 3)$, $(9, 6)$, $(10, 12)$ ও $(8, 9)$ বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে একটি সামান্তরিক গঠিত হইবে।

26. প্রমাণ কর যে, পর পর $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(-5, 7)$ ও $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয়। [H.S. (Comp.) '63]

27. প্রমাণ কর যে, পর পর A $(2, 5)$, B $(5, 9)$, C $(9, 12)$ ও D $(6, 8)$ বিন্দুগুলির যোগে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি রম্বস।

28. দেখাও যে P $(-2, -7)$, Q $(2, -4)$, R $(-1, 0)$ ও S $(-5, -3)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের চারিটি কৌণিক বিন্দু।

29. যদি (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) ও (α_4, β_4) বিন্দুগুলির যোগে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি সামান্তরিক হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$ এবং $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$.

30. A $(b \cos\alpha, b \sin\alpha)$ ও B $(a \cos\beta, a \sin\beta)$ সংযোজক রেখাকে M (x, y) বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় AM ও BM-এর অনুপাত $b : a$ হইল। প্রমাণ কর যে $x+y \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=0$. [C. U. 1955 Compl.]

31. A, B, C ও P বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ ও (x, y) ; প্রমাণ কর যে, $\frac{m\triangle \text{PBC}}{m\triangle \text{ABC}}=\frac{x+y-2}{7}$. [C. U.]

32. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ ও $(x, 3x)$ এবং $\frac{m\triangle \text{DBC}}{m\triangle \text{ABC}}=\frac{1}{2}$; x-এর মান নির্ণয় কর।

33. স্থানাঙ্ক সাহায্যে প্রমাণ কর :—

(*a*) G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হইলে,

(i) $3(\text{GA}^2+\text{GB}^2+\text{GC}^2)=\text{BC}^2+\text{CA}^2+\text{AB}^2$

(ii) $m\triangle \text{GBC}=\frac{1}{3}m\triangle \text{ABC}$.

(*b*) D, E, F যথাক্রমে $\triangle$ABC-এর BC, AC, AB বাহুর মধ্যবিন্দু ; প্রমাণ কর $m\triangle \text{ABC}=4m\triangle \text{DEF}$.

(*c*) প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের সংলগ্ন বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

34. যদি D ও E, $\triangle$ABC-র AB ও AC বাহুদ্বয়কে $1 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে $m\triangle \text{ABC}=9m\triangle \text{ADE}$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

সঞ্চারপথ ও উহার সমীকরণ (Locus and its equation)

§ 2.1. সঞ্চারপথ ও তাহার সমীকরণ (Locus and its Equation)

তোমরা জান যে, একটি বিন্দু যদি এক বা একাধিক শর্ত পালন করিয়া গতিশীল হয়, তবে তাহার গতিপথকে তাহার **সঞ্চারপথ** (locus) বলে।

বিন্দুটিকে যে শর্তানুবর্তী হইয়া চলিতে হয় তাহা ভাষায় প্রকাশ না করিয়া তাহার স্থানাঙ্ক (co-ordinates) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। ঐ শর্তের স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশিত রূপকে ঐ **সঞ্চারপথের সমীকরণ** (Equation of the locus) বলে।

তোমরা জ্যামিতিতে দেখিয়াছ যে, (i) একটি বিন্দু যদি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া গতিশীল হয়, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ;

(ii) বিন্দুটি যদি দুইটি ছেদী সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া সঞ্চরণ করে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় ঐ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক ;

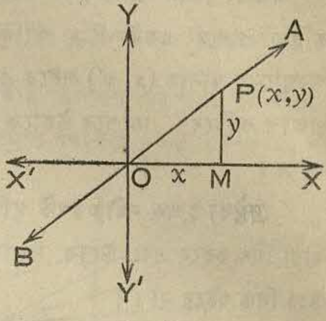
(iii) বিন্দুটি যদি কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হয় একটি বৃত্তের পরিধি ; ইত্যাদি।

§ 2·2. (*a*) সেটের সাহায্যে সঞ্চারপথ এবং তাহার সমীকরণের ব্যাখ্যা :—

কোন সমতলের সকল বিন্দুর সেট্‌কে S বলা যাক্‌। এখন সমতলের যে সকল বিন্দু অর্থাৎ S-এর যে-সকল পদ এক বা একাধিক শর্ত পালন করে, তাহারা S-এর একটি উপ-সেট্ A-র পদ। অর্থাৎ এই সকল বিন্দুর সমাহার সেট্ A ; এখন সেট্ A-র সংজ্ঞা, A-র পদগুলি অর্থাৎ বিন্দুগুলি যে-সকল ধর্ম বা শর্ত পালন করে, তাহাদের দ্বারা দেওয়া প্রয়োজন। গাণিতিক ভাষায় এই শর্ত কোন সমীকরণ বা অসমীকরণ দ্বারা দেওয়া হয় এবং এই সমীকরণ বা অসমীকরণকে A-সেটের সমীকরণ বা অসমীকরণ বলা হয়। নিম্নের উদাহরণগুলিতে ইহা ব্যাখ্যা করা হইল।

উদা 1. মনে কর P একটি বিন্দু যাহার x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে দূরত্ব সমান ও একই চিহ্নযুক্ত।

সমতলের $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা ∠XOY-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং $\overleftrightarrow{AB}$-র সকল বিন্দুর x ও y-অক্ষ হইতে দূরত্বদ্বয় সমান ও একই চিহ্নযুক্ত। সুতরাং $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার বিন্দুগুলি প্রদত্ত শর্ত পালন করে। আবার $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার বিন্দুগুলির সমষ্টি সমতলের বিন্দুগুলির সেট্ s-এর একটি উপ-সেট্ A। এক্ষণে এই উপ-সেটের সংজ্ঞা $A=\{P : x=y\}$ রূপে দেওয়া যায়। অর্থাৎ সমতলের



চিত্র 18

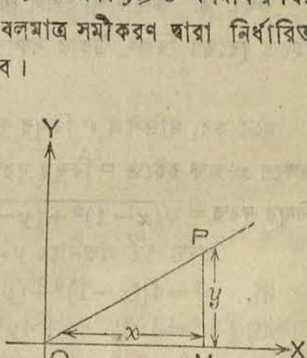
যে সকল বিন্দু $x=y$ সমীকরণ সিদ্ধ করে, তাহারা A সেটের পদ এবং বিপরীতক্রমে সমতলের যে সকল বিন্দু A সেটের পদ তাহারা $x=y$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। A সেট্‌কে অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সকল বিন্দুকে বা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাকে P বিন্দুর সঞ্চারপথ এবং $x=y$ সমীকরণকে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমীকরণ বলে।

উদা. 2. সমতলের প্রথম পাদের সকল বিন্দু $x \geqslant 0$ এবং $y \geqslant 0$ অসমীকরণ দুইটি যুগপৎ সিদ্ধ করে।

সুতরাং প্রথম পাদের বিন্দুগুলির সেট্ $x \geqslant 0$ এবং $y \geqslant 0$ অসমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্ধারিত হয়। এই পুস্তকে আমরা কেবলমাত্র সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত সঞ্চারপথ সম্বন্ধেই সাধারণতঃ আলোচনা করিব।

উদা. 3. মনে কর, একটি বিন্দুর সঞ্চরণের জ্যামিতিক শর্ত হইল যে, তাহার সর্ব অবস্থানে y-অক্ষ হইতে তাহার দূরত্ব x-অক্ষ হইতে তাহার দূরত্বের দ্বিগুণ। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র নং 18 দেখ। এখানে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ



চিত্র নং 19

মনে কর, ঐ গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থান P এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y)। অতএব, এস্থলে $x=2y$. P বিন্দুর যে-কোন অবস্থানেও তাহার ভুজ (x) তাহার কোটির (y) দ্বিগুণ বলিয়া সে স্থলেও $x=2y$.

অতএব, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $x=2y$.

অতএব কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য (i) প্রদত্ত শর্ত প্রকাশ করিবার প্রয়োজনে একটি চিত্র আঁকিবে, (ii) উহাতে চলিষ্ণু বিন্দুটির একটি অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y) ধরিবে এবং (iii) অতঃপর x, y দ্বারা প্রদত্ত শর্তটিকে প্রকাশ করিবে। অতঃপর উহাকে সরল করিলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে।

[দ্রষ্টব্য : এই সমীকরণটি চলিষ্ণু বিন্দুর যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হইবে এবং উহার সঞ্চারপথের বহিস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উহা সিদ্ধ হইবে না।]

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. (3, 4) ও (5, 6) বিন্দুদ্বয় হইতে সমান দূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (5, 6) এবং চলিষ্ণু বিন্দুর একটি অবস্থান P ও তাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এখানে $AP^2=(x-3)^2+(y-4)^2$ এবং $BP^2=(x-5)^2+(y-6)^2$.

∵ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $AP=BP$,

∴ $(x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-6)^2$,

বা, $x+y=9$ [সরল করিয়া], ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. একটি চলিষ্ণু বিন্দুর x-অক্ষ হইতে দূরত্ব সর্বদা (1, 1) বিন্দু হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ, উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. (B. Sc.) '38]

মনে কর, চলিষ্ণু P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং প্রদত্ত বিন্দুটি A (1, 1). এখানে x-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $=y$, এবং A (1, 1) বিন্দু হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

∵ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $y=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

বা, $y^2=4[(x-1)^2+(y-1)^2]$

বা, $y^2=4x^2-8x+4y^2-8y+8$,

∴ $4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. P ও Q বিন্দু যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(-1, 0)$ এবং A এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে $AP : AQ=2:1$; A বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, চলিষ্ণু A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

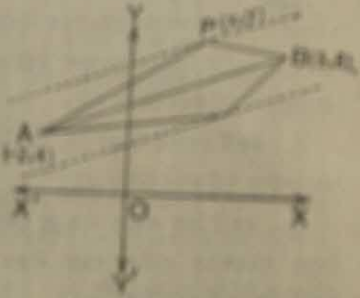
$AP=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ এবং $AQ=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$.

∴ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\frac{2}{1}$,

বা, $\frac{(x+4)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}=\frac{4}{1}$, বা, $4(x+1)^2+4y^2=(x+4)^2+y^2$,

∴ (সরল করিয়া) $x^2+y^2=4$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদা. 4. A ও B স্থির বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ ও $(6, 8)$ এবং P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে $\triangle PAB$-র ক্ষেত্রফল সর্বদা 10 হয়। P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



চিত্র 20

ধরে লও, বর্তমান P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

এখন, $\triangle PAB$-র ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}[x(4-8)+(-2)(8-y)+6(y-4)]$

$=\frac{1}{2}[8y-4x-40]=4y-2x-20$.

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে $4y-2x-20=\pm 10$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-2y+15=0$, বা, $x-2y+5=0$.

উদা. 5. A ও B দুইটি স্থিরবিন্দু যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ এবং C একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(a', 0)$; যদি $PB^2+PC^2=2PA^2$, তবে P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

ধরে লও, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$PB^2=(x+a)^2+y^2$, $PC^2=(x-a')^2+y^2$

এবং $PA^2=(x-a)^2+y^2$

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $(x+a)^2+y^2+(x-a')^2+y^2=2(x-a)^2+2y^2$

বা, $2ax+a^2-2a'x+a'^2=-4ax+2a^2$,

বা, $2(3a-a')x+a'^2-a^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

অনুশীলনী 2

1. একটি বর্তমান বিন্দুর মূলবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব সর্বদা 4 একক; উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $(0, 0)$ ও $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমান দূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

অতএব, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $x=2y$.

অতএব কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য (i) প্রদত্ত শর্ত প্রকাশ করিয়া প্রথমে একটি চিত্র আঁকিবে, (ii) উহাতে গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y') লইবে এবং (iii) তৎপরে x, y দ্বারা প্রদত্ত শর্তটিকে প্রকাশ করিবে। তৎপরে উহাকে সরল করিলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** লব্ধ সমীকরণটি গতিশীল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হইবে এবং উহার সঞ্চারপথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উহা সিদ্ধ হইবে না।]

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. (3, 4) ও (5, 6) বিন্দুদ্বয় হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (5, 6) এবং গতিশীল বিন্দুর একটি অবস্থান P ও তাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এক্ষণে $AP^2=(x-3)^2+(y-4)^2$ এবং $BP^2=(x-5)^2+(y-6)^2$.

$\because$ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $AP=BP$,

$\therefore \quad (x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-6)^2$.

বা: $x+y=9$ [সরল করিয়া], ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. একটি গতিশীল বিন্দুর x-অক্ষ হইতে দূরত্ব সতত (1, 1) বিন্দু হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ, উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. (B. Sc.) '38]

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং প্রদত্ত বিন্দুটি A (1, 1). এক্ষণে x-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $=y$, এবং A (1, 1) বিন্দু হইতে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $y=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

বা, $y^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

বা; $y^2=4x^2-8x+4y^2-8y+8$,

$\therefore \quad 4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. P ও Q বিন্দু যথাক্রমে (−4, 0) ও (−1, 0) এবং A এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে AP : AQ = 2 : 1 ; A বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, গতিশীল A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

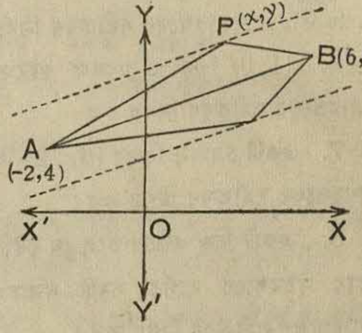
$AP=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ এবং $AQ=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\dfrac{2}{1}$,

বা, $\dfrac{(x+4)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}=\dfrac{4}{1}$, বা, $4(x+1)^2+4y^2=(x+4)^2+y^2$,

$\therefore$ (সরল করিয়া) $x^2+y^2=4$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদা. 4. A ও B স্থির বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ ও $(6, 8)$ এবং P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে $\triangle$PAB-র ক্ষেত্রফল সতত 10 হয়। P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



চিত্র 20

মনে কর, গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

এখন, $\triangle$PAB-র ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\{x(4-8)+(-2)(8-y)+6(y-4)\}$

$=\frac{1}{2}\{8y-4x-40\}=4y-2x-20.$

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $4y-2x-20=\pm 10.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-2y+15=0$, বা, $x-2y+5=0.$

উদা. 5. A ও B দুইটি স্থিরবিন্দু যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ এবং C একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(d, 0)$; যখন $PB^2+PC^2=2PA^2$, তখন P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$PB^2=(x+a)^2+y^2$, $PC^2=(x-d)^2+y^2$

এবং $PA^2=(x-a)^2+y^2$

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, $(x+a)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x-a)^2+2y^2$

বা, $2ax+a^2-2dx+d^2=-4ax+2a^2$,

বা, $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি গতিশীল বিন্দুর ভুজের দ্বিগুণ উহার কোটি অপেক্ষা সতত 4 অধিক ; উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $(0, 0)$ ও $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. মূলবিন্দু ও (3, 0) বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. একটি বিন্দু এরূপে চলমান যে x-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ y-অক্ষ হইতে দূরত্বের তিন গুণ অপেক্ষা 4 অধিক। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ কি হইবে ?

5. যে গতিশীল বিন্দুর y-অক্ষ হইতে দূরত্ব (2, 2)-বিন্দু হইতে দূরত্বের দ্বিগুণ তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U.]

6. (1, 0) বিন্দু ও y-অক্ষ হইতে সতত সমদূরবর্তী গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. একটি চলমান বিন্দুর (5, 12)-বিন্দু হইতে দূরত্ব সতত 13 হইলে উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. একটি বিন্দু এরূপে চলে যে দুইটি স্থিরবিন্দু $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি সতত ধ্রুবক ও $2k^2$ এর সমান। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2) ও (5, 6) এবং উহার ক্ষেত্রফল সতত 12 বর্গ একক হইলে, উহার তৃতীয় শীর্ষের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. কোন সমতলে একটি বিন্দু এরূপে চলমান যে পরস্পর সমকোণে নত দুইটি স্থির সরলরেখা হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত একটি ধ্রুবক রাশি k হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Hints :** পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্থির রেখা দুইটিকে অক্ষদ্বয় ধরিবে।]

11. (a, b) এই স্থিরবিন্দুগামী একটি গতিশীল সরলরেখা স্থানাঙ্ক-অক্ষদ্বয়ের সহিত P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়। PQ-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

সরলরেখা (The Straight line)

§ 3·1. কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, $\overleftrightarrow{QR}$ y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা। উহা যেন x-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং $OR=a$, সুতরাং y-অক্ষ হইতে $\overleftrightarrow{QR}$এর দূরত্ব$=a$ হইল। [চিত্র নং 22 দেখ।]

মনে কর, এই $\overleftrightarrow{QR}$-এর উপর F যে-কোন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y)। এখন F-এর যে কোন অবস্থানে উহার কোটি (ordinate) যাহাই হউক না কেন, উহার ভুজ সর্বদা$=OR=a$ হইবে। $\overleftrightarrow{QR}$ সরলরেখাকে দুইদিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও উহার উপরিস্থিত সকল বিন্দুরই ভুজ$=a$ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ অন্য কোন বিন্দুর ভুজ$=a$ হইতে পারে না। অতএব ঐ $\overleftrightarrow{QR}$ সরলরেখার **সমীকরণ হইল $x=a$.**

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $\overleftrightarrow{CN}$ সরলরেখা x-অক্ষ হইতে b একক দূরে x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয়, তবে উহার উপরিস্থিতি প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate) সর্বদা$=b$ হইবে। অতএব $\overleftrightarrow{CN}$ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $\boldsymbol{y=b}$

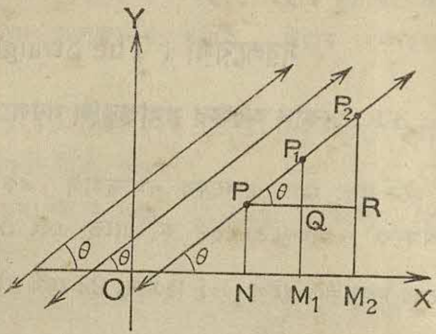
অনুসিদ্ধান্ত : (i) প্রথম সমীকরণে যদি $a=0$ হয়, তবে y অক্ষ হইতে $\overleftrightarrow{QR}$-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় $\overleftrightarrow{QR}$ সরলরেখা y-অক্ষের সহিত সমাপতিত (মিলিত) হইবে এবং তখন $x=0$ হইবে।

অতএব, **y-অক্ষের সমীকরণ হইল $x=0$.**

(ii) অনুরূপে দ্বিতীয় সমীকরণে $b=0$ হইলে, x-অক্ষ হইতে $\overleftrightarrow{CN}$-এর দূরত্ব শূন্য হওয়ায় $\overleftrightarrow{CN}$ সরলরেখা x-অক্ষের সহিত মিলিয়া যইবে এবং $y=0$ হইবে। অতএব, **x-অক্ষের সমীকরণ হইল $y=0$.**

§ 3·2. **সরলরেখার প্রবণতা** (Gradient of a straight line) :

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ দুইটি পরস্পর লম্ব অক্ষ এবং P, P_1 ও P_2 একই সরলরেখার উপর (সরলরেখাটি y অক্ষ নয় অথবা y-অক্ষের সমান্তরাল নয়) P বিন্দুর তিনটি অবস্থান ; PN, P_1M_1 ও P_2M_2 X-অক্ষের উপর লম্ব এবং P হইতে P_2M_2 এর উপর PR লম্ব, উহা যেন P_1M_1-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



চিত্র 21

মনে কর $\overleftrightarrow{PP_1}$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এক্ষণে, PN, P_1M_1 ও P_2M_2 যথাক্রমে P, P_1 ও P_2এর কোটি (ordinate) হইল এবং PR ∥ $\overrightarrow{OX}$ বলিয়া $m\angle P_2PR=\theta$.

y-অক্ষ নয় বা y-অক্ষের সমান্তরাল নয় এরূপ কোন সরলরেখার প্রবণতা বলিলে বুঝায় উহার উপরিস্থিত বিন্দুর ভুজ (abscissa) এক একক বৃদ্ধি পাইলে তাহার কোটি যতটুকু বৃদ্ধি পায়। চিত্রে P বিন্দু তাহার প্রথম অবস্থান P হইতে যখন সরিয়া P_1 অবস্থানে গেল তখন তাহার ভুজ NM_1 বৃদ্ধি পাইল এবং কোটি বৃদ্ধি পাইল P_1Q, সুতরাং ভুজটি NM_1 বৃদ্ধির জন্য কোটি বাড়িল P_1Q.

∴ ভুজটি এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি

$=\frac{P_1Q}{NM_1}=\frac{P_1Q}{PQ}$ [∵ $PQ=NM_1$] ইহাই সরলরেখাটির প্রবণতা বা Gradient।

আবার দেখ, বিন্দুটি যদি P হইতে P_2 অবস্থানে যায়, তবে ভুজটির NM_2 বা PR বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হয় P_2R,

∴ ভুজটির এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি$=\frac{P_2R}{PR}$.

এক্ষণে, ∵ $\triangle PQP_1$ ও $\triangle PRP_2$ সদৃশ, ∴ $\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{P_2R}{PR}$.

অতএব প্রমাণিত হইল যে, সরলরেখাটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর পক্ষে প্রবণতা ধ্রুবক হইবে।

এখন দেখ, দেখ যদি অক্ষ দুইটির সম্পর্কে একই দৈর্ঘ্য একক ধরা হয়, তবে $\frac{P_1Q}{PQ}=\tan\theta$ (অর্থাৎ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখাটির যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent)

প্রবণতার সংজ্ঞা : y-অক্ষ নয় অথবা y-অক্ষের সমান্তরাল নয় এরূপ কোন সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের (positive directionএর) সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangentকে সরলরেখাটির প্রবণতা (gradient) বলে।

y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল সকল সরলরেখার প্রবণতা অসংজ্ঞেয়।

(i) **দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু-সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয়।**

মনে কর, P ও P_1 নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু [চিত্র 21 আঁক] এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)।

মনে কর, $\overleftrightarrow{PP_1}$ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $=\tan\theta=\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** চিত্র হইতে দেখা যায় সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রবণতা একই থাকে।]

(ii) তিনটি বিন্দু একরেখীয় হইবার (collinearity of three points) শর্ত সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে।

এখানে মনে কর, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু। যদি $\overleftrightarrow{AB}$-সরলরেখার প্রবণতা $\overleftrightarrow{BC}$-সরলরেখার প্রবণতার সমান হয়, তবে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{BC}$ সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত হওয়ায় A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

এক্ষণে, $\overleftrightarrow{AB}$-র প্রবণতা $=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ এবং $\overleftrightarrow{BC}$-র প্রবণতা $=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$.

অতএব, $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$ হইলে, A, B, C সমরেখ হইবে।

উহা হইতে পাই $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ হইলে ঐ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে।

(iii) θ কোণ দ্বারা ইহাই বুঝায় যে x-অক্ষের সমান্তরাল কোন

সরলরেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরাইয়া প্রদত্ত নির্দিষ্ট দিকের সহিত সমাপতিত করিতে হইলে উহাকে θ কোণ পরিমাণ ঘুরাইতে হইবে।

উদাহরণ। (2, 4) ও (1, 2) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. এখানে $y_1=4$, $y_2=2$; $x_1=2$, $x_2=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $=\frac{4-2}{2-1}=\frac{2}{1}=2.$

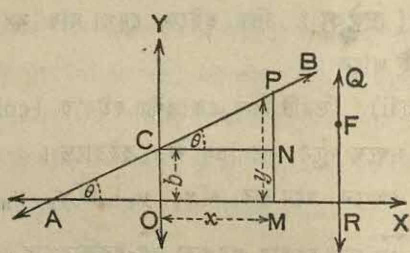
অনুশীলনী IIIA

নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা (gradient) নির্ণয় কর।

1. (1, −2) ও (3, 4). 2. (−5, 3) ও (9, 5). 3. $(a, b-c)$ ও $(a+b, b)$. 4. (0, −5) ও (−4, 7). 5. (8, 3) ও (−2, 3).

§ 3·3. যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত কোন নির্দিষ্ট কোণে ($\neq 90°$) নত থাকিয়া y-অক্ষ হইতে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ ($\neq 90°$) কোণে নত এবং উহা y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া ঐ অক্ষ হইতে OC অংশ ছিন্ন করিয়াছে।



চিত্র 22

মনে কর, OC $=b$ একক।

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং মনে কর উহার স্থানাঙ্ক (x, y)। P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং C হইতে PM-এর উপর CN লম্ব টান। এক্ষণে $m\angle PCN=\theta$, $CN=OM=x$, $PM=y$, $NM=CO=b$, এবং $\tan\theta=\frac{PN}{CN}$.

এক্ষণে, $y=PN+NM=PN+b=CN\times\frac{PN}{CN}+b=x\tan\theta+b.$

$\therefore$ $y=mx+b$ (এখানে $m=\tan\theta$).

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর P-এর যে কোন অবস্থানে উহার স্থানাঙ্ক x ও y-এর দ্বারা এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে এবং উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা এই সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবে না। অতএব, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y=mx+b}$.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই সমীকরণ নির্ণয়ে ধরা হইয়াছে যে, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি y-অক্ষকে ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে। যদি উহা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে ছেদ করে, তবে b-কে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

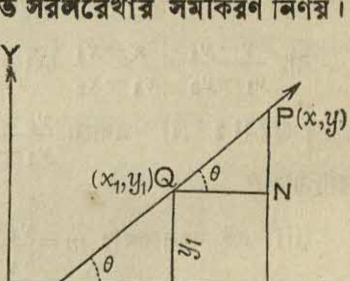
(2) এই সমীকরণকে সরলরেখাটির ট্যানজেন্ট আকার (Tangent form) বলে]

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি যদি মূলবিন্দু (origin) দিয়া যাইত তবে তাহা y অক্ষ হইতে শূন্য অংশ ছেদ করিত অর্থাৎ $b=0$ হইত। তখন সমীকরণটি হইত $\boldsymbol{y=mx}$. অতএব, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y=mx}$

(i) $y=mx+b$ সমীকরণে যদি $m=0$ হয়, তবে সরলরেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে, কারণ, সেক্ষেত্রে $\tan\theta=0$ বলিয়া $\theta=0$. অতএব x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y=b$. ইহা পূর্বে দেখিয়াছ।

(ii) দুইটি সরলরেখার প্রবণতা বা m সমান হইলে তাহারা x-অক্ষের সহিত সমান কোণে নত থাকিবে, সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

§ 3·4. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে ($\neq 90°$) নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।



চিত্র 23

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু Q (x_1, y_1) এবং প্রদত্ত সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ ($\neq 90°$) কোণে নত আছে। উহার যেকোন $P(x, y)$ বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং QN⊥PM টান। এখানে $PN=PM-NM=y-y_1$, $QN=x-x_1$.

এক্ষণে, $\tan\theta=\dfrac{PN}{QN}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$.

যদি $\tan\theta=m$ হয়, তবে $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$.

[**অন্য প্রমাণ :** মনে কর, সরলরেখাটি, (x_1, y_1) বিন্দু-গামী এবং x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত এবং উহার সমীকরণ $y=mx+b$. ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা $y=mx+b$ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। অতএব (x_1, y_1) স্থানাঙ্ক দ্বারাও উহা সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad y=mx+b \cdots\cdots(1)$

এবং $y_1=mx_1+b \cdots\cdots(2)$ [y-এর স্থানে y_1 ও x-এর স্থানে x_1 বসাইয়া, m ও b সর্বদা ধ্রুবক]

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$y-y_1=m(x-x_1)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।]

§ 3·5. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখাটি (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দিয়া গিয়াছে এবং উহার সমীকরণ যেন, $y=mx+b \cdots(1)$, এখানে m ও b দুইটিই অজ্ঞাত।

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া ঐ দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ $y=mx+b$ সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad y_1=mx_1+b \cdots\cdots(2)$

এবং $y_2=mx_2+b \cdots\cdots(3)$

এক্ষণে (3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $y_2-y_1=m(x_2-x_1) \cdots(4)$

এবং (2) হইতে (1) " " " $y_1-y=m(x_1-x) \cdots(5)$

এখন (4)কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\dfrac{y_2-y_1}{y_1-y}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1-x}$.

বা, $\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) এখানে $\dfrac{y_2-y_1}{y_1-y}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1-x}$ ইহাকেও নির্ণেয় সমীকরণ বলা যায়।

(ii) এই সরলরেখার $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$]

উদাহরণ 1. একটি সরলরেখার প্রবণতা $\sqrt{3}$ এবং y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $+2$. সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে সরলরেখার প্রবণতা m এবং y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $+b$, তাহার সমীকরণ $y=mx+b$.

এখানে $m=\sqrt{3}$ এবং $b=2$.

সুতরাং সরলরেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ $y=\sqrt{3}x+2$.

উদা. 2. (−1, 4) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার প্রবণতা 2. সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y=2x+b$ ($\because$ প্রবণতা $m=2$).

সরলরেখাটি (−1, 4) বিন্দুগামী হওয়ায় $4=2(-1)+b$, $\therefore$ $b=6$.

সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ $y=2x+6$, বা, $2x-y+6=0$.

উদা. 3. (−1, 2) এবং (3, −4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y=mx+b\cdots(1)$

সরলরেখাটি (−1, 2) ও (3, −4) বিন্দুগামী হওয়ায়,

$2=-m+b\cdots(2)$ ও $-4=3m+b\cdots(3)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $y-2=m(x+1)\cdots(4)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই, $6=-4m\cdots(5)$

(4)÷(5) করিয়া পাই, $\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{x+1}{-4}$

বা, $-4y+8=6x+6$, বা, $6x+4y-2=0$, বা, $3x+2y-1=0$.

বিকল্প পদ্ধতি : সরাসরি $\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$ সূত্রানুযায়ী নির্ণেয় সমীকরণ $\dfrac{y-2}{2-(-4)}=\dfrac{x-(-1)}{-1-3}$, বা, $\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{x+1}{-4}$

বা, $3x+2y-1=0$.

[এখানে $x_1=-1$, $x_2=3$, $y_1=2$, $y_2=-4$].

উদা. 4. $2y-4x-7=0$ সরলরেখার অক্ষ দুইটির সহিত ছেদবিন্দু এবং প্রবণতা নির্ণয় কর।

x-অক্ষের সহিত সরলরেখাটির ছেদবিন্দুর কোটি অর্থাৎ y শূন্য।

সরলরেখার সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া পাই, $-4x=7$, বা $x=-\frac{7}{4}$.

$\therefore$ সরলরেখাটি x-অক্ষকে $(-\frac{7}{4}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপে প্রদত্ত সমীকরণে $x=0$ বসাইয়া পাই $y=\frac{7}{2}$.

$\therefore$ সরলরেখাটি y-অক্ষকে $(0, \frac{7}{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, সরলরেখার সমীকরণ $2y=4x+7$, বা, $y=2x+\frac{7}{2}$.

সুতরাং নির্ণেয় প্রবণতা = 2.

অনুশীলনী IIIB

1. একটি সরলরেখার y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে ছেদিতাংশ 2 একক। x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখাটি 120° কোণে নত হইলে, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

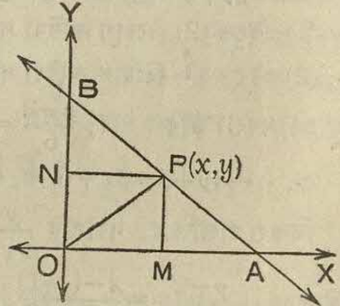
2. নিম্নের প্রত্যেকটি সরলরেখার প্রবণতা ও x-অক্ষের সহিত ছেদবিন্দু নির্ণয় কর :

(i) $3x+2y=9$, (ii) $y-3x=6$, (iii) $x+y=0$,
(iv) $2x-y+5=0$, (v) $x \operatorname{cosec} \theta+y \sec \theta+r=0$.

3. নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগলগামী সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $(5, -2)$ এবং $(-3, 7)$; (ii) $(0, b)$ এবং $(-a, 0)$;
(iii) $(c \cos C, d \sin C)$ এবং $(c \cos D, d \sin D)$;
(iv) $(\alpha p_1^2, 2\alpha p_1)$ এবং $(\alpha p_2^2, 2\alpha p_2)$; (v) $(h \sec \alpha, k \tan \alpha)$ এবং $(h \sec \beta, k \tan \beta)$ (vi) $(3, -4)$ এবং $(1, 2)$.

§ 3·6. যে সরলরেখা উভয় অক্ষ হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।



চিত্র 24

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা x-অক্ষকে ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ছিন্ন অংশ OA $=a$ একক এবং OB $=b$ একক।

মনে কর, P ঐ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y). x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান।

এখানে PM $=y$, OM $=x$.

এক্ষণে, $\because$ $\triangle$APM ও $\triangle$ABO সদৃশ,

$\therefore \ \frac{AM}{OA}=\frac{AP}{AB}$, বা, $1-\frac{AM}{OA}=1-\frac{AP}{AB}$

বা, $\frac{OM}{OA}=\frac{BP}{AB}$, অর্থাৎ $\frac{x}{a}=\frac{BP}{AB}$......(1)

এবং অনুরূপে $\frac{PM}{OB}=\frac{AP}{AB}$, অর্থাৎ $\frac{y}{b}=\frac{AP}{AB}$......(2)

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{BP}{AB}+\frac{AP}{AB}=\frac{BP+AP}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

দ্রষ্টব্য : এখানে a ও b কোনটিই শূন্য নয় মনে করা হইয়াছে।

[**অন্য প্রমাণ :** 24 নং চিত্রে PN$\perp\overrightarrow{OY}$ টান এবং OP যোগ কর। এখানে PN $=$ OM $=x$.

এখানে, $m\triangle AOB=m\triangle AOP+m\triangle BOP$

$\therefore\ \frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}OA.PM+\frac{1}{2}OB.PN,$

বা, $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx$, বা, $ab=ay+bx$,

$\therefore\ 1=\frac{y}{b}+\frac{x}{a}$ [ab দ্বারা ভাগ করিয়া], বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$]

দ্রষ্টব্য : (1) এস্থলে সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য ধরা হইয়াছে যে, সরলরেখাটি $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$-এর ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে, কিন্তু উহা অক্ষদ্বয়ের মধ্যে একটিকে ধনাত্মক ও অন্যটিকে ঋণাত্মক দিকে কিংবা দুইটিকেই ঋণাত্মক দিকে ছেদ করিতে পারে। সেইরূপ স্থলে a ও b-এর চিহ্নগুলি (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) ঠিক করিয়া লইতে হইবে।

(2) উপরের লব্ধ সমীকরণটিকে সরলরেখার **ছেদিতাংশ রূপ** (intercept form) বলে। এই আকারের সমীকরণের সুবিধা এই যে সহজেই সরলরেখার দুইটি বিন্দু $(a, 0)$ ও $(0, b)$ এবং তাহা হইতে সরলরেখাটিও নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3$, বা, $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}=1$

(উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া)

এখানে ইহা ছেদিতাংশ আকারের সমীকরণ হওয়ায়, নির্ণেয় ছেদিতাংশ দুইটি $3a$ ও $3b$.

উদা. 2.(i) একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ 2 ও 1. সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। (ii) $2x+y=5$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ নির্ণয় কর। [C. U. '44]

(i) মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. এখানে, $a=2$ এবং $b=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$, বা, $x+2y=2$.

(ii) আবার, $2x+y=5$ সমীকরণকে $\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{5}=1$ আকারে লেখা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদিতাংশদ্বয় $\frac{5}{2}$ ও 5.

উদা. 3. $3x-2y+6=0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের সহিত ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

$3x-2y+6=0$,

বা, $3x-2y=-6$, বা, $\frac{x}{\frac{-6}{3}}+\frac{y}{\frac{-6}{-2}}=1$, বা, $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$

সুতরাং সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে $OA=-2$, $OB=3$. সুতরাং A ও B বিন্দুর অর্থাৎ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 0)$ ও $(0, 3)$.

অনুশীলনী IIIC

1. x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে কয়েকটি সরলরেখার ছেদিতাংশগুলি নিম্নে দেওয়া হইল। সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) 3 এবং 2 ; (ii) -5 এবং -4 ; (iii) 3 এবং $-\frac{9}{5}$;

(iv) $-\frac{13}{5}, \frac{13}{9}$; (v) $\frac{a}{b}$ এবং 1 ; (vi) $\frac{b}{a}\sec\alpha$ এবং $\cos\alpha$.

2. নিম্নের সরলরেখাগুলির অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ নির্ণয় কর :—

(i) $2x-9y+6=0$, (ii) $3x-4y+1=0$

(iii) $y\cos\theta-x\sin\theta=r$.

3. নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলির অক্ষদ্বয়ের সহিত ছেদবিন্দু নির্ণয় কর :—

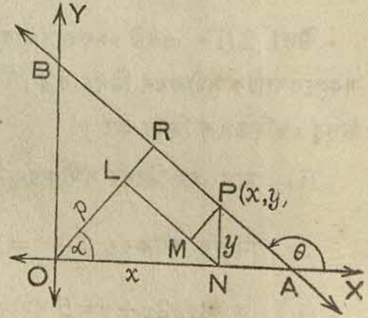
(i) $2x-3y+5=0$. (ii) $ax-by+c=0$,

(iii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

§ 3·7. মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে নত আছে। **ঐ লম্ব ও কোণটি দ্বারা ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।**

মনে কর মূলবিন্দু O হইতে সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$-র উপর OR লম্ব। OR সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এবং $OR=p$ একক।

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 25

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P (x, y) লওয়া হইল। P হইতে x-অক্ষের উপর PN লম্ব টান। N বিন্দু হইতে NL সরলরেখা OR-এর উপর লম্ব এবং P হইতে NL-এর উপর PM লম্ব টান।

এক্ষণে, $OR=OL+LR=OL+PM$.

$\triangle OLN$ সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore \quad \alpha + m\angle \text{LNO} = 90^\circ = m\angle \text{LNO} + m\angle \text{PNM}.$

$\therefore \quad m\angle \text{PNM} = \alpha, \quad \text{ON} = x,$ এবং $\text{PN} = y.$

অতএব, $\frac{\text{OL}}{\text{ON}} = \cos\alpha, \quad \therefore \quad \text{OL} = \text{ON}\cos\alpha = x\cos\alpha;$

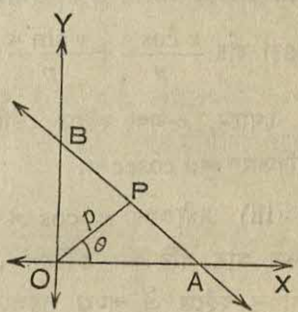
এবং $\frac{\text{PM}}{\text{PN}} = \sin\alpha, \quad \therefore \quad \text{PM} = \text{PN}\sin\alpha = y\sin\alpha.$

$\therefore \quad \text{OR} = \text{OL} + \text{PM},$ বা, $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$

[অন্য প্রমাণ]ঃ

মনে কর, মূলবিন্দু O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর OP লম্ব টানা হইয়াছে এবং উহা $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর, $\text{OP} = p$ একক এবং $\overleftrightarrow{AB}$ যেন $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



চিত্র 26

এখানে অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ OA ও OB, সুতরাং ছেদিতাংশ আকারে সমীকরণ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ হইতে পাই $\frac{x}{\text{OA}} + \frac{y}{\text{OB}} = 1 \cdots (1)$

আবার, $\frac{\text{OP}}{\text{OA}} = \cos\theta, \quad \therefore \quad \text{OA} = \frac{\text{OP}}{\cos\theta} = \frac{p}{\cos\theta},$

এবং $\quad \frac{\text{OP}}{\text{OB}} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta, \; \therefore \; \text{OB} = \frac{\text{OP}}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin\theta} \cdots (2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $\frac{x}{\frac{p}{\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\theta}} = 1,$ বা, $\frac{x\cos\theta}{p} + \frac{y\sin\theta}{p} = 1,$

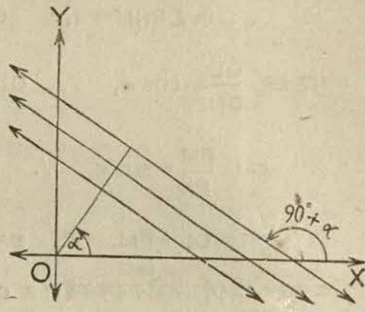
$\therefore \quad x\cos\theta + y\sin\theta = p,$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : (i) সমীকরণটি $y=mx+c$ আকারে সাজাইলে পাওয়া যায়,

$y=(-\cot\alpha)\,x+p\,\text{cosec}\,\alpha.$

এখানে দেখা যাইতেছে, রেখাটির m বা $\tan\theta=-\cot\alpha$ $=\tan(90^\circ+\alpha)$,

$\therefore\ \theta=90^\circ+\alpha$, চিত্র হইতেও ইহা স্পষ্ট বুঝা যায়।



চিত্র 27

(ii) সমীকরণটিকে ছেদিতাংশরূপে (intercept form-এ) সাজাইয়া পাওয়া যায় $\dfrac{x\cos\alpha}{p}+\dfrac{y\sin\alpha}{p}=\mathbf{1}$, বা, $\dfrac{x}{p\sec\alpha}+\dfrac{y}{p\,\text{cosec}\,\alpha}=\mathbf{1}$,

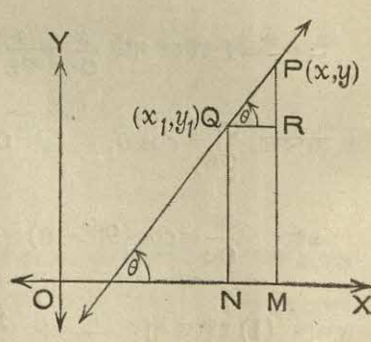
এখানে, x-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ$=p\sec\alpha$ এবং y-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ$=p\,\text{cosec}\,\alpha$.

(iii) সমীকরণ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$-এর কোণ α স্থির রাখিয়া p-এর মান পরিবর্তন করিলে দেখা যায় ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়। মূলবিন্দু হইতে ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য বিভিন্ন, কিন্তু α স্থির থাকার জন্য একই সরলরেখা ঐ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্ব হয়, এবং সেইজন্য ঐ রেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

§ 3·8. সুসমঞ্জস আকারে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত Q $(x_1,\ y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত আছে।

ঐ সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দু P $(x,\ y)$ লও।



চিত্র 28

এখন 3·4নং অনুচ্ছেদ অনুসারে সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে

$y-y_1=\tan\theta\,(x-x_1)$, বা, $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}.$

মনে কর, $PQ=r$, $\therefore$ $QR=r\cos\theta$,

বা, $x-x_1=r\cos\theta$ [চিত্রানুসারে], $\therefore$ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=r.$

আবার $PR=r\sin\theta$, বা, $y-y_1=r\sin\theta$, $\therefore$ $\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r.$

অতএব, $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r\cdots(1)$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(1) হইতে পাওয়া যায় $x=x_1+r\cos\theta$ এবং $y=y_1+r\sin\theta$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই আকারের সমীকরণের বিশেষ সুবিধা এই যে, সরল রেখাস্থিত কোন প্রদত্ত বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরত্বে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। আবার, প্রদত্ত দুইটি বিন্দুর মধ্যস্থিত সরলরেখা বরাবর দূরত্বও নির্ণয় করা যায়।]

উদাহরণ। মনে কর, Q-এর স্থানাঙ্ক (1, 2) এবং সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত আছে। সরলরেখাটির R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যেন $QR=3$ হয়।

$\because$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে $\dfrac{x-1}{\cos 45^\circ}=\dfrac{y-2}{\sin 45^\circ}=3,$

$\therefore$ $x-1=3\cos 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}},$ $\therefore$ $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+1$;

এবং $y-2=3\sin 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}},$ $\therefore$ $y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+2.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+1, \dfrac{3}{\sqrt{2}}+2\right).$

§ 3·9. সরলরেখার পোলার সমীকরণ (Polar Equation of a straight line).

মনে কর $\overrightarrow{OX}$ প্রারম্ভিক রেখা এবং O পোলার মূলবিন্দু,

মনে কর কোন সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$-র যে কোন বিন্দু P-এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) এবং OM, মূলবিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{AB}$-র উপর লম্ব। OM, $\overleftrightarrow{AB}$-কে M বিন্দুতে ছেদ করে এবং M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (p, α).

সুতরাং $m\angle POM=\alpha-\theta$, এবং $p=OM=OP\cos(\alpha-\theta)$

বা, $p=r\cos(\alpha-\theta)\cdots\cdots(1)$

সমীকরণ-(1), $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার নির্ণেয় সমীকরণ।

কার্তীয় সমীকরণ হইতে পোলার সমীকরণ নির্ণয় :

(i) উপরের সমীকরণ-(1)-এর অনুরূপ $\overleftrightarrow{AB}$-এর কার্তীয় সমীকরণ $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p \cdots\cdots(2)$.

এই সমীকরণে $x = r\cos\theta$ ও $y = r\sin\theta$ বসাইলে পাই,

$$r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = p,$$

বা, $r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = p$, বা, $r\cos(\alpha - \theta) = p$.

(ii) সরলরেখার কার্তীয় সাধারণ সমীকরণ

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0). \text{ (§ 3·10 দেখ)}$$

এই সমীকরণে $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ বসাইলে পাই,

$$r(a\cos\theta + b\sin\theta) = -c$$

বা, $a\cos\theta + b\sin\theta = -\dfrac{c}{r} \cdots\cdots(3)$

সমীকরণ-(3) কোন সরলরেখার পোলার সমীকরণের সাধারণ আকার।

সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হইলে অর্থাৎ পোল বা মেরু দিয়া যাইলে সমীকরণ-(2)-এ $\theta = 0$, $r = 0$ বসাইয়া পাই, $c = 0$.

$\therefore\ a\cos\theta + b\sin\theta = 0$, বা, $\tan\theta = -\dfrac{a}{b}$;

সুতরাং θ = ধ্রুবক। সুতরাং পোলগামী যে কোন সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $\theta = K$, (K ধ্রুবক)।

(iii) প্রারম্ভিকরেখার প্রত্যেক বিন্দুর রেডিয়াস্ ভেক্টর প্রারম্ভিকরেখার সহিত $0°$ কোণে নত; সুতরাং প্রারম্ভিকরেখার সমীকরণ $\theta = 0$.

প্রারম্ভিকরেখার সমান্তরাল কোন সরলরেখার সমীকরণ $r\sin\theta = p$. কারণ, এখানে $\alpha = 90°$, সমীকরণ $r\cos(90° - \theta) = p$,

বা, $r\sin\theta = p$.

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $r\cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $r\cos(\theta - \alpha) = p'$.

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমীকরণ $r\cos(\theta - \alpha) = p$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমান্তরাল। যেহেতু $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল, সুতরাং পোল হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর লম্ব, $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার উপরও লম্ব।

মনে কর, এই লম্ব $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং

$m\angle NOX = \alpha$; মনে কর, $ON = p'$. সুতরাং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার যে কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (r, θ) হইলে,

$p' = ON = r \cos \angle PON = r \cos(\theta - \alpha)$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার সমীকরণ $r \cos(\theta - \alpha) = p'$.

উদা. 2. তিনটি সরলরেখার পোলার সমীকরণ $r \cos(\theta - \alpha) = l$, $r \cos(\theta - \beta) = m$ ও $r \cos(\theta - \gamma) = n$. সরলরেখা তিনটি কি শর্তে সমবিন্দু হইবে ?

মনে কর প্রদত্ত সরলরেখা তিনটি (p, ϕ) বিন্দুগামী।

সুতরাং (p, ϕ), সরলরেখা তিনটির সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore$ $p \cos(\phi - \alpha) = l \cdots\cdots$(i) ; $p \cos(\phi - \beta) = m \cdots\cdots$(ii)

এবং $p \cos(\phi - \gamma) = n \cdots$(iii),

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) হইতে p ও ϕ অপনয়ন করিয়া পাওয়া যায়

$l \sin(\beta - \gamma) + m \sin(\gamma - \alpha) + n \sin(\alpha - \beta) = 0$, এবং ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

[অপনয়ন প্রক্রিয়া জটিল নহে ; নিজেরাই চেষ্টা কর।]

§ 3·10. যে কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত সমীকরণ হইবে।

মনে কর, কোন সরলরেখার উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে-কোন দুইটি বিন্দু। এক্ষণে, অন্য একটি বিন্দু $A(x, y)$ ঐ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে অর্থাৎ P ও Q-এর সহিত সমরেখ হইবে যদি,

$x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ হয়,

অতএব ইহাই ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে।

এক্ষণে, $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ এবং $x_1y_2 - x_2y_1 = c$ বসাইয়া ঐ সমীকরণটি হইল $ax + by + c = 0$ এবং ইহাই x ও y-এর একঘাত দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ (general form)।

§ 3·10. (a) x ও y-এর একঘাত সমীকরণ সতত একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

x ও y-এর একঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল

$ax + by + c = 0$ (যেখানে a ও b দুইটিই শূন্য নহে)$\cdots\cdots$(1)

মনে কর, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি $ax+by+c=0$ সমীকরণের সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত। অতএব, ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad ax_1+by_1+c=0 \ldots\ldots(2)$$
$$ax_2+by_2+c=0 \ldots\ldots(3)$$
$$ax_3+by_3+c=0 \ldots\ldots(4)$$

(2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{a}{y_1-y_2}=\frac{b}{x_2-x_1}=\frac{c}{x_1y_2-x_2y_1}=k \text{ (মনে কর)},$$

এক্ষণে, (4)-এ a, b ও c-এর মান বসাইয়া পাই

$$k\{x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)\}=0,$$
$$\therefore \quad x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0.$$

অতএব, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore \quad ax+by+c=0$ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

§ 3·11. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ।

(*a*) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $ax+by+c=0$কে $y=mx+c$ আকারে প্রকাশ।

সরলরেখার সমীকরণের রূপ $ax+by+c=0$, $\therefore \quad by=-ax-c$.

$\therefore \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ($b\neq0$ ধরিয়া) ইহা $y=mx+c$ এই আকারের হইল ; কারণ, এখানে $m=-\frac{a}{b}$ এবং ধ্রুবকরাশি c-এর স্থানে $-\frac{c}{b}$ হইয়াছে।

(*b*) সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপকে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ রূপে প্রকাশ।

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0$,

অতএব, $ax+by=-c$,

বা, $\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$ [উভয়পক্ষকে $-c$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$ এবং ইহাই সমীকরণের নির্ণেয় রূপ ;

এখানে অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশদ্বয় যথাক্রমে $-\frac{c}{a}$ ও $-\frac{c}{b}$.

(c) সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে লম্ব আকারে প্রকাশ।

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ $ax+by+c=0 \cdots(1)$

এখানে যদি $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ হয়, তবে $\frac{b^2}{a^2}=\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$,

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, বা, $\cos^2\alpha=\frac{a^2}{a^2+b^2}$,

$\therefore \cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. অনুরূপে, $\sin\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $ax+by=-c$.

বা, $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

[উভয়পক্ষে $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$.

এবং ইহা $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ এই আকারের হইয়াছে।

এখানে ডানপক্ষের হরের + বা − যে চিহ্ন ধরিলে সমগ্র ডানপক্ষ ধনাত্মক হয়, সেই চিহ্ন লইতে হইবে।

অনুশীলনী III D

1. নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ আকারে প্রকাশ কর :—

(i) $\sqrt{3}x+y=8$, (ii) $x-y+7\sqrt{2}=0$, (iii) $x+y+4=0$, (iv) $6x-13y+19=0$.

2. নিম্নে কয়েকটি সরলরেখার সমীকরণ প্রদত্ত হইল। মূলবিন্দু হইতে সরলরেখাগুলির উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :—

(i) $4x+3y-5=0$; (ii) $5x-12y=26$;
(iii) $2x+3y+7=0$; (iv) $by\cos\theta-ax\sin\theta+ab=0$.

উদাহরণমালা 3

উদাহরণ 1. A, B, C, D বিন্দু চারিটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 3)$, $(8, 9)$, $(0, 4)$ এবং $(3, 0)$. AB ও CD যোগ করা হইল। CD রেখাংশ AB রেখাংশকে কি অনুপাতে বিভক্ত করে ? [H. S. 1960]

$\overleftrightarrow{AB}$-র সমীকরণ : $\frac{x-(-2)}{-2-8}=\frac{y-3}{3-9}$, বা, $\frac{x+2}{-10}=\frac{y-3}{-6}$

বা, $6x+12=10y-30$,

বা, $6x-10y+42=0$ অর্থাৎ $3x-5y+21=0 \cdots (1)$

$\overleftrightarrow{CD}$-র সমীকরণ : $\frac{x-0}{0-3}=\frac{y-4}{4-0}$, বা, $\frac{x}{-3}=\frac{y-4}{4}$,

বা, $4x=-3y+12$, বা, $4x+3y-12=0 \cdots (2)$

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$-র ছেদবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক হইল $(-\frac{3}{29}, \frac{120}{29})$. এক্ষণে মনে কর, CD রেখাংশ AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে, অর্থাৎ AB রেখাংশ P বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

সুতরাং P-এর y স্থানাঙ্ক হইবে, $\frac{9m+3n}{m+n}$, $\therefore \frac{120}{29}=\frac{9m+3n}{m+n}$,

বা, $\frac{40}{29}=\frac{3m+n}{m+n}$, বা, $87m+29n=40m+40n$

বা, $47m=11n$, $\therefore \frac{m}{n}=\frac{11}{47}$. সুতরাং নির্ণেয় অনুপাত $11 : 47$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $(-7, 3)$ এবং $(14, -6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী। [H. S. 1962 (Comp.)]

$(-7, 3)$ এবং $(14, -6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ :

$\frac{x-(-7)}{-7-14}=\frac{y-3}{3-(-6)}$, বা, $\frac{x+7}{-21}=\frac{y-3}{9}$, বা, $\frac{x+7}{-7}=\frac{y-3}{3}$,

বা, $3x+21=-7y+21$, বা, $3x+7y=0 \cdots (1)$

সমীকরণ (1)-এ $x=0$, $y=0$ বসাইয়া দেখা যায় সমীকরণটি $x=0$, $y=0$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী।

উদা. 3. দেখাও যে, (3, 1), (5, −5) এবং (−1, 13) বিন্দুত্রয় সমরেখ। বিন্দু তিনটি যে সরলরেখায় অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[H. S. 1967]

(3, 1) এবং (5, −5) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{x-3}{3-5}=\frac{y-1}{1-(-5)}$, বা, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{6}$, বা, $x-3=\frac{y-1}{-3}$

বা, $-3x+9=y-1$, বা, $3x+y=10 \cdots (1)$

এই সমীকরণে $x=-1$, $y=13$ বসাইয়া পাই $3(-1)+13=10$

বা, $10=10$ অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সুতরাং (−1, 13) বিন্দুটি সরলরেখা-(1)-এর একটি বিন্দু।

অতএব (3, 1), (5, −5) এবং (−1, 13) বিন্দু তিনটি সমরেখ এবং $3x+y=10$ সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 4. একটি সরলরেখা $(2, \frac{5}{3})$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছিন্ন অংশটি ঐ বিন্দুতে 5 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

মনে কর, ইহা x-অক্ষকে A বিন্দুতে ও y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

∴ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$।

AB রেখা যে বিন্দুতে 5 : 4 অনুপাতে বিভক্ত হইবে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{5.0+4.a}{5+4}, \frac{5.b+4.0}{5+4}\right)$, বা, $\left(\frac{4}{9}a, \frac{5}{9}b\right)$.

কিন্তু এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত আছে $(2, \frac{5}{3})$

$\therefore \ \frac{4}{9}a=2$ বা $a=\frac{9}{2}$, এবং $\frac{5}{9}b=\frac{5}{3}$, বা $b=3$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$, অর্থাৎ $2x+3y-9=0$.

উদা. 5. $2y+4x+7=0$ রেখা অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক, রেখাটির প্রবণতা এবং উহা অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $y=mx+c$ আকারে লিখিয়া পাওয়া যায় $y=-2x-\frac{7}{2}$.

∴ নির্ণেয় প্রবণতা (gradient) $=-2$.

আবার, উহাকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে লিখিলে দাঁড়ায়, $\frac{x}{-\frac{7}{4}}+\frac{y}{-\frac{7}{2}}=1$.

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-\frac{7}{4}, 0)$ ও $(0, -\frac{7}{2})$.

সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিবে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ। মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষ বরাবর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{4}$ এবং y-অক্ষ বরাবর অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{2}$.

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$ বা $3\frac{1}{16}$ বর্গ একক।

উদা. 6. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে দুইটি সমান অংশ ছিন্ন করে ও $(3, -5)$ বিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

এখানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ সমান বলিয়া $a=b$.

∴ সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$, বা, $x+y=a$.

আবার রেখাটির $(3, -5)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $3-5=a$, বা $a=-2$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x+y=-2$, বা $x+y+2=0$.

উদা. 7. $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient)

$$=\frac{-5-3}{4-(-7)}=-\frac{8}{11}.$$

$(2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-3=m(x-2)$

∴ এই রেখাটি $(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয়গামী রেখার সমান্তরাল.

∴ উভয় রেখার প্রবণতা একই হইবে। ∴ $m=-\frac{8}{11}$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $y-3=-\frac{8}{11}(x-2)$, বা, $8x+11y-49=0$.

উদা. 8. যে সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 7 ও $5\frac{1}{4}$ তাহার সমীকরণ এবং উহা দ্বারা $(-9, 5)$ ও $(7, 9)$ বিন্দুদ্বয়সংযোজক সরলরেখা কি অনুপাতে বিভক্ত তাহা নির্ণয় কর।

অক্ষদ্বয় হইতে ছেদিতাংশ 7 ও $5\frac{1}{4}$, সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ হইবে $\frac{x}{7}+\frac{y}{5\frac{1}{4}}=1$, বা, $3x+4y=21$.

মনে কর, এই রেখাটি $(-9, 5)$ ও $(7, 9)$ বিন্দুদ্বয় সংযুক্তকারী রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{7m-9n}{m+n}, \frac{9m+5n}{m+n}\right)$.

যেহেতু এই বিন্দুটি উপরিলিখিত সরলরেখারও একটি বিন্দু,

$\therefore \quad 3\left(\frac{7m-9n}{m+n}\right)+4\left(\frac{9m+5n}{m+n}\right)=21,$

বা, $3(7m-9n)+4(9m+5n)=21(m+n)$, বা, $36m=28n$,

$\therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$. $\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=7 : 9$.

উদা. 9. কোন সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। উহার অতিভুজ 13 এবং ক্ষেত্রফল 30 হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '33]

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

ইহা অক্ষদ্বয়কে $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2}$.

প্রদত্ত প্রশ্নে, ইহাই ত্রিভুজটির অতিভুজ, $\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}=13 \cdots (1)$

আবার, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ab$, $\therefore \frac{1}{2}ab=30$, $\therefore ab=60 \cdots (2)$

অতএব, (1) ও (2) হইতে $\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+2ab=169+120 \\ \text{এবং } a^2+b^2-2ab=169-120 \end{array}\right\}$

বা, $\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=289 \\ (a-b)^2=\ \ 49\end{array}\right\} \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} a+b=\pm 17 \\ a-b=\pm\ 7\end{array}\right\}$

$\therefore \quad a=\pm 12$ ও $b=\pm 5$, এবং $a=\pm 5$ ও $b=\pm 12$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{\pm 12}+\frac{y}{\pm 5}=1$, বা, $5x+12y=\pm 60$

এবং $\frac{x}{\pm 5}+\frac{y}{\pm 12}=1$, বা, $12x+5y=\pm 60$.

উদা. 10. $(1, 2)$ ও $(2, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. 1936]

$(1, 2)$ ও $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল

$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-2}{1-2}$, বা, $x+y=3 \cdots (1)$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(1)-কে ছেদিতাংশরূপে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

∴ সরলরেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 3 ও 3 হইল।

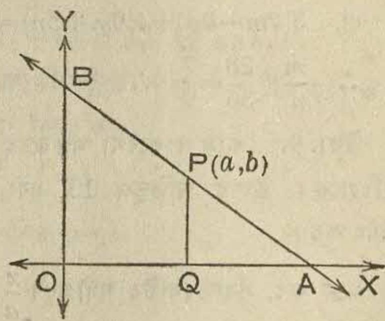
∴ সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

উদা. 11. (a, b) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহার সমীকরণ কি হইবে ?

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB অংশের মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (a, b)।

সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র নং 27

[চিত্র 27এ] x-অক্ষের উপর PQ লম্ব টান। এখন $OQ=a$, এবং $PQ=b$;

কিন্তু P, ABর মধ্যবিন্দু এবং PQ ∥ BO,

∴ Q, OAর মধ্যবিন্দু এবং $PQ=\frac{1}{2}OB$.

∴ $OA=2.OQ=2a$ এবং $OB=2PQ=2b$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$, বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

উদা. 12. $\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)=1$ এমন একটি চলমান সরলরেখা যে সতত $a+b=10$. এই রেখার অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$. AB-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. এক্ষণে, $a+b=10$, বা, $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=5$.

সুতরাং মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$-র সঞ্চারপথের সমীকরণ $x+y=5$ এবং ইহা একটি সরলরেখা।

উদা. 13. কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_0, y_0) গামী। দেখাও যে এই রেখার দ্বারা ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

$$\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=1.$$

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং ইহা x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$. AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$-র সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু সরলরেখাটি (x_0, y_0) বিন্দুগামী,

$$\therefore \quad \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=1, \text{ বা, } \quad \frac{x_0}{2.\frac{a}{2}}+\frac{y_0}{2.\frac{b}{2}}=1.$$

সুতরাং $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=1$,

উদা. 14. মূলবিন্দু হইতে $3x+4y-5=0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$3x+4y-5=0$, বা, $3x+4y=5$,

বা, $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}y=\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$ একক।

[দ্রষ্টব্য : মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইলে, সরলরেখার সমীকরণটিকে এমনভাবে সাজাইতে হইবে যেন সমীকরণটির ধ্রুবক অংশ সমান চিহ্নের ডান দিকে ধনাত্মক সংখ্যারূপে থাকে। তারপর, x ও y-এর সহগ দুইটির বর্গের সমষ্টি লইয়া, তাহার বর্গমূল দ্বারা ঐ ধ্রুবক সংখ্যাকে ভাগ করিলেই লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে।]

উদা. 15. $x+\sqrt{3}y+14=0$কে লম্ব আকারের সমীকরণে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহার লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

এখানে, $x+\sqrt{3}y+14=0$,

বা, $-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}y=\frac{14}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}$

(1)-কে ছেদিতাংশরূপে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

$\therefore$ সরলরেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ 3 ও 3 হইল।

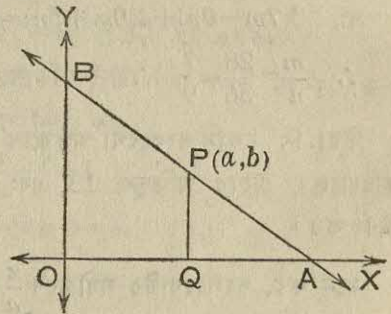
$\therefore$ সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

উদা. 11. (a, b) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহার সমীকরণ কি হইবে ?

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB অংশের মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (a, b)।

সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র নং 27

[চিত্র 27এ] x-অক্ষের উপর PQ লম্ব টান। এখন OQ $=a$, এবং PQ $=b$;

কিন্তু P, ABর মধ্যবিন্দু এবং PQ ∥ BO,

$\therefore$ Q, OAর মধ্যবিন্দু এবং PQ $=\frac{1}{2}$OB.

$\therefore$ OA $=2.$OQ $=2a$ এবং OB $=2$PQ $=2b$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$, বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

উদা. 12. $\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)=1$ এমন একটি চলমান সরলরেখা যে সতত $a+b=10$. এই রেখার অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$. AB-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. এক্ষণে, $a+b=10$, বা, $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=5$.

সুতরাং মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$-র সঞ্চারপথের সমীকরণ $x+y=5$ এবং ইহা একটি সরলরেখা।

উদা. 13. কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_0, y_0) গামী। দেখাও যে এই রেখার দ্বারা ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

$$\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=1.$$

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং ইহা x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$. AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$-র সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু সরলরেখাটি (x_0, y_0) বিন্দুগামী,

$$\therefore \quad \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=1, \text{ বা, } \quad \frac{x_0}{2.\frac{a}{2}}+\frac{y_0}{2.\frac{b}{2}}=1.$$

সুতরাং $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=1$,

উদা. 14. মূলবিন্দু হইতে $3x+4y-5=0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$3x+4y-5=0$, বা, $3x+4y=5$,

বা, $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}y=\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$ একক।

[দ্রষ্টব্য : মূলবিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইলে, সরলরেখার সমীকরণটিকে এমনভাবে সাজাইতে হইবে যেন সমীকরণটির ধ্রুবক অংশ সমান চিহ্নের ডান দিকে ধনাত্মক সংখ্যারূপে থাকে। তারপর, x ও y-এর সহগ দুইটির বর্গের সমষ্টি লইয়া, তাহার বর্গমূল দ্বারা ঐ ধ্রুবক সংখ্যাকে ভাগ করিলেই লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে।]

উদা. 15. $x+\sqrt{3}y+14=0$কে লম্ব আকারের সমীকরণে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহার লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

এখানে, $x+\sqrt{3}y+14=0$,

বা, $-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}y=\frac{14}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}$

বা, $\left(-\frac{1}{2}\right)x+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y=7$, বা, $x \cos 240^\circ + y \sin 240^\circ = 7$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে বুঝা গেল $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ও $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. এখন যেহেতু $\cos \alpha$ ও $\sin \alpha$ উভয়ের মানই ঋণাত্মক, সুতরাং কোণটি তৃতীয় পাদে (third quadrant-এ) থাকিবে।]

উপরের সমীকরণ হইতে পাই, লম্বের দৈর্ঘ্য = 7 একক।

উদা. 16. যদি মূলবিন্দু হইতে $x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{a}{2} \sin 2\theta$ ও $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের উপর লম্বদ্বয় p ও p_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4p^2 + p_1^2 = a^2$ হইবে।

এক্ষেত্রে, $p = \dfrac{\frac{a}{2} \sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = \frac{a}{2} \sin 2\theta, \quad \therefore \quad 2p = a \sin 2\theta.$

আবার, $p_1 = \dfrac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a \cos 2\theta.$

অতএব, $4p^2 + p_1^2 = (2p)^2 + (p_1)^2 = a^2 \sin^2 2\theta + a^2 \cos^2 2\theta$

$$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = a^2 \times 1 = a^2,$$

$\therefore \quad 4p^2 + p_1^2 = a^2.$

প্রশ্নমালা 3

নিম্নের প্রত্যেক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—

1. সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত এবং মূলবিন্দু হইতে এক একক দূরে y-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে।

2. সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 120° কোণে নত এবং মূলবিন্দু হইতে উহার লম্ব-দূরত্ব 5.

3. সরলরেখাটি $(5, -7)$ বিন্দু দিয়া গিয়া অক্ষদ্বয় হইতে দুই সমান অংশ ছিন্ন করিয়াছে।

4. সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত এবং $(4, 7)$ ও $(6, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডক।

5. রেখাটি $(5, 6)$ বিন্দুগামী এবং উহা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটি সমান ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। উহার যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. 1934]

6. রেখাটি $(-4, 9)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে $3:2$ অনুপাতে বিভক্ত।

7. রেখাটি (a, b) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত।

8. রেখাটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $(4, -7)$ ও $(-7, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমান্তরাল।

9. দেখাও যে $(1, 5)$, $(3, 14)$ ও $(-1, -4)$, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং রেখাটি নির্ণয় কর। [C. U. 1957]

10. যে সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী $4x+3y=12$ রেখার অংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. $(2, 3)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের সমষ্টি 10, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $A\equiv(8, 2)$, $B\equiv(-2, 7)$, $C\equiv(-2, -1)$ বিন্দুত্রয় প্রদত্ত। ABC ত্রিভুজের A বিন্দুগামী মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর যে, AB ও AC-র মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাটির BC-র সমান্তরাল। [Mysore, 1946]

13. একটি সরলরেখা এরূপে গতিশীল যে উহার সর্ব অবস্থানে উহা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়। [Bombay, 1935]

14. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত যে সরলরেখা দ্বারা y-অক্ষের ছেদিতাংশ -3, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ঐ সরলরেখার চিত্র অঙ্কন করিয়া জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে রেখাটি $x+y=2$ সরলরেখার সহিত সমকোণে নত। [C. U. 1939]

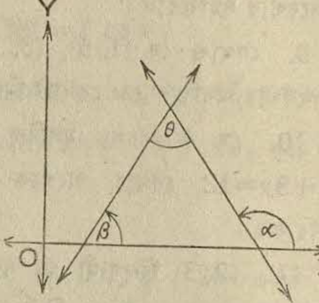
15. x-অক্ষের সহিত $4x+5y+3=0$ সরলরেখার নতি ও y-অক্ষ হইতে ছিন্নাংশ নির্ণয় কর।

16. $3x+y-6=0$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

17. $\frac{x}{2}+3y=1$ রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

§ 3-12. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়।

(*a*) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ এবং উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ θ,. সরলরেখা দুইটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α ও β কোণ উৎপন্ন করিলে, $\tan\alpha=m_1$ ও $\tan\beta=m_2$ হইবে।



চিত্র 28

চিত্র হইতে দেখা যায় $\theta=\alpha-\beta$.

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$;

সুতরাং $\theta=\tan^{-1}\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\ldots(1)$,

ইহার দ্বারাই সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণটি পাওয়া গেল।

[দ্রষ্টব্য : যখন দুইটি সরলরেখা (এক সমকোণে না থাকিয়া) পরস্পর ছেদ করিবে, তখন উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণের একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর কোণটি স্থূলকোণ হইবে। কোন অঙ্কে $\tan\theta$-র মান ধনাত্মক হইলে বুঝিতে হইবে সূক্ষ্মকোণটি নির্ণীত হইল এবং $\tan\theta$-র মান ঋণাত্মক পাওয়া গেলে বুঝিতে হইবে স্থূলকোণটি নির্ণীত হইয়াছে।]

(*b*) যখন সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হইবে, তখন উহাদিগকে $y=mx+c$ আকারে সাজাইয়া লইবে।

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad \text{বা,}\quad y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}.$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0,\quad \text{বা,}\quad y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}.$$

$$\therefore\quad m_1=-\frac{a_1}{b_1}\ \text{এবং}\ m_2=-\frac{a_2}{b_2}.$$

$$\text{সুতরাং}\ \tan\theta=\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}}=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

$$\therefore\quad \theta=\tan^{-1}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}\ \ldots\ldots(2)$$

(c) মনে কর, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = p_1$ এবং $x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = p_2$.

এক্ষেত্রে মূলবিন্দু হইতে সরলরেখাদ্বয়ের উপর যে দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইবে তাহারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α_1 ও α_2 কোণে নত থাকিবে। সুতরাং স্পষ্টতঃই বুঝা যায়, সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, বা $\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ হইবে।

§ 3·13. দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইবার শর্ত।

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে $\alpha = \beta$ হইবে। $\therefore \quad \theta = \alpha - \beta = 0$

অতএব, $\tan \theta = \tan 0° = 0$.

সুতরাং $m_1 - m_2 = 0$ [সমীকরণ (1) হইতে], বা $m_1 = m_2 \cdots$(A)

ইহাই সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হইবার নির্ণেয় শর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে দেখা যায়, $a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$ হইলে সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে। অর্থাৎ নির্ণেয় শর্ত হইল $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdots\cdots$(B)

উপরের নির্ণেয় শর্ত হইতে দেখা যায় যে উভয় সরলরেখার প্রবণতা (gradient) সমান হইলে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হয়।

§ 3·14. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবার শর্ত।

$$\cot \theta = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$ [28 নং চিত্র দেখ]

এখন $\cot \alpha = \frac{1}{m_1}$ ও $\cot \beta = \frac{1}{m_2}$

$$\therefore \quad \cot \theta = \frac{\frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{m_2} + 1}{\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}} = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}.$$

এক্ষণে, $\theta = 90°$ হইলে, $\cot \theta = 0$. $\quad \therefore \quad m_1 m_2 + 1 = 0$.

বা, $m_1 m_2 = -1 \cdots$(A) ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

সমীকরণ-(2) হইতে অনুরূপে, $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \cdots\cdot$(B) সরলরেখাদ্বয়ের পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত পাওয়া যায়।

[অন্য নিয়ম] 3·12 অনুচ্ছেদের চিত্র হইতে দেখা যায়, যখন $\theta = 90°$, তখন $\alpha = 90° + \beta$, $\therefore \ \tan \alpha = \tan (90° + \beta) = -\cot \beta = -\frac{1}{\tan \beta}$.

সুতরাং $\tan \alpha \tan \beta = -1$, বা, $m_1 m_2 = -1$.

§ 3·15. কার্যকর নিয়ম।

মনে কর, $a_1x+b_1y+c_1=0$ সরলরেখাটি $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল। $\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$

এখন, মনে কর, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k.$ $\therefore$ $a_1=a_2k$ এবং $b_1=b_2k.$

a_1, b_1এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায়

$a_2kx+b_2ky+c_1=0,$ বা, $a_2x+b_2y+\frac{c_1}{k}=0,$

অর্থাৎ, $a_2x+b_2y+c'=0$ $\left[\text{ এখানে } c'=\frac{c_1}{k} \text{ (ধ্রুবক) } \right]$

অতএব, দেখা যাইতেছে সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে শুধু পার্থক্য ধ্রুবক পদে।

যেমন ধর, একটি সরলরেখার সমীকরণ $7x-3y+1=0$ দেওয়া আছে। এই রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $7x-3y+k=0.$ এখন k-এর মান দ্বিতীয় কোন শর্ত হইতে নির্ণয় করিলেই উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইবে।

নিয়ম ঃ কোন রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় প্রদত্ত রেখার সমীকরণে শুধু ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করিবে।

আবার, উপরের সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে যখন,

$a_1a_2+b_1b_2=0,$ বা, $\frac{a_1}{b_1}=-\frac{b_2}{a_2}$ হইবে।

এক্ষণে, $a_1x+b_1y+c_1=0,$ বা, $\frac{a_1}{b_1}x+y+\frac{c_1}{b_1}=0$

বা, $-\frac{b_2}{a_2}x+y+\frac{c_1}{b_1}=0.$ বা, $-b_2x+a_2y+\frac{c_1a_2}{b_1}=0,$

অর্থাৎ $-b_2x+a_2y+c'=0$ $\left[\text{ এখানে } c'=\frac{c_1a_2}{b_1} \text{ (ধ্রুবক) } \right]$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণের x ও y-এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া একটি ধ্রুবক পদ যোগ করিলেই উহা লম্ব হইবে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যাইবে। দ্বিতীয় কোন শর্ত ইহাতে আরোপ করিয়া ধ্রুবক পদটির মান নির্ণয় করিলেই সরলরেখাটি নির্দিষ্ট হইবে।

মনে কর, $2x+3y+1=0$ রেখার সহিত লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে x ও y-এর সহগ দুইটি বিনিময় করিলে $3x$ ও $2y$ হয়। এখন উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া ধ্রুবক পদ যোগ করিতে হইবে; সুতরাং সমীকরণটি হইবে $3x-2y+k=0$.

নিয়ম : প্রদত্ত একটি সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় x ও y-এর সহগ দুইটি বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিবে এবং একটি নূতন ধ্রুবক পদ যোগ করিবে।

উদাহরণ 1. $2x+3y+4=0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে সরলরেখা $(3, -4)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১ম নিয়ম। $2x+3y+4=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.

এক্ষণে, ঐ সরলরেখা $(3, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$2\times3+3\times-4+k=0, \quad \text{বা} \quad k=6.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $2x+3y+6=0$.

২য় নিয়ম। $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y+4=m(x-3)\cdots\cdots(1).$$

সরলরেখা $2x+3y+4=0\cdots\cdots(2)$-এর প্রবণতা $=-\frac{2}{3}$.

এখন সরলরেখা-(1) সরলরেখা-(2) এর সমান্তরাল হইলে $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y+4=-\frac{2}{3}(x-3)$, বা, $2x+3y+6=0$.

উদা. 2. $3x-2y=5$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১ম নিয়ম। এখানে প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $3x-2y=5$.

ইহার উপর লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+3y+k=0$.

এক্ষণে ঐ সরলরেখা $(2, -1)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$2\times2+3\times-1+k=0, \quad \therefore \quad k=-1.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $2x+3y-1=0$.

২য় নিয়ম। $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y+1=m(x-2)\cdots\cdots(1)$$

এখন সরলরেখা $3x-2y=5\cdots\cdots(2)$-এর প্রবণতা $=\frac{3}{2}$.

∴ সরলরেখা-(1), সরলরেখা-(2)এর উপর লম্ব হইতে হইলে $m\times\frac{3}{2}=-1$, বা, $m=-\frac{2}{3}$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y+1=-\frac{2}{3}(x-2)$, বা $2x+3y-1=0$.

উদা. 3. $x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+7=0$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $(-3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+7=0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+k=0$.

এখন, ঐ সরলরেখা $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$-3\cos 80^\circ-4\sin 80^\circ+k=0$, বা, $k=3\cos 80^\circ+4\sin 80^\circ$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইবে

$$x\cos 80^\circ+y\sin 80^\circ+3\cos 80^\circ+4\sin 80^\circ=0,$$

অর্থাৎ, $(x+3)\cos 80^\circ+(y+4)\sin 80^\circ=0$.

উদা. 4. $x\cos 6^\circ+y\sin 6^\circ=3$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x\cos 6^\circ+y\sin 6^\circ=3$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x\sin 6^\circ-y\cos 6^\circ+k=0$.

এখন ঐ সরলরেখা $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলিয়া $2\sin 6^\circ-\cos 6^\circ+k=0$, বা, $k=\cos 6^\circ-2\sin 6^\circ$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইবে,

$$x\sin 6^\circ-y\cos 6^\circ+\cos 6^\circ-2\sin 6^\circ=0$$

বা, $(x-2)\sin 6^\circ-(y-1)\cos 6^\circ=0$.

অনুশীলনী IIIE

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূক্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর :—

(i) $2y-x=3$ এবং $y=\frac{1}{3}x+5$.

(ii) $y=2x+3$ এবং $3y=x+6$.

(iii) $ax-by+c=0$ এবং $(a-b)x-(a+b)y+c=0$.

(iv) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

(v) $x\cos 25^\circ+y\sin 25^\circ-7=0$ এবং

$$x\sin 25^\circ-y\cos 25^\circ+7=0.$$

2. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং (4, 7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং (−3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. (*a*). $4x-3y+1=0$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং (3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1947]

(*b*). $4x-3y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1956]

§ 3·16. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots (1) \text{ এবং } a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots (2)$$

k_1 ও k_2-এর বিভিন্ন মানের জন্য,

$$k_1(a_1x+b_1y+c_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2)=0, (k_1, k_2)\neq(0, 0).$$

সমীকরণটি (1) ও (2) সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী বিভিন্ন সরলরেখাকে প্রকাশ করে। কারণ, (1) ও (2) সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু (α, β) হইলে $a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$ এবং $a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$

$\therefore \; k_1(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)+k_2(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)=k_1.0+k_2.0=0$

সুতরাং (α, β) দ্বারা সমীকরণ (3) সিদ্ধ হয়। আবার সমীকরণ-(3), একটি এক-ঘাত সমীকরণ বলিয়া একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং k_1 ও k_2-এর বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণ (3), সরলরেখা (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দুগামী বিভিন্ন সরলরেখার সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : 1. $k_1=0$ হইলে, $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখা এবং $k_2=0$ হইলে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

2. $\frac{k_1}{k_2}$ অথবা $\frac{k_2}{k_1}$-এর মান প্রদত্ত কোনও শর্ত হইতে নির্ণয় কর। কার্যকর নিয়ম হিসাবে, সমীকরণ (3)কে

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \text{ আকারে লইবে।}$$

§ 3·17. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots (1) \text{ এবং } a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots (2).$$

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু, উভয় সরলরেখার একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু; সুতরাং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

মনে কর, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

সুতরাং $a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$...(3)

এবং $a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$···(4)

এক্ষণে (3) ও (4) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\beta}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $\beta=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, ইহাই নির্ণেয় স্থানাঙ্ক।

[**দ্রষ্টব্য :** ছেদবিন্দুর নির্দিষ্ট মান পাওয়ার শর্ত $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. কিন্তু যদি $a_1b_2-a_2b_1=0$, বা, $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সরলরেখা দুইটি ছেদ করিবে না। আবার দেখ, 3·13 অনুচ্ছেদে বর্ণিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হইবার শর্তও $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$. এবং দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা পরস্পর ছেদ করে না।]

§ 3·18. তিনটি সরলরেখার সমবিন্দু হইবার শর্ত নির্ণয়।

মনে কর, সরলরেখা তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে

$a_1x+b_1y+c_1=0$···(1),

$a_2x+b_2y+c_2=0$···(2),

এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$···(3).

(1) ও (2) সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

সমীকরণ-(3) যদি ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় সরলরেখাটি (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হইবে অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে। অর্থাৎ যদি

$$a_3\times\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_3\times\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+c_3=0 \text{ হয়},$$

বা, $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$···(A)

ইহাই সরলরেখা তিনটির সমবিন্দু হইবার শর্ত।

§ 3·19. ভিন্ন আকারে শর্ত।

যদি p, q, r এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায় যে সমীকরণ (1), (2) ও (3)এর বামপক্ষের রাশিকে যথাক্রমে p, q ও r দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল তিনটি যুক্ত করিলে আপনা হইতেই শূন্য হয়, তবে (1), (2) ও (3) দ্বারা যে তিনটি সরলরেখা সূচিত হইতেছে উহারা সমবিন্দু হইবে।

অর্থাৎ, যদি p, q, rএর এমন তিনটি মান (মান তিনটি সমান হইতে পারে কিন্তু শূন্য নহে) পাওয়া যায় যে, অভেদে

$$p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3)=0 \cdots \text{(B)}$$

হয়, তবে (1), (2) ও (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে ;

অর্থাৎ, x, yএর মান যাহাই হউক না কেন, (B)এর বামপক্ষ শূন্য হইবে। ইহা হইতে স্পষ্ট বুঝা যায় যে x ও yএর সহগ দুইটি এবং ধ্রুবকটির প্রত্যেকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

মনে কর, সরলরেখা (1) ও (2)এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ \text{এবং } a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{array}\right\}$$

সুতরাং $p(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)+q(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$
$$+r(a_3\alpha+b_3\beta+c_3)=0$$

(কারণ, x, yএর যে-কোন মানেই (B) শূন্য হয়, কাজেই এক্ষেত্রে x, y-এর α, β মানেও (B) শূন্য হইবে।)

$$\therefore \ a_3\alpha+b_3\beta+c_3=-\frac{p}{r}\ (a_1\alpha+b_1\beta+c_1)-\frac{q}{r}(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$$

$$=-\frac{p}{r}\times 0-\frac{q}{r}\times 0 \text{ (B হইতে পাওয়া যায়)}=0.$$

অতএব সমীকরণ-(3)টি (α, β) দ্বারা সিদ্ধ হয় ; অর্থাৎ (1), (2), ও (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

[দ্রষ্টব্য : তিনটি সরলরেখার সমীকরণ যখন এমনভাবে থাকে যে, দেখিলেই বুঝা যায়, $p, q\ r$এর মান কি ধরিলে x, yএর সহগ দুইটি ও ধ্রুবক পদটি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে আপনা আপনি শূন্য হয়। সেইসব ক্ষেত্রে (B)এর উপযোগিতা খুব বেশী। অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় p, q, r প্রত্যেকটির মান এক ধরিলেই শর্তটি সিদ্ধ হয়। তবে যখন সমীকরণ তিনটিতে x, y প্রভৃতির সহগগুলি 1, 2, 3 প্রভৃতি সংখ্যা দ্বারা দেওয়া থাকে, তখনই এই পদ্ধতি সহায়ক হয় না।]

উদাহরণ 1. $2x+3y-1=0$ এবং $3x-4y+7=0$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু এবং (5, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১ম পদ্ধতি। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=-1$ ও $y=1$.

$\therefore$ উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

এখন, (5, 4) ও $(-1, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যে সরলরেখা যাইবে তাহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{y-4}{4-1}=\frac{x-5}{5-(-1)}, \text{ বা, } \frac{y-4}{3}=\frac{x-5}{6}, \text{ বা, } x-2y+3=0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x-2y+3=0$.

২য় পদ্ধতি। $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে।

$2x+3y-1+k(3x-4y+7)=0$. ইহা (5, 4) বিন্দুগামী হইলে $2.5+3.4-1+k(3.5-4.4+7)=0$ হইবে,

বা, $21+6k=0$, $\therefore$ $k=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে $2x+3y-1-\frac{7}{2}(3x-4y+7)=0$,

বা, $x-2y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. $4x+y-4=0$ এবং $3x+2y-5=0$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী এবং $x-2y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১ম পদ্ধতি। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{8}{5}$.

$\therefore$ ঐ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$.

এখন, $x-2y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+y+k=0$.

যেহেতু, ইহা $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $2\times\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+k=0$, $\therefore$ $k=-\frac{14}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $2x+y-\frac{14}{5}=0$ অর্থাৎ $10x+5y-14=0$.

২য় পদ্ধতি। $4x+y-4=0$ ও $3x+2y-5=0$; এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $4x+y-4+k(3x+2y-5)=0$, বা, $(3k+4)x+(2k+1)y-(4+5k)=0\cdots(1)$.

এক্ষণে (1)-সরলরেখাটি $x-2y+1=0$ রেখার উপর লম্ব হইবে যদি $(3k+4)\times 1+(2k+1)\times -2=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $k=2$ হয়।

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হইল $4x+y-4+2(3x+2y-5)=0$,

বা, $10x+5y-14=0$.

উদা. 3. $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১ম পদ্ধতি। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$.

এখন $3x+4y=0$ রেখাটির সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $3x+4y+k=0$. ইহা $\left(\frac{7b}{5}, \frac{b}{5}\right)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$$3\times\frac{7b}{5}+\frac{4b}{5}+k=0 \text{ হইবে}, \quad \therefore \quad k=-5b.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x+4y-5b=0$.

২য় পদ্ধতি। $x-2y-b=0$ ও $x+3y-2b=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হয়।

$$(x-2y-b)+k(x+3y-2b)=0$$

বা, $(k+1)x+y(3k-2)-b(2k+1)=0 \cdots (1)$.

এখন (1) সরলরেখাটি $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল হইবে যখন $\frac{k+1}{3}=\frac{3k-2}{4}$ হইবে [§ 3·15 দেখ] বা, $k=2$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(2+1)x+(6-2)y-b(4+1)=0$.

বা, $3x+4y-5b=0$.

অনুশীলনী IIIF

1. নীচের প্রত্যেক সরলরেখাযুগলের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

(i) $2x-3y+5=0$ এবং $7x+4y-3=0$ [Utkal 1947]

(ii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. [C. U. 1943]

(iii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$. [C. U. 1941]

এক্ষেত্রে যে সরলরেখা এই ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং উভয় অক্ষের সহিত 45° কোণে নত থাকে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iv) $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ এবং $x\cos\phi+y\sin\phi=p$.

2. প্রমাণ কর যে নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

(a) $x+y+1=0, 2x+3y+1=0, 3x+4y+2=0.$

(b) $4x-3y-31=0, 7x-5y-56=0 ; 11x-9y-80=0.$

(c) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 ; \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1 , x=y.$

(d) $ax+(b+c)y-d=0 ; bx+(c+a)y-d=0 ;$
$cx+(a+b)y-d=0,$

(e) $2x-7y+11=0 ; 3x-2y+1=0 ; x-12y+21=0.$

[C. U. 1945]

3. যে সরলরেখাটি (3, 2) বিন্দু এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায়, তাহার সমীকরণ এবং উহা দ্বারা অক্ষদ্বয় হইতে ছিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার

প্রবণতা (gradient) $=\dfrac{-5-3}{4-(-7)}=-\dfrac{8}{11}.$

সুতরাং উহার উপর কোন লম্বের প্রবণতা হইবে $\frac{11}{8}$.

আবার, ঐ লম্ব (4, −5) ও (−7, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুগামী।

এখন ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{4-7}{2}, \frac{-5+3}{2})$ বা $(-\frac{3}{2}, -1)$।

অতএব লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $y+1=\frac{11}{8}(x+\frac{3}{2})$,

বা, $16y-22x-17=0.$

উদা. 2. যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা $2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a ও b-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1948]

$2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া $x=2$, $y=3$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ ঐ দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)। এখন $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হইবে $4x+3y+k=0$. যেহেতু ইহা (2, 3) বিন্দুগামী $\therefore\ 4\times2+3\times3+k=0$, বা, $k=-17$. অতএব, সরলরেখার সমীকরণ $4x+3y-17=0$; ইহাকে ছেদিতাংশ আকারে লিখিলে পাই, $\frac{x}{\frac{17}{4}}+\frac{y}{\frac{17}{3}}=1$. যেহেতু এই সমীকরণ এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সমীকরণ একই সরলরেখাকে প্রকাশ করে, অতএব $a=\frac{17}{4}$, $b=\frac{17}{3}$.

উদা. 3. যে সরলরেখাগুলি $y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$-এর ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং মূলবিন্দু হইতে যাহাদের দূরত্ব $\frac{7}{\sqrt{2}}$, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [U. P. B. 1942]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=3$ এবং $y=4$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4), ঐ ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল $(y-4)=m(x-3)$, বা, $mx-y+(4-3m)=0$.

মূলবিন্দু (0, 0) হইতে ঐ সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব$=\dfrac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}$.

এক্ষেত্রে, $\dfrac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, বা, $\dfrac{16+9m^2-24m}{1+m^2}=\dfrac{49}{2}$,

বা, $31m^2+48m+17=0$, বা $(31m+17)(m+1)=0$,

$$\therefore\ m=-1,\ \text{বা}\ -\tfrac{17}{31}.$$

$m=-1$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-1(x-3)$, বা $x+y=7$; এবং $m=-\frac{17}{31}$ হইলে সমীকরণটি হইবে $y-4=-\frac{17}{31}(x-3)$, বা. $31y+17x=175$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x+y=7$ এবং $17x+31y=175$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ ও $4x+3y-4=0$ রেখাগুলি সমবিন্দু।

$2x-y+8=0$ ও $3x+y+2=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(-2, 4)$।

এখন, যদি $(-2, 4)$ বিন্দু দ্বারা $4x+3y-4=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়,

তবে এই তৃতীয় সরলরেখাও প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুগামী হইবে, অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে।

এক্ষণে, $4x+3y-4=4(-2)+3(4)-4=-8+12-4=0.$

অতএব, দেখা গেল তৃতীয় সমীকরণটি $(-2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হইতেছে।

সুতরাং তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $(b+c)x+ay-d=0$, $(c+a)x+by-d=0$ এবং $(a+b)x+cy-d=0$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

এখানে $(b+c)x+ay-d=0\cdots(1)$

$(c+a)x+by-d=0\cdots(2)$

এবং $(a+b)x+cy-d=0\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে যদি p, q, r এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা পাওয়া যায়, যে

আপনা হইতেই $p\{(b+c)x+ay-d\}+q\{(c+a)x+by-d\}$
$+r\{(a+b)x+cy-d\}=0\cdots$(A)

এখানে x-এর সহগ $p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)\cdots(4)$

y এর সহগ $pa+qb+rc \quad \cdots(5)$

এবং ধ্রুবক পদ $(p+q+r)d \quad \ldots(6)$

এখন, p, q, rএর মান এমন হওয়া চাই যে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকটি রাশি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে শূন্য হইবে।

স্পষ্টত: দেখা যাইতেছে $p=b-c$, $q=c-a$ এবং $r=a-b$ হইলে (4), (5) ও (6) প্রত্যেকেই শূন্য হয় অর্থাৎ (A)-ও তৎক্ষণাৎ শূন্য হয়।

অতএব, (1), (2) এবং (3) রেখাত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 6. mএর মান কি হইলে, $y=3x-1$, $2y=x+3$ এবং $3y=mx+4$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে? [C. U. '40, '55]

$y=3x-1$ ও $2y=x+3$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই $(1, 2)$।

এখন, $3y=mx+4$, এই রেখাটি প্রথম দুইটি রেখার সহিত সমবিন্দু হইবে যখন তৃতীয় সমীকরণটি $(1, 2)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ 6=m+4$, বা, $m=2.$

অতএব দেখা গেল তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হইবে যখন $m=2$ হইবে।

উদা. 7. যে সরলরেখা $3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ সরলরেখা-

দ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশদ্বয় ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. B. Sc. 1947]

$3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ এই রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$$3x-4y+1+k(5x+y-1)=0$$

বা, $(5k+3)x+(k-4)y-(k-1)=0\cdots(1)$

ইহাকে ছেদিতাংশরূপ (intercept form) সমীকরণে সাজাইয়া পাওয়া যায় $\dfrac{x}{\frac{k-1}{5k+3}}+\dfrac{y}{\frac{k-1}{k-4}}=1.$

$\because$ (1)-সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছেদ করে

$\therefore$ $\dfrac{k-1}{5k+3}=\dfrac{k-1}{k-4}$, বা, $4k^2+3k-7=0$, $\therefore k=1$, বা, $-\frac{7}{4}$.

এখন দেখা যায় সমীকরণ-(1)এ $k=1$ বসাইলে ধ্রুবক পদ $k-1=0$ হয়, তাহাতে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হয় অর্থাৎ অক্ষদ্বয় হইতে কোন অংশই ছেদ করে না। সুতরাং এক্ষেত্রে $k=1$ হইতে পারে না।

অতএব, $k=-\frac{7}{4}$ ধরিয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হইবে

$$(5\times-\tfrac{7}{4}+3)x+(-\tfrac{7}{4}-4)y-(-\tfrac{7}{4}-1)=0,$$

বা, $-\frac{23}{4}x-\frac{23}{4}y+\frac{11}{4}=0$ অর্থৎ $23x+23y-11=0$.

উদা. 8. $2x+y-3=0$ এবং $x+3y+2=0$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর, $2x+y-3=0$ ও $x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি θ.

3·13(*b*) অনুচ্ছেদে, সূত্র (2)-তে দেখান হইয়াছে

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$. $\because$ এক্ষেত্রে কোণটি সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore$ এমনভাবে a_1, b_1, a_2, b_2 মানগুলি লইতে হইবে যাহাতে $a_2b_1-a_1b_2$ ধনাত্মক হয়।

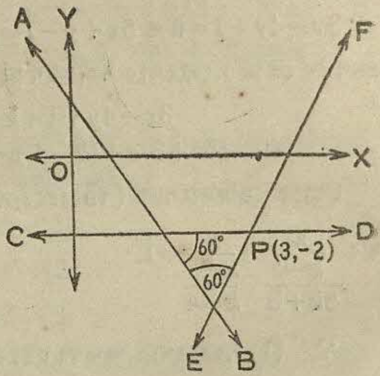
এখানে $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2\times3-1\times1}{2\times1+3\times1}=\tan^{-1}1=45°$.

$\therefore$ নির্ণেয় কোণটি 45°.

উদা. 9. যে সরলরেখাদ্বয় (3, −2) বিন্দু দিয়া যায় এবং $\sqrt{3}x+y=1$ রেখার সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ হইল সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$, P হইল বিন্দু $(3, -2)$, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সহিত $60°$ কোণ করিয়া P বিন্দুগামী $\overleftrightarrow{CD}$ ও $\overleftrightarrow{EF}$ দুইটি সরলরেখা আছে। ইহাদের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে রাখিবে চিত্র অঙ্কন করিবার কোন প্রয়োজন নাই। কিভাবে দুইটি সরলরেখা প্রদত্ত সরলরেখার সহিত একই কোণে নত থাকে তাহা দেখাইবার জন্য চিত্র দেওয়া হইল।]



চিত্র 29

$(3, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y+2=m(x-3)$ ···(1)

যেহেতু (1)-রেখাটি, সরলরেখা $\sqrt{3}x+y=1$এর সহিত $60°$ কোণে নত আছে,

$$\therefore \tan 60° = \frac{m-(-\sqrt{3})}{1+m(-\sqrt{3})} \cdots \text{(i)} \text{ এবং } \tan 60° = \frac{-\sqrt{3}-m}{1+m(-\sqrt{3})} \cdots \text{(ii)}$$

(i) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$, $\therefore m=0$.

(ii) হইতে পাওয়া যায়, $\sqrt{3}=\dfrac{-m-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$,

বা, $\sqrt{3}-3m=-m-\sqrt{3}$, $\therefore m=\sqrt{3}$.

এখন সমীকরণ-(1)-এ একবার $m=0$ ও আবার $m=\sqrt{3}$ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যায়, $y+2=0$,

এবং $y+2=\sqrt{3}(x-3)$, বা, $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$.

অতএব, $y+2=0$ এবং $y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+2=0$ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়।

দ্রষ্টব্য : এখানে m-এর মান অজ্ঞাত। উহা $-\sqrt{3}$ অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে।

সেইজন্য (i) ও (ii)তে m হইতে $-\sqrt{3}$ একবার বিয়োগ করা হইয়াছে এবং আর একবার $-\sqrt{3}$ হইতে m বিয়োগ করা হইয়াছে। ইহার ফলেই সম্ভাব্য দুইটি সরলরেখা পাওয়া গেল।

উদা. 10. প্রমাণ কর যে $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$ ও $y+\sqrt{3}x=4$ রেখাগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. 1957]

সমীকরণ তিনটি $y=2\cdots(1)$, $y=\sqrt{3}x+5 \cdots(2)$

এবং $y=-\sqrt{3}x+4\cdots(3)$

সমীকরণ-(1) x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

সমীকরণ-(2) এমন একটি রেখা যাহার প্রবণতা= $\sqrt{3}$ সুতরাং $\tan 60°=\sqrt{3}$ বলিয়া ইহা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 60° কোণে নত।

সমীকরণ-(3) এমন একটি সরলরেখা যাহার প্রবণতা $=-\sqrt{3}$, সুতরাং ইহা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 120° কোণে নত

অতএব, (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল (1)-সরলরেখার সহিতও যথাক্রমে 60° ও 120° কোণে নত ; অর্থাৎ (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় পরস্পরের দিকে সরলরেখা-(1)-এর সহিত 60° কোণে নত।

∴ দেখা যাইতেছে (1), (2) ও (3) সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের দুইটি কোণের প্রত্যেকটি $=60°$, ∴ উহার তৃতীয় কোণও 60° হইবে।

অতএব ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[এই প্রশ্নটিতে (1), (2) ও (3)এর ছেদবিন্দু তিনটি বাহির করিয়া বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য সমান দেখাইয়াও ইহা একটি সমবাহু ত্রিভুজ প্রমাণ করা যায়।]

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানাই যথেষ্ট ; কারণ, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ($a=$বাহুর দৈর্ঘ্য)।

এখানে, $y=2$ সরলরেখার সহিত (2) ও (3) সরলরেখাদ্বয় যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহা স্থির করিতে (2) ও (3)-এ $y=2$ বসাইবে।

∴ (2) হইতে $x=-\sqrt{3}$ এবং (3) হইতে $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ পাওয়া যায়।

উভয় বিন্দুরই কোটি=2. সুতরাং উভয় বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{2+3}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$

অতএব, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{12}\sqrt{3}$ বর্গ একক।

উদা. 11. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$।

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D মনে কর। ∴ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ এবং BCর প্রবণতা $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$,

সুতরাং BCর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের (অর্থাৎ D বিন্দুগামী ও BC-র উপর লম্বের) সমীকরণ $y-\frac{y_2+y_3}{2}=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$

$\left[\text{এখানে BC-র উপর লম্বের প্রবণতা } m=-\frac{1}{\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}}\right]$

বা, $2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)-(x_2{}^2-x_3{}^2)-(y_2{}^2-y_3{}^2)=0$ ...(1) [সরল করিয়া]

অনুরূপে CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F ধরিয়া বাহু দুইটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ দুইটি পাওয়া যায়।

$2x(x_3-x_1)+2y(y_3-y_1)-(x_3{}^2-x_1{}^2)-(y_3{}^2-y_1{}^2)=0$ ...(2)

এবং $2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)-(x_1{}^2-x_2{}^2)-(y_1{}^2-y_2{}^2)=0$ ...(3)

(1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়।

[§ 3·21 অনুসারে এখানে $p=q=r=1$], সুতরাং (1), (2) ও (3) রেখা তিনটি সমবিন্দু।

অতএব, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 12. (2, 3)-বিন্দু হইতে $3x-5y+9=0$ রেখা বরাবর $3x-2y=7$এর ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

$3x-5y+9=0$...(1), বা, $y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$, ∴ রেখাটির প্রবণতা $\frac{3}{5}$ অর্থাৎ, সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত থাকিলে $\tan\theta=\frac{3}{5}$.

$$\therefore \frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{5}, \therefore \frac{\sin^2\theta}{9}=\frac{\cos^2\theta}{25}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{9+25}=\frac{1}{34}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{3}=\frac{\cos\theta}{5}=\frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{34}} \text{ এবং } \cos\theta=\frac{5}{\sqrt{34}}.$$

এখন মনে কর, (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{x-2}{\cos\theta}=\frac{y-3}{\sin\theta}=r$ [(2, 3) বিন্দু হইতে রেখা-(1) ও $3x-2y=7$ রেখার ছেদবিন্দু P (x, y)-এর দূরত্ব$=r$;]

$\therefore \quad x=2+r \cos \theta$ এবং $y=3+r \sin \theta$,

বা, $x=2+\frac{5}{\sqrt{34}} r$ এবং $y=3+\frac{3}{\sqrt{34}} r$.

এক্ষেত্রে, P বিন্দুটি $3x-2y=7$এরও একটি বিন্দু হওয়ায়

$3\left(2+\frac{5r}{\sqrt{34}}\right)-2\left(3+\frac{3r}{\sqrt{34}}\right)=7,$

বা, $6+\frac{15}{\sqrt{34}} r-6-\frac{6}{\sqrt{34}} r=7$, বা, $\frac{9}{\sqrt{34}} r=7$,

$\therefore \quad r=\frac{7}{9}\sqrt{34}$, ইহাই নির্ণেয় দূরত্ব।

[এখানে সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া ঐ ছেদবিন্দু হইতে (2, 3)-এর দূরত্ব নির্ণয় করিলেও হইত।]

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত সরলরেখা বরাবর আসিলে $ax+by+c=0$ হইতে (x_0, y_0) বিন্দুর দূরত্ব হয়

$$-\frac{ax_0+by_0+c}{a \cos \theta+b \sin \theta}.$$ [C. U. 1954]

x-অক্ষের সহিত θ কোণে নত সরলরেখার সমান্তরাল (x_0, y_0) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_0=\tan \theta(x-x_0)$

বা, $\frac{x-x_0}{\cos \theta}=\frac{y-y_0}{\sin \theta}$......(1)

এখানে (1)-রেখা বরাবর (x_0, y_0) হইতে $ax+by+c=0$ রেখার দূরত্ব$=r$ ধরিলে পাওয়া যায় $\frac{x-x_0}{\cos \theta}=\frac{y-y_0}{\sin \theta}=r$.

$\therefore \quad x=x_0+r \cos \theta$ এবং $y=y_0+r \sin \theta$.

যেহেতু (x_0, y_0) বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখারও একটি বিন্দু,

সুতরাং, $a(x_0+r \cos \theta)+b(y_0+r \sin \theta)+c=0$,

বা, $r(a \cos \theta+b \sin \theta)=-(ax_0+by_0+c)$,

$$\therefore \quad r=-\frac{ax_0+by_0+c}{a \cos \theta+b \sin \theta}.$$

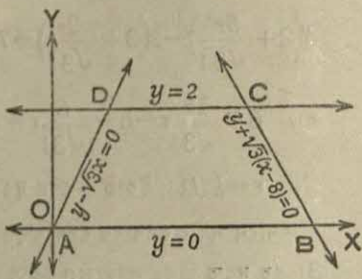
উদা. 14. প্রমাণ কর যে, $y=0$, $y+\sqrt{3}(x-8)=0$, $y=2$ ও $y-\sqrt{3}x=0$ রেখা চারিটি একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম গঠন করে। উহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক এবং উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমীকরণগুলি $y=0\cdots(1)$ $\quad y+\sqrt{3}(x-8)=0\cdots\cdots(2)$,

$y=2\cdots(3)$ এবং $y-\sqrt{3}x=0\cdots\cdots(4)$

এখানে, সমীকরণ-(1) হইল x-অক্ষ এবং সমীকরণ-(3) হইল x-অক্ষ হইতে 2 একক দূরে x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল রেখা।

সমীকরণ (2) ও (4)-এর প্রবণতা বা m-এর মান যথাক্রমে $-\sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}$; সুতরাং এই দুই সরলরেখা x-অক্ষের সহিত অর্থাৎ $y=0$ সরলরেখার সহিত যথাক্রমে $120°$ ও $60°$ কোণে নত।



চিত্র 30

সুতরাং ইহারা $y=2$ রেখার সহিতও $120°$ ও $60°$ কোণে নত আছে। অতএব (1), (2), (3) ও (4) রেখা চতুষ্টয় দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটির দুইটি বাহু সমান্তরাল ও অপর বাহু দুইটি তির্যক হওয়ায় চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়ম।

আবার, যেহেতু তির্যক বাহু দুইটি সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে সুতরাং ট্রাপিজিয়মটি বৃত্তস্থ।

মনে কর, (1) ও (4)-এর ছেদবিন্দু A, (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু B, (2) ও (3)-এর ছেদবিন্দু C এবং (3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D. [চিত্র দেখ]

(1) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(0, 0)$,

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া B বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(8, 0)$,

(2) ও (3) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া C বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$

এবং (3) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া D বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$

$\therefore$ AB=8 এবং $CD=\sqrt{\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(2-2)^2}=8-\frac{4}{\sqrt{3}}$.

অতএব ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব

$=\frac{1}{2}\left(8+8-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\times 2=16-\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}(12-\sqrt{3})$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 4

1. প্রদত্ত শর্তে নিম্নের প্রত্যেক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(a) সরলরেখাটি (1, 2) বিন্দু দিয়া এবং $x+3y+1=0$ ও $2x+7y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায়। [C. U. 1946]

(b) সরলরেখাটি মূল বিন্দু দিয়া এবং $2x+3y=1$ ও $x-y=2$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায়। [C. U. 1933]

(c) সরলরেখাটি $2x+3y+7=0$ রেখার সমান্তরাল এবং $25x+41y-8=0$ ও $5x+7y+9=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া যায়। [U. P. B. 1941]

(d) সরলরেখাটি $3x-y=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $x+2y=0$ ও $y+4x+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। [C. U. 1932]

(e) সরলরেখাটি $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়া যায় এবং $y-x=8$ রেখার উপর লম্ব হয়।

[C. U. 1950 ; U. P. B. 1949]

(f) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$-এর ছেদবিন্দুগামী। [U. P. B 1948]

(g) সরলরেখাটি $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং $6x-7y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব হয়। [C. U. 1930, '44]

(h) সরলরেখাটি $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $2x+y-5=0$ ও $x-y-7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায়।

2. (a) p-এর মান কত হইলে $3x+y-2=0$, $px+2y+3=0$ ও $2x-y-3=0$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে ?

(b) যদি $2x-3y+k=0$, $3x-4y-1=0$ ও $4x-5y-2=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হয়, তবে k-এর মান কত ?

(c) প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দু ও (2, 3) বিন্দু সংযোজক সরলরেখাটি $5x-3y=2$ ও $x+y=10$ সরলরেখাদ্বয়ের সহিত সমবিন্দু।

[Andhra, 1947]

(d) প্রমাণ কর যে $x-y-7=0$, $x+2y+6=0$ ও $2x+y-1=0$ একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যায় এবং ঐ বিন্দুটি (5, −4), (3, −2) ও (1, −6) বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী। [C. U. 1956]

3. প্রমাণ কর যে $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ ও $cx+ay+b=0$ দ্বারা সূচিত রেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে যদি $a+b+c=0$ হয়।

4. প্রমাণ কর যে নীচের প্রত্যেক সরলরেখাযুগল পরস্পর সমান্তরাল :

(a) $3x+2y+5=0$ এবং $6x+4y-7=0$.

(b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং $bx+ay=c$.

5. প্রমাণ কর যে নীচের প্রত্যেক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব :

(a) $4x-5y+7=0$ এবং $10x+8y+3=0$.

(b) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{2x}{5}-\frac{y}{2}=1$.

6. একটি সরলরেখা (−3, 7) ও (5, −4) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব এবং উহাকে 4 : 7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. প্রমাণ কর যে $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ ও $x=0$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\cdot\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$ হইবে।

8. দেখাও যে $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$,

$(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$ ও $x+y=0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং উহার শীর্ষকোণ $2\tan^{-1}(\frac{a}{b})$. উহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. (a) প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ ও $\sqrt{3}y+x=1$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে।

(b) প্রমাণ কর যে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

10. নিম্নের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(*a*) রেখাটি (3, 2) বিন্দুগামী এবং $x=2y+4$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত।

(*b*) রেখাটি (7, 9) বিন্দুগামী এবং $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$ সরলরেখার সহিত 60° কোণে নত।

(*c*) রেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং $x+y+\sqrt{3}(y-x)=a$ সরলরেখার সহিত 75° কোণ করে।

(*d*) রেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং $x\cos\theta+y\sin\theta=p$এর উপর লম্ব।

11. (3, 4) বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকটি $x-y=2$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত আছে। উহাদের সমীকরণ এবং রেখা তিনটির অন্তর্গত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. (4, 5) বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে দুইটি সরলরেখা $3x=4y+7$ ও $5y=12x+6$ সরলরেখা দুইটির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. (−2, 5) বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার মধ্যে একটি প্রদত্ত $x-y+5=0$ রেখার সহিত $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে নত এবং প্রদত্ত রেখাটি অপরটির সহিত $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ কোণ করিয়াছে। ঐ অঙ্কিত রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. (*a*) (1, 2)-বিন্দু হইতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ সরলরেখার উপর লম্বের মূলবিন্দু হইতে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*b*) দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকটি মূলবিন্দু হইতে 5 একক দূরবর্তী এবং x-অক্ষের সহিত 30° কোণে নত। উহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য কত? [J. B. A.]

15. (*a*) (3, 8)-বিন্দু হইতে $4x-3y+12=0$ রেখা বরাবর এবং উহার সহিত $4x+5y=60$ রেখার ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব কত?

(*b*) (−2, 7) বিন্দু হইতে $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$ সরলরেখা বরাবর উহার সহিত $y=x+2$ এর ছেদবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

16. $5x-12y+7=0$ রেখার সমান্তরাল P (4, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ এবং P ও $x+y=24$ রেখার মধ্যবর্তী উহার ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

17. প্রমাণ কর যে $y=0$, $\sqrt{3}y+x-10=0$, $y=\sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}y-x=0$ রেখা চারিটি একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম উৎপন্ন করে। উহার কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ও উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. $x=a$, $x=a'$, $y=b$ ও $y=b'$ বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1952]

19. প্রমাণ কর যে, যদি $a+b\neq 0$ হয়, তবে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি এরূপ একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু হইবে যাহার সংলগ্ন বাহুদ্বয় অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত। [C. U. 1951]

20. কোন বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমীকরণ যথাক্রমে $5x+12y-10=0$ ও $5x+12y+29=0$ এবং অন্য একটি বাহু $(-3, 5)$ বিন্দুগামী। অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [T. P. '69]

§ 3·20. প্রদত্ত একটি সরলরেখা সম্পর্কে একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়

উপপাদ্য। (i) $ah+bk+c>0$ হইলে, (h, k) বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপরদিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে যদি $b>0$ হয় এবং নীচের দিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে যদি $b<0$ হয়।

(ii) $ah+bk+c<0$ হইলে (h, k) বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার নীচের দিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে যদি $b>0$ হয় এবং উপর দিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে যদি $b<0$ হয়।

প্রমাণ। (i) প্রথমে মনে কর $ah+bk+c>0\cdots(1)$ এবং (h, k) বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব $ax+by+c=0$ সরলরেখাকে (h, k') বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore \quad ah+bk'+c=0\cdots(2)$$

সুতরাং $(1)-(2)$ করিয়া পাই, $b(k-k')>0\cdots(3)$

এক্ষণে, যদি $b>0$ হয়, তবে $k-k'>0$ বা $k>k'$

সুতরাং (h, k) বিন্দুটি (h, k') বিন্দুটির উপরদিকে

অর্থাৎ $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপরদিকের অঞ্চলে অবস্থিত।

আবার যদি $b<0$ হয়, তবে (3) হইতে পাই, $k-k'<0$ বা, $k<k'$. সুতরাং (h, k) বিন্দুটি (h, k') বিন্দুটির নীচের দিকে অর্থাৎ $ax+by+c=0$ সরলরেখার নীচের দিকের অঞ্চলে অবস্থিত।

(ii) এইবার মনে কর, $ah+bk+c<0 \cdots (4)$ এবং (h, k) বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব $ax+by+c=0$ সরলরেখাকে (h, k') বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore \quad ah+bk'+c=0 \cdots (5)$$

সুতরাং অসমীকরণ-(4) হইতে সমীকরণ (5) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$b(k-k')<0 \cdots (6)$$

এক্ষণে যদি $b>0$ হয়, তবে (6) হইতে পাই $k-k'<0$ বা $k<k'$; সুতরাং (h, k) বিন্দুটি (h, k') বিন্দুটির নীচের দিকে অর্থাৎ $ax+by+c=0$ সরল-রেখার নীচের দিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে। যদি $b<0$ হয়, তবে (6) হইতে পাই, $k-k'>0$ বা $k>k'$; সুতরাং (h, k) বিন্দুটি (h, k') বিন্দুটির উপরদিকে অর্থাৎ $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপরদিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে।

সিদ্ধান্ত। উপরের উপপাদ্য হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্ত করা যায় :

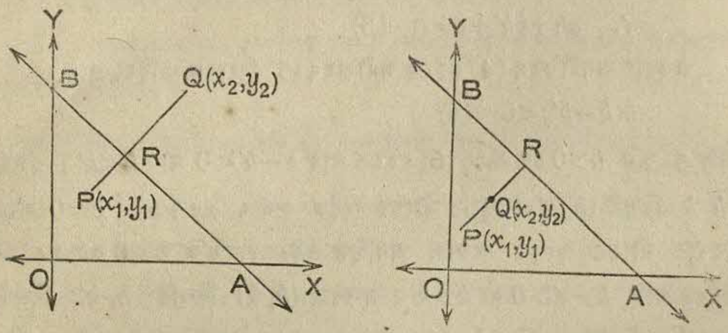
(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকিবে যখন ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি একই চিহ্নযুক্ত হইবে। কিন্তু বিন্দু দুইটি বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, ঐ রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

কারণ ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি উভয়েই ধনাত্মক (>0) অথবা উভয়েই ঋণাত্মক (<0) হইলে, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) উভয় বিন্দুই $ax+by+c=0$ সরলরেখার যথাক্রমে উপরদিকে অথবা নীচের দিকে অবস্থিত হইবে যদি $b>0$ হয়। যদি $b>0$ হয়, এবং উহাদের বিপরীত চিহ্ন হয়, তবে উহাদের একটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপরদিকের অঞ্চলে এবং অপরটি ঐ সরলরেখার নীচের দিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে। রাশি দুইটি উভয়েই ধনাত্মক অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হইলে এবং $b<0$ হইলে বিন্দু-দুইটি উভয়েই যথাক্রমে সরলরেখাটির নীচের দিকের অঞ্চলে অথবা উপরদিকের অঞ্চলে অবস্থিত হইবে। $b<0$ এবং রাশি দুইটির বিপরীত চিহ্ন হইলে উহাদের একটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপর দিকে এবং অপরটি সরল-রেখাটির নীচের দিকে অবস্থিত হইবে।

বিকল্প পদ্ধতি :—

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+c=0$ এবং ইহা অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রথমতঃ, মনে কর, P (x_1, y_1) ও Q (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উভয় পার্শ্বে আছে [প্রথম চিত্র]।



চিত্র 31

PQ যুক্ত করিলে উহা যেন $\overleftrightarrow{AB}$ রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর, R বিন্দুতে $\overline{PQ}$ রেখা $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল অর্থাৎ $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2+nx_1}{m+n}+b.\frac{my_2+ny_1}{m+n}+c=0,$$

বা, $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=-\frac{m}{n}$ [সরল করিয়া]...(1)

দ্বিতীয়তঃ মনে কর, P (x_1, y_1) ও Q (x_2, y_2) $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত [দ্বিতীয় চিত্র]।

এখানে PQ যুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে $\overleftrightarrow{AB}$কে R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং PQ রেখা R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইল মনে কর অর্থাৎ, $\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

যেহেতু, R বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a.\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+b.\frac{my_2-ny_1}{m-n}+c=0,$$

বা, $\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=+\dfrac{m}{n}$ [সরল করিয়া]……(2)

যেহেতু $\dfrac{m}{n}$ ধনাত্মক, $\therefore$ $\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ অনুপাতটি (1)এ ঋণাত্মক এবং (2)এ ধনাত্মক। ইহা হইতে বেশ বুঝা গেল যে, প্রথম ক্ষেত্রে ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উহারা একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

অতএব, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকিবে যখন ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটি একই চিহ্নযুক্ত হইবে। কিন্তু বিন্দু দুইটি বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, ঐ রাশি দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : একটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ একটি প্রদত্ত সরলরেখা $ax+by+c=0$-র যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে অথবা তাহার বিপরীত পার্শ্বে থাকে যদি ax_1+by_1+c ও c-র যথাক্রমে একই অথবা বিপরীত চিহ্ন হয়।

উদাহরণ 1. নিম্নে প্রদত্ত P ও Q বিন্দু দুইটি প্রদত্ত L রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত ?

(a) $P(2, 3)$, $Q(-5, -2)$ এবং $L\equiv 4x-5y+9=0$.

(b) $P(-1, 4)$, $Q(2, -5)$ এবং $L\equiv 3x+y-2=0$.

(a) $4x-5y+9$ রাশিতে Pএর স্থানাঙ্ক (2, 3) বসাইয়া পাওয়া যায়,
$4\times2-5\times3+9=8-15+9=+2$ (ধনাত্মক)।

এবং $4x-5y+9$ রাশিতে Q-এর স্থানাঙ্ক $(-5, -2)$ বসাইয়া পাওয়া যায়
$4\times-5-5\times-2+9=-20+10+9=-1$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ P ও Q বিন্দু দুইটি রেখা Lএর দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

(b) $3x+y-2$ রাশিতে Pএর স্থানাঙ্ক $(-1, 4)$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$3\times-1+4-2=-3+4-2=-1$ (ঋণাত্মক)।

এবং $3x+y-2$ রাশিতে Qএর স্থানাঙ্ক $(2, -5)$ বসাইয়া পাওয়া যায়,
$3\times2+(-5)-2=6-5-2=-1$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি একই চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ P ও Q বিন্দু দুইটি রেখা Lএর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য : কোন একটি বিন্দু, প্রদত্ত সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে আছে নির্ণয় করিতে সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে অথবা তাহার বিপরীত পার্শ্বে বিন্দুটি আছে তাহাই নির্ণয় করা হয়।

ইহা করিতে হইলে সমীকরণের রাশিটিতে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) ও প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া রাশিটির চিহ্ন দেখিতে হয়। যখন উভয় ক্ষেত্রে একই চিহ্ন হয় তখন বলা হয়, সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে সেই পার্শ্বে-ই বিন্দুটিও আছে (origin side) এবং যখন উভয় ক্ষেত্রে বিপরীত চিহ্ন হয় তখন বলা হয় বিন্দুটি, সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত দিকে আছে (non-origin side)।

উদা. 2. $7y-24x=10$ সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত, $(-2, -7)$ বিন্দুটি সেই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

এখানে $7y-24x-10$ রাশিতে (0, 0) বসাইয়া পাওয়া যায়

$7\times0-24\times0-10=-10$ (ঋণাত্মক);

এবং $7y-24x-10$ রাশিতে $(-2, -7)$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$7\times(-7)-24\times(-2)-10=-49+48-10=-11$ (ঋণাত্মক)।

রাশির মান দুইটি একই চিহ্নযুক্ত।

∴ প্রদত্ত সরলরেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে বিন্দুটিও সেই পার্শ্বেই অবস্থিত।

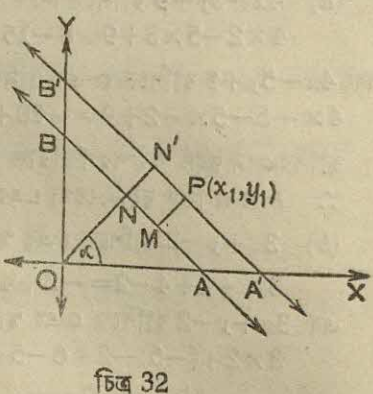
§ 3·23 বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে প্রদত্ত একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

যখন সরলরেখার সমীকরণ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও প্রদত্ত রেখা $\overleftrightarrow{AB}\equiv x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

P হইতে $\overleftrightarrow{AB}$-র লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। চিত্র অনুসারে, ON রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণে নত আছে এবং $ON=p$.

মনে কর, $PM\perp\overleftrightarrow{AB}$ ও $PM=p_1$.



চিত্র 32

P বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{A'B'}$ রেখা টান। মনে কর, বর্ধিত $\overrightarrow{ON}$ রেখা $\overleftrightarrow{A'B'}$কে N′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

অঙ্কন অনুসারে, $NN' = PM = p_1$

$$\therefore \quad ON' = p + p_1$$

এখন P-বিন্দুগামী $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = ON' = p + p_1,$$

কিন্তু ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + p_1$,

$\therefore \quad p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$

আবার p বিন্দুটি সরলরেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে সেই পার্শ্বে লইলে $ON' = ON - NN' = p - p_1$ হইবে।

সুতরাং তখন $p_1 = p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$ হইবে।

অতএব, $p_1 = \pm(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$.

এখন মনে কর সরলরেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0 \cdots (1)$.

(1)-এর উভয় পক্ষকে $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. 'c' ধনাত্মক হইলে যদি P বিন্দু হইতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়, তবে P বিন্দুটি ও মূলবিন্দু যথাক্রমে সরলরেখাটির একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

প্রমাণ। প্রথমে মনে কর, লম্বদূরত্ব ধনাত্মক এবং P-র স্থানাঙ্ক (x_1, y_1')

$\therefore \quad \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ধনাত্মক।

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + c$ ধনাত্মক। $\therefore \quad ax_1 + by_1 + c$ ও c-র একই চিহ্ন। সুতরাং $P(x_1', y_1)$ বিন্দুটি ও মূলবিন্দু $ax + by + c = 0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, লম্বদূরত্ব ঋণাত্মক হইলে P বিন্দুটি ও মূলবিন্দু সরলরেখাটির দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. 'c' ঋণাত্মক হইলে যদি P বিন্দু হইতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়, তবে P বিন্দুটি ও মূলবিন্দুটি যথাক্রমে সরলরেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অথবা একই পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

প্রমাণ। অনুসিদ্ধান্ত 1-এর অনুরূপ।

অনুসিদ্ধান্ত 3. অনুসিদ্ধান্ত 1 ও 2 হইতে পাই যে, $ax + by + c = 0$

সরলরেখার উপর P বিন্দু হইতে লম্বদূরত্ব ও ধ্রুবক পদ c-র একই চিহ্ন অথবা বিপরীত চিহ্ন হইলে P বিন্দুটি ও মূলবিন্দুটি যথাক্রমে সরলরেখাটির একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

§ 3·24. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় :

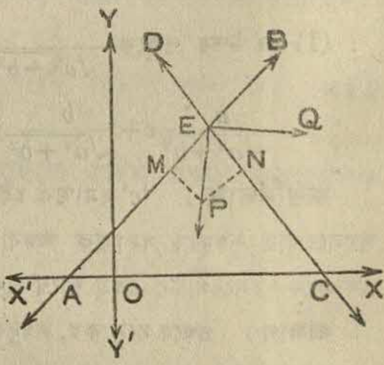
মনে কর, সরলরেখা দুইটি

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$$

এবং $\overleftrightarrow{CD} \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$

উহারা যেন পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন AEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন একটি বিন্দু $P(h, k)$ লওয়া হইল। সুতরাং উভয় রেখা হইতেই P বিন্দু সমদূরবর্তী। অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ হইতে P-এর লম্বদূরত্ব PM ও PN সমান হইবে। চিত্র অনুসারে, মূলবিন্দু AEC কোণের মধ্যে অবস্থিত; সুতরাং উভয় সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$-র যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে, P বিন্দুও সেই পার্শ্বে অবস্থিত। অতএব এক্ষেত্রে উভয় লম্বদূরত্বের একই চিহ্ন হইবে।



চিত্র নং 33

∴ AEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর ক্ষেত্রেই

$$\frac{a_1h+b_1k+c}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

আবার, BEC কোণের ক্ষেত্রে মূলবিন্দুটি কোণের মধ্যে অবস্থিত নহে। এই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যখন বিন্দুটি থাকিবে (চিত্রে Q বিন্দুর অবস্থানের মত) তখন মূলবিন্দু ও সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বিন্দুটি একটি রেখার (এখানে $\overleftrightarrow{AB}$) একই পার্শ্বে এবং অপর রেখার (এখানে $\overleftrightarrow{CD}$) বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে। সুতরাং এক্ষেত্রে উভয় রেখা হইতে বিন্দুটির লম্বদূরত্বের মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

∴ এক্ষেত্রে BEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর ক্ষেত্রেই $\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

অতএব, (h, k) বিন্দুর সঞ্চার পথই হইবে প্রদত্তরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

∴ সমদ্বিখণ্ডকের নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots(1)$$

c_1 ও c_2-র একই চিহ্ন হইলে যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত, তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণের জন্য (1)-এ '+' চিহ্ন লইতে হইবে। আবার c_1 ও c_2-র পরস্পর বিপরীত চিহ্ন হইলে ঐ সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণের জন্য '−' চিহ্ন লইতে হইবে।

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. (3, 1) বিন্দু হইতে $5x-12y+1=0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর।

সূত্রানুসারে লম্ব $p=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

এখানে $a=5, b=-12, c=1, x_1=3, y_1=1$.

এক্ষেত্রে, লম্বটির দৈর্ঘ্য$=\frac{5\times3-12\times1+1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{4}{13}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এইভাবে লম্বদূরত্ব নির্ণয় করিবার সময় উহা কখনও কখনও ঋণাত্মক হইবে, তখন উহার সাংখ্যমানটিকেই ধরিবে।]

উদা. 2. সরলরেখা $x-2y-5=0$এর উপর (−3, −5) বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ঐ রেখার কোন্ পার্শ্বে বিন্দুটি অবস্থিত?

(−3, −5) বিন্দু হইতে $x-2y-5=0$ ···(i) সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য$=\frac{-3.1-2(-5)-5}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ একক।

এখানে লম্বের চিহ্ন ধনাত্মক কিন্তু ধ্রুবক পদ 5এর চিহ্ন ঋণাত্মক অর্থাৎ উহারা বিপরীত চিহ্ন যুক্ত।

অতএব, সরলরেখা (i)-এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে প্রদত্ত বিন্দুটি তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

উদা. 3. $9x+6y-7=0$ ও $3x+2y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ঠিক মধ্যস্থলে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Madras 1948]

[দ্রষ্টব্য : এরূপ প্রশ্নের সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবেই। এখন উভয় রেখা হইতে সমদূরবর্তী ও উহাদের সমান্তরাল রেখাই উদ্দিষ্ট রেখা হইবে। $\therefore$ প্রদত্ত রেখা দুইটি x-অক্ষকে বা y-অক্ষকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে উদ্দিষ্ট রেখাটি ঐ দুই বিন্দুর মধ্য-বিন্দুগামী হইবে।]

$9x+6y-7=0\cdots$(i) বা, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{6}$.

$\therefore$ রেখা-(i) y-অক্ষকে $(0, \frac{7}{6})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $3x+2y+6=0\cdots\cdots$(ii) বা, $y=-\frac{3}{2}x-3$.

$\therefore$ রেখা-(ii) y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{\frac{7}{6}-3}{2}\right)$. বা, $(0, -\frac{11}{12})$.

উদ্দিষ্ট রেখা (i) ও (ii)এর সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, উহার সমীকরণ, $y=-\frac{3}{2}x+k$.

$\because$ ইহা $(0, -\frac{11}{12})$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $-\frac{11}{12}=k$.

অতএব, নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y=-\frac{3}{2}x-\frac{11}{12}$,

অর্থাৎ, $18x+12y+11=0$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুটি $(2, 1), (3, -2)$ ও $(-4, -1)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভিতর অবস্থিত।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে A(2, 1), B(3, −2) ও C(−4, −1).

$\therefore$ AB বাহুর সমীকরণ, $y-1=\frac{1-(-2)}{2-3}(x-2)$,

বা, $3x+y-7=0$.

BC বাহুর সমীকরণ, $y+2=\frac{-2-(-1)}{3-(-4)}(x-3)$,

বা, $x+7y+11=0$.

এবং CA বাহুর সমীকরণ, $y+1=\frac{-1-1}{-4-2}(x+4)$,

বা, $x-3y+1=0$.

এখন, A(2, 1) হইতে BC-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{2+7\times1+11}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} \text{ একক।}$$

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে BC-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{11}{\sqrt{50}}=\frac{11\times\sqrt{2}}{\sqrt{100}}=\frac{11}{10}\sqrt{2} \text{ একক।}$$

উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। ∴ A ও মূলবিন্দু, BC-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

B(3, −2) হইতে CA-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3-3\times(-2)+1}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \text{ একক।}$$

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে CA-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10} \text{ একক।}$$

উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। ∴ B ও মূলবিন্দু, CA-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, C(−4, −1) হইতে AB-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3\times(-4)+1\times(-1)-7}{\sqrt{3^2+1^2}}=-\frac{20}{\sqrt{10}}=-2\sqrt{10} \text{ একক।}$$

এবং মূলবিন্দু (0, 0) হইতে AB-র লম্ব-দূরত্ব

$$=\frac{-7}{\sqrt{10}}=-\frac{7}{10}\sqrt{10} \text{ একক।}$$

এক্ষেত্রে উভয় লম্বের দৈর্ঘ্যই ঋণাত্মক। ∴ C ও মূলবিন্দু, AB-বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব, মূলবিন্দুটি ABC ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থিত।

উদা. 5. $8x-6y+11=0$ ও $12x-5y-6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুটি যে কোণে অবস্থিত কোন্ সমদ্বিখণ্ডকটি সেই কোণস্থ তাহার উল্লেখ কর।

উভয় রেখার অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{8x-6y+11}{\sqrt{8^2+6^2}}=\pm\frac{12x-5y-6}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $13(8x-6y+11)=\pm10(12x-5y-6)$.

ডানপক্ষে '+' চিহ্ন লইয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$16x+28y-203=0\cdots\text{(i)}$$

আবার, ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া দ্বিতীয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$224x-128y+83=0\cdots\text{(ii)}$$

এখানে প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ধ্রুবক পদ দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত [+11 ও −6] ; সুতরাং ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া যে সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে উহাই উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে।

∴ যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $224x-128y+83=0$.

উদা. 6. $4x+3y=8$ ও $4x+3y+12=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

যেহেতু সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কিত করিলে উহা উভয় সরলরেখার উপর লম্ব হইবে।

$4x+3y=8$, বা, $4x+3y-8=0\cdots(1)$ এই সরলরেখার উপর মূলবিন্দু (0, 0) হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য$=\dfrac{-8}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\dfrac{8}{5}$.

মূলবিন্দু (0, 0) হইতে দ্বিতীয় রেখা $4x+3y+12=0\cdots(2)$-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য$=\dfrac{12}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$.

যেহেতু, সরলরেখা দুইটির উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত, সুতরাং বুঝিতে হইবে যে সরলরেখা দুইটি মূলবিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব, উভয় সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব (অর্থাৎ লম্ব-দূরত্ব)$=\frac{12}{5}+\frac{8}{5}=4$.

উদা. 7. মূলবিন্দু এবং $x-y=4$ ও $y+7x+20=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে ঐ রেখাটি ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [U. P. B. 1921]

$x-y=4\ldots(1)$ ও $y+7x+20=0\ldots(2)$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x-y-4+k(y+7x+20)=0$,

অর্থাৎ $(7k+1)x+(k-1)y+20k-4=0\cdots(3)$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

∵ এই (3)-সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া গিয়াছে, ∴ ইহার ধ্রুবক পদটি$=0$ হইবে, অর্থাৎ $20k-4=0$, বা, $k=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-y-4+\frac{1}{5}(y+7x+20)=0$,

বা, $y=3x\ldots(4)$

যেহেতু, (4)-সরলরেখা মূলবিন্দুগামী, সুতরাং উহাকে (1) ও (2) সরলরেখা-দ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইতে হইলে উহা (1) ও (2)-এর অন্তর্ভূক্ত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

∴ সমীকরণ (1) ও (2)-এর ধ্রুবক পদ দুইটিকে ধনাত্মক করিয়া (দ্বিতীয়টিতে ধনাত্মক আছে) সাজাইয়া সমীকরণ দুইটি হয় $y-x+4=0$ এবং $y+7x+20=0$.

অতএব, উহাদের অন্তর্ভূক্ত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু আছে তাহার সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ হয় $\dfrac{y-x+4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=+\dfrac{y+7x+20}{\sqrt{1^2+7^2}}$

বা, $\dfrac{y-x+4}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+7x+20}{5\sqrt{2}}$, বা, $\dfrac{y-x+4}{1}=\dfrac{y+7x+20}{5}$,

বা, $5y-5x+20=y+7x+20$, বা, $4y=12x$, বা, $y=3x$.

অতএব, প্রমাণিত হইল যে মূলবিন্দু ও প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্যদিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে তাহা ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

উদা. 8. যদি $x+y=0$, $x-3y=0$ ও $x-2y=1$ রেখা তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে, তবে $x+y=0$ রেখার উপর বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, $x+y=0 \cdots (1)$ সরলরেখার বিপরীত শীর্ষবিন্দু অপর দুইটি প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দু। ঐ ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$x-3y+k(x-2y-1)=0$ (এখানে k একটি ধ্রুবক),

বা, $(k+1)x-(2k+3)y-k=0 \cdots (2)$

(1) ও (2) পরস্পর লম্ব হইবে যদি $(k+1)\times 1-(2k+3)\times 1=0$ হয়

অর্থাৎ যদি $k=-2$ হয়।

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-3y-2(x-2y-1)=0$,

বা, $y-x+2=0$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলি সমবিন্দু।

মনে কর, ত্রিভুজ ABC-র শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3).

$$\text{BC বাহুর প্রবণতা}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}.$$

শীর্ষবিন্দু A হইতে BC বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1),$$

বা, $y(y_3-y_2)+x(x_3-x_2)-\{y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)\}=0 \cdots(1)$

অনুরূপে, B ও C বিন্দু হইতে CA ও AB বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইবে, যথাক্রমে

$y(y_1-y_3)+x(x_1-x_3)-\{y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)\}=0 \cdots(2).$

এবং $y(y_2-y_1)+x(x_2-x_1)-\{y_3(y_2-y_1)+x_3(x_2-x_1)\}=0 \cdots(3)$

এখন দেখা যাইতেছে, (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটির বামপক্ষ যোগ করিলেই শূন্য হয়, সুতরাং (1), (2) ও (3) সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

অতএব, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 10. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (1, 5), (7, 2) ও (4, 9) তাহার লম্ববিন্দুর (orthocentre-এর) স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, ত্রিভুজ ABC-এর শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক A (1, 5), ও B (7, 2) এবং C (4, 9). A বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-5=m(x-1) \cdots(1)$.

$\overleftrightarrow{BC}$ বাহুর প্রবণতা $=\frac{9-2}{4-7}=-\frac{7}{3}$.

$\therefore$ (1)-রেখা BC বাহুর উপর লম্ব হইবে যখন $m=\frac{3}{7}$ হইবে।

অতএব, A (1, 5) শীর্ষবিন্দুগামী বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ হইল $y-5=\frac{3}{7}(x-1)$, বা $3x-7y+32=0 \cdots(2)$.

আবার, B (7, 2) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-2=m'(x-7)$.

$\overleftrightarrow{AC}$ বাহুর প্রবণতা $=\frac{9-5}{4-1}=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ AC বাহুর উপর B শীর্ষবিন্দুগামী লম্বের সমীকরণ হইবে

$y-2=-\frac{3}{4}(x-7)$, বা, $3x+4y-29=0 \cdots(3)$.

এখন, (2) ও (3) এই দুই লম্বের ছেদবিন্দুই হইবে △ABC-র লম্ববিন্দু।

(2) ও (3) সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $x=\frac{25}{11}$, $y=\frac{61}{11}$.

অতএব, লম্ববিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(\frac{25}{11}, \frac{61}{11})$.

উদা. 11. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি $x=0$, $y=0$ ও $3x+4y-12=0$, তাহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় ও অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃই $x=0\cdots(1)$ y-অক্ষের ও $y=0\cdots(2)$ x-অক্ষের সমীকরণ, এবং $3x+4y-12=0\cdots(3)$ x ও y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়া গিয়াছে। ∴ অক্ষদ্বয় ত্রিভুজটির দুইটি বাহু, উহাদের প্রথম ও তৃতীয় পাদের সমকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া যে রেখা যাইবে তাহাই ত্রিভুজটির একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে। অতএব বুঝা গেল ঐ সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দুগামী বলিয়া ধ্রুবক পদটি শূন্য হইবে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত থাকিবে বলিয়া $m=1$.

∴ ঐ সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=x$.

আবার, (1) ও (3) বহুদ্বয়ের অন্তর্ভূ́ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $x=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5x=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $2x+y-3=0$.

এক্ষণে, (2) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূ́ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে $y=\dfrac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5y=-3x-4y+12$,

অর্থাৎ $x+3y-4=0$.

অতএব, নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ হইল

$y=x$, $2x+y-3=0$ এবং $x+3y-4=0$. ইহাদের যে কোন দুইটির ছেদবিন্দু হইবে অন্তঃকেন্দ্র। যে কোন সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=1, y=1$. ∴ অন্তঃকেন্দ্র হইল (1, 1) বিন্দু।

উদা. 12. $x=y$ ও $x+y=1$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূ́ত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। (2, 1) বিন্দুটি যে কোণের অন্তর্ভূ́ত তাহার সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি দেখাও। [H. S. Tech. 1965]

উভয় রেখার অন্তর্ভূ́ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হয়

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}},$$

বা, $x-y=\pm(x+y-1)$.

ডানপক্ষের '+' চিহ্ন ধরিয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2y-1=0\ldots\text{(i)}$$

ডানপক্ষের '−' চিহ্ন ধরিয়া অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2x-1=0\ldots\text{(ii)}$$

(2, 1) বিন্দু হইতে $x+y-1=0$ রেখার লম্ব-দূরত্ব$=\frac{2+1-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত। কিন্তু সমীকরণের ধ্রুবক পদ [-1] ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত। সুতরাং (2, 1) বিন্দুটি এই রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। ∴ প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু নাই, সেই কোণের মধ্যে (2, 1) বিন্দুটি আছে।

অতএব উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $2y-1=0$.

উদা. 13. $4x-3y+1=0$ ও $12x-5y+7=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহা স্থির কর।

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm\frac{12x-5y+7}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $13(4x-3y+1)=\pm5(12x-5y+7)$.

ডানপক্ষের '+' চিহ্ন লইয়া একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$4x+7y+11=0......(i)$$

এবং ডানপক্ষের '−' চিহ্ন লইয়া অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$7x-4y+3=0......(ii)$$

মনে কর, (ii)-সমদ্বিখণ্ডকটি $12x-5y+7=0$ বাহুর সহিত θ-কোণে নত আছে।

∴ $\tan\theta=\frac{\frac{12}{5}-\frac{7}{4}}{1+\frac{12}{5}\times\frac{7}{4}}$ [এখানে বাহুটির প্রবণতা$=\frac{12}{5}$ ও সমদ্বিখণ্ডক (ii)এর প্রবণতা$=\frac{7}{4}$]

$=\frac{13}{104}=\frac{1}{8}$ [ইহা 1 অপেক্ষা কম]

∴ $\theta<45°$. যে কোণকে $7x-4y+3=0$ সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে ঐ কোণের পরিমাপ$=2\theta$. ∴ $2\theta<90°$, সুতরাং সূক্ষ্মকোণ।

অতএব প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $7x-4y+3=0$.

উদা. 14. $2x+3y=1$ সরলরেখা যে সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহাদের একটি $x+2y=1$; অপরটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে কোণটির একটি বাহুর সমীকরণ, $x+2y=1\cdots$(i)

এবং কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $2x+3y=1\cdots$(ii)

(i) ও (ii) সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়, $(-1, 1)$.

$\therefore$ অপর বাহুর সমীকরণ, $y-1=m(x+1)\cdots$(iii)

এখানে বাহু-(i) যে কোণের সমদ্বিখণ্ডক-(ii)এর সহিত নত আছে, সমদ্বিখণ্ডক-(ii) সেই একই কোণে বাহু-(iii)এর সহিত নত থাকিবে।

মনে কর, (ii)এর সহিত (i) θ-কোণে নত আছে।

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}-(-\frac{2}{3})}{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})}$ [$\because$ (i)এর প্রবণতা $=-\frac{1}{2}$ ও

$=\frac{1}{8}$. (ii)এর প্রবণতা $=-\frac{2}{3}$]

$\therefore\ \dfrac{1}{8}=\dfrac{-\frac{2}{3}-m}{1+(-\frac{2}{3})(m)}=\dfrac{-2-3m}{3-2m},\ \therefore\ m=-\frac{19}{22}$.

অতএব, বাহুটির নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$y-1=-\frac{19}{22}(x+1)$ [(iii)-এ $m=-\frac{19}{22}$ ধরিয়া]

বা, $19x+22y-3=0$.

উদা. 15. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি,

$\overleftrightarrow{AB}\equiv x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1=p_1\ldots$(i)

$\overleftrightarrow{BC}\equiv x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2=p_2\cdots$(ii)

$\overleftrightarrow{CA}\equiv x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3=p_3\ldots$(iii)

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। প্রথমতঃ ধরা যাক মূলবিন্দু ত্রিভুজের মধ্যে আছে।

(i) ও (ii)এর অন্তর্গত B কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হয়।

$$\frac{x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1}{\sqrt{\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1}}=\pm\frac{x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2}{\sqrt{\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2}}$$

$\because$ B-কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত এবং দুইটি ধ্রুবক পদই ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত, সুতরাং ডানপক্ষের '+' চিহ্ন লইয়া B-কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ B-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$x(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)-(p_1-p_2)=0\cdots$(iv)

অনুরূপভাবে, (ii) ও (iii) হইতে C-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$x(\cos\alpha_2-\cos\alpha_3)+y(\sin\alpha_2-\sin\alpha_3)-(p_2-p_3)=0\cdots$(v),

এবং (iii) ও (i) হইতে A-কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$x(\cos\alpha_3-\cos\alpha_1)+y(\sin\alpha_3-\sin\alpha_1)-(p_3-p_1)=0\cdots\text{(vi)}.$$

স্পষ্টতঃ দেখা যাইতেছে যে (iv), (v) ও (vi)-এর বামপক্ষগুলি যোগ করিলে আপনা হইতেই যোগফল শূন্য হয়।

অতএব কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরস্পর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে। আবার, যখন মূলবিন্দু ত্রিভুজের মধ্যে থাকিবে না, ঐরূপ অবস্থায় মাত্র একটি অন্তঃকোণের মধ্যে মূলবিন্দু থাকিবে, অপর দুইটি অন্তঃকোণের বাহিরে মূলবিন্দু থাকিবে। সুতরাং ঐ দুই ক্ষেত্রে সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করিতে বর্গমূলের ঋণাত্মক চিহ্ন লইতে হইবে।

ধরা যাক্ মাত্র B-কোণের মধ্যেই মূলবিন্দু আছে। সুতরাং এরূপক্ষেত্রে সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ হইবে

$$x(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)-(p_1-p_2)=0\cdots\text{(vii)}$$
$$x(\cos\alpha_2+\cos\alpha_3)+y(\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)-(p_2+p_3)=0\cdots\text{(viii)}$$
$$x(\cos\alpha_3+\cos\alpha_1)+y(\sin\alpha_3+\sin\alpha_1)-(p_3+p_1)=0\cdots\text{(ix)}$$

এখন, যেহেতু (ix)-এর বামপক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করিয়া ঐ গুণফল, (vii) ও (viii)এর বামপক্ষের যোগফলের সহিত যোগ করিলে দেখা যায় যে উহা শূন্য হয়; সুতরাং এক্ষেত্রেও কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরস্পর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে। অতএব, ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

প্রশ্নমালা 5

1. (*a*) $3x+4y+5=0$ সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে (2, −2) বিন্দু অবস্থিত?

(*b*) (0, 3)-বিন্দুটি $5x-9y+7=0$ সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

2. (*a*) A(0, −4) ও B(−3, 1) বিন্দু দুইটি $6x+7y+12=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

(*b*) P(3, 1) ও Q(−4, −1) বিন্দুদ্বয় $3x-4y+7=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত?

3. (*a*). (−3, 4) বিন্দু হইতে $2x-3y+1=0$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*b*). (1, 0) বিন্দু হইতে $5x+12y-8=0$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (−2, 1), (1, 4) ও (3, −1) তাহার উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে, $(1, 1)$ বিন্দুটি $3x+4y=12$, $5x-12y+20=0$ এবং $4x-3y=6$ সরলরেখা তিনটি হইতে সমদূরবর্তী।

6. যদি একটি চলমান P বিন্দু হইতে $x+y-5=0$ ও $3x-2y+7=0$ সরলরেখা দুইটির উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত 10 হয়, তবে প্রমাণ কর যে P একটি সরলরেখায় চালিত হইবে। [C. U. 1950]

7. যদি $2x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ ও $3x+4y+3=0$ দ্বারা ΔABC-র যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহু সূচিত হয়, তবে উহার A বিন্দুগামী উচ্চতার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x-y+1=0$, $3x+y-17=0$ ও $x+5y+13=0$ তাহার লম্ববিন্দু নির্ণয় কর।

9. $(-3, 2)$ বিন্দু হইতে $2x-y+7=0$ সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

10. নিম্নের রেখাযুগলের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(a) $8x-6y+11=0$ এবং $12x-5y-6=0$

(b) $4y+3x-12=0$ এবং $3y+4x-24=0$

(c) $x\cos\theta+y\sin\theta=p_1$ এবং $x\cos\phi+y\sin\phi=p_2$.

11. নিম্নে প্রদত্ত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :—

(a) $3x+4y=6$ এবং $3x+4y+5=0$

(b) $y=mx+c_1$ এবং $y=mx+c_2$.

12. x-অক্ষস্থিত কোন্ বিন্দুগুলির $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা হইতে লম্বদূরত্ব a-এর সমান? [C. U. 1951]

12. (a) একটি সরলরেখাদ্বারা অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ a ও b এবং ঐ রেখা হইতে মূলবিন্দুর দূরত্ব p হইলে, প্রমাণ কর যে $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

13. $(0, a)$ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে দুইটি সরলরেখার উপর $(2a, 2a)$ বিন্দু হইতে লম্বের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য a তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1953]

14. যে শর্তে $(3, -2)$ বিন্দু হইতে $lx+my+n=0$ রেখার উপর লম্বের ধ্রুবক দৈর্ঘ্য 5 হইবে, তাহা নির্ণয় কর। [C. U. 1956]

15. প্রমাণ কর যে $7x-9y+10=0$ সরলরেখাস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে $3x+4y=5$ ও $12x+5y=7$ সরলরেখা দুইটির উপর লম্বগুলি পরস্পর সমান। [C. U. 1952]

16. (2, −1) বিন্দু ও $3x-2y+5=0$ সরলরেখার মধ্যপথে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [J. B. A]

17. নিম্নে প্রদত্ত সরলরেখাযুগলের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূলবিন্দু যে কোণের অন্তর্ভূত তাহার সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি তাহা দেখাও :

(i) $2y=3x-1$ এবং $3y=2x+1$.

(ii) $x\sqrt{3}y=6+2\sqrt{3}$ এবং $x-\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3}$.

(iii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ এবং $x\cos\beta+y\sin\beta=q$.

18. সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(a) $5x-12y+20=0$ এবং $4x-3y=6$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটির।

(b) $4x-3y+1=0$ এবং $12x-5y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত স্থূলকোণটির।

19. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (4, 5), (−4, 3) ও (−1, −3) ; প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দু ত্রিভুজটির অভ্যন্তরে অবস্থিত।

20. $4x-3y-6=0$ ও $3x+4y=12$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত যে কোণের মধ্যে (3, −2) বিন্দু অবস্থিত তাহার সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর।

21. (−2, 6) বিন্দু হইতে $2x+3y-1=0$ সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় কর। [H. S. Tech. 1965]

22. নিম্নে নির্দিষ্ট সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) রেখাগুলি (3, 6) বিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরত্ব 6.

(b) মূলবিন্দু হইতে রেখাগুলির দূরত্ব 5 এবং উহারা $3x-y-20=0$ ও $x-2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া গিয়াছে।

[H. S. '68 (Compl.)]

23. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতাগুলি সমান।

24. (a). একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (5, −4), (3, −2) ও (1, −6), উহার লম্ববিন্দু নির্ণয় কর।

(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ ও $(0, 2)$ এবং লম্ববিন্দুটি $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$, উহার তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি নির্ণয় কর।

25 $7x-9y+5=0$ সরলরেখা যে সরলরেখাযুগলের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহাদের একটি হইল $5x-12y=2$, অপরটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

26. $3x+5y-15=0$, $x+y-4=0$ ও $2x+y-6=0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় নির্ণয় কর।

27. (a). একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $(-36, 18)$, $(48, -45)$ ও $(12, 32)$, উহার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(b). যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $11x+2y-13=0$, $22x-19y-3=0$ ও $x-2y-119=0$, তাহাদের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটি এবং তাহা হইতে ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

28. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের দুইটি বহিঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় ও তৃতীয় অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

চতুর্থ অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

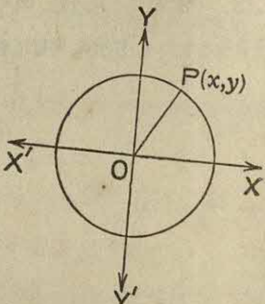
§ 4·1. **বৃত্ত :** কোন সমতলে যদি কোন গতিশীল বিন্দু, ঐ সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থকে, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে একটি বৃত্ত বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** এবং ঐ নির্দিষ্ট দূরত্বকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** বলে।

§ 4·2. **বৃত্তের সমীকরণ :**

কোন বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

(i) প্রথমে মনে কর, কোন বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r.

মনে কর P (x, y) বৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু।



চিত্র 34

∴ OP বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

অর্থাৎ $OP=r$.

এক্ষণে $OP=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}=r$.

বা, $x^2+y^2=r^2 \cdots(1)$

∴ সমীকরণ-(1) প্রদত্ত বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) এইবার মনে কর, কোন বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ব্যতীত অপর যে-কোন বিন্দু C (α, β) এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r. মনে কর P (x, y) বৃত্তের যে-কোন বিন্দু। CP যোগ কর। সুতরাং CP বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $CP=r$.

এক্ষণে $CP=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$

$\therefore \sqrt{(x-\alpha)^2+((y-\beta)^2}=r$

বা, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \cdots(2)$

সমীকরণ-(2) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ।

উদা. 1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 4. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে P (x, y) বৃত্তের যে-কোন বিন্দু হইলে OP=4. (কারণ, বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু) $\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}=4$,

বা, $x^2+y^2=16$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, 4) এবং ব্যাসার্ধ 6. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6, সুতরাং C বৃত্তের কেন্দ্র এবং P (x, y) বৃত্তের যে কোন বিন্দু হইলে, CP=6.

কিন্তু $CP=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$\therefore \quad \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=6$

বা, $(x-3)^2+(y-4)^2=36$

বা, $x^2+y^2-6x-8y-11=0$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. মূলবিন্দু একটি বৃত্তের কেন্দ্র ; বৃত্তটি (2, 3) বিন্দুগামী হইলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2=r^2$,

যেহেতু বৃত্তটি (2, 3) বিন্দুগামী, $\therefore \quad 4+9=r^2$ বা $r^2=13$.

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2+y^2=13$.

উদা. 4. (2, −3) বিন্দু একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তটি (−1, 2) বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র (2, −3)

মনে কর বৃত্তটির সমীকরণ $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

যেহেতু বৃত্তটি (−1, 2) বিন্দুগামী,

$\therefore \quad (-1-2)^2+(2+3)^2=r^2$, বা $9+25=r^2 \quad \therefore \quad r^2=34$.

$\therefore$ বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y+3)^2=34$.

বা, $x^2+y^2-4x+6y-21=0$.

অনুশীলনী IV A

1. নিম্নের কতকগুলি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য প্রদত্ত হইল ; বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) কেন্দ্র (0, 0) ; ব্যাসার্ধ 3 ; (ii) কেন্দ্র (0, −3) ; ব্যাসার্ধ 5 ;
(iii) কেন্দ্র (2, 3) ; ব্যাসার্ধ 4 ; (iv) কেন্দ্র (−3, 4) ; ব্যাসার্ধ 3 ;

(v) কেন্দ্র $(-3, 2)$; ব্যাসার্ধ $\sqrt{6}$. (vi) কেন্দ্র $(3, 7)$; ব্যাসার্ধ 5.

[H. S. '60 Comp.]

2 $(-1, -2)$ বিন্দু একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তটি $(1, -3)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ বিন্দু এবং বৃত্তটি $(5, 7)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ বিন্দু এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. প্রমাণ কর যে, বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

§ 4·3. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ :

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$ সমীকরণ সর্বদাই কোন বৃত্তের সমীকরণ হয়।

সমীকরণ (1)-এ cকে পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয়দিকে g^2+f^2 যোগ করিয়া পাই $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$

বা, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$.

অতএব ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$ ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

[**দ্রষ্টব্য :** যদি $g^2+f^2>c$ হয়, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বাস্তব হইবে অর্থাৎ বৃত্তটি প্রকৃত বা বাস্তব (real) হইবে।

যদি $g^2+f^2<c$ হয়, তবে ব্যাসার্ধটি এবং সুতরাং বৃত্তটি কাল্পনিক হইবে।

$g^2+f^2=c$ হইলে ব্যাসার্ধ শূন্য হইবে এবং বৃত্তটি একটি বিন্দু $(-g, -f)$ হইবে। এরূপ বৃত্তকে **বিন্দু-বৃত্ত** (Point-Circle) বলা হয়।]

§ 4·4. সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ $(a, b, h)\neq(0, 0, 0)$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হওয়ার শর্ত।

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad (a, b, h)\neq(0, 0, 0) \cdots (1)$

সমীকরণকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। $a=b\neq0$ এবং $h=0$ হইলে এই সমীকরণ একটি বৃত্তের সমীকরণ হয়। কারণ, $a=b\neq0$ এবং $h=0$ হইতে সমীকরণ (1)-এর আকার হয়, $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$.

বা, $x^2+y^2+2\frac{g}{a}x+2\frac{f}{a}y+\frac{c}{a}=0$

বা, $\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2$, ইহা একটি বৃত্তের

সমীকরণ যাহার কেন্দ্র $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$.

অতএব দেখা যাইতেছে যে, যদি $a=b$ এবং $h=0$ এবং $\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}>0$ হয়, তবে $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় শর্তটি হইল **x^2 ও y^2-এর সহগ সমান এবং xy-এর সহগ শূন্য হইতে হইবে।**

§ 4·5 **এককেন্দ্রীয় বৃত্তের সমীকরণ** (Equations of Concentric Circles) :

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots(1)$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় যে-কোন বৃত্তের সমীকরণের আকার $x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0 \cdots(2)$; কারণ, সমীকরণ দুইটির উভয়েরই কেন্দ্র $(-g, -f)$ বিন্দু।

উদাহরণ 1. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

বা, $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4+9+12.$

বা, $(x-2)^2+(y+3)^2=25=5^2.$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $(2, -3)$ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 5.

উদা. 2. $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

$3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ বা, $x^2+y^2-2.\frac{5}{6}x-2y+\frac{4}{3}=0$

বা, $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{36}+1-\frac{4}{3}=\frac{13}{36}=\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2$

সুতরাং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{\sqrt{13}}{6}$.

উদা. 3. $(0, 1)$, $(1, 0)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots(1)$

যেহেতু বৃত্তটি $(0, 1)$, $(1, 0)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী, সুতরাং বিন্দুগুলির স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণ-(1) সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ 1+2f+c=0\cdots$(i), $1+2g+c=0\cdots$(ii)

এবং $5+4g+2f+c=0\cdots$(iii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই, $2f-2g=0$; $\therefore\ f=g.$

আবার, (i)−(iii) করিয়া পাই, $-4-4g=0$; বা, $4g=-4$;

বা, $g=-1.$ $\therefore\ f=-1.$

এক্ষণে (i) হইতে পাই, $1+2.(-1)+c=0$, বা, $c=1.$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2+y^2-2x-2y+1=0.$

উদা. 4. (0, 0), $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(1)$

প্রদত্ত শর্তানুসারে বৃত্তটি (0, 0), $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ-(1) সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ c=0\cdots$(i) $a^2+2ag+c=0\cdots$(ii) এবং $b^2+2bf+c=0\cdots$(iii)

সমীকরণ (ii)-এ, $c=0$ বসাইয়া পাই, $a^2+2ag=0$;

বা, $g=\dfrac{a^2}{-2a}=-\dfrac{a}{2}.$

সমীকরণ (iii)-এ, $c=0$ বসাইয়া পাই, $b^2+2bf=0$;

বা, $f=\dfrac{b^2}{-2b}=-\dfrac{b}{2}.$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2+y^2-ax-by=0.$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, (0, 0), (1, 1), (5, −5) ও (6, −4) বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ। ঐ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর (0, 0), (1, 1) এবং (5, −5) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(1).$$

অতএব, $c=0\cdots$(i) $2+2g+2f=0\cdots$(ii)

এবং $50+10g-10f=0\cdots$(iii)

এক্ষণে সমীকরণগুলির সমাধান করিয়া পাই, $g=-3, f=2, c=0.$

$\therefore$ বৃত্ত $x^2+y^2-6x+4y=0$ উপরোক্ত বিন্দুত্রয়গামী।

এখন, সমীকরণটিতে $x=6$ ও $y=-4$ বসাইয়া দেখা যায় যে,

$x^2+y^2-6x+4y=0$ সমীকরণটি (6, −4) দ্বারা সিদ্ধ হয়;

$\therefore$ (6, −4) বিন্দুটিও ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-6x+4y=0.$$

উদা. 6. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x=2y$ সরলরেখায় অবস্থিত এবং বৃত্তটি $(-1, 2)$ ও $(3, -2)$ বিন্দুদ্বয়গামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[A. I. H. S. '71]

মনে কর বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেহেতু বৃত্তটি $(-1, 2)$ ও $(3, -2)$ বিন্দুদ্বয়গামী,

$\therefore\ 1+4-2g+4f+c=0$ অর্থাৎ $-2g+4f+c=-5$...(i)

এবং $9+4+6g-4f+c=0$ অর্থাৎ $6g-4f+c=-13$ ··(ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই $-8g+8f=8$

বা, $-g+f=1$···(iii)

আবার বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$ প্রদত্ত $x=2y$ সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore\ -g=-2f$, বা, $-g+2f=0$···(iv)

(iii) এবং (iv) সমীকরণ দুইটির সমাধান করিয়া পাই, $f=-1$, $g=-2$.

এক্ষণে (i) হইতে পাই, $4-4+c=-5$ বা, $c=-5$.

সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-4x-2y-5=0$.

উদা 7. $x^2+y^2+3x-4y+5=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত $(-1, 2)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2+y^2+3x-4y+5=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় কোন বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+3x-4y+c=0$. এক্ষণে এই বৃত্তটি $(-1, 2)$ বিন্দুগামী হইলে $1+4-3-8+c=0$ বা $c=6$.

সুতরাং বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2+3x-4y+6=0$.

উদা. 8. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত অক্ষদ্বয় হইতে 3 ও 4 দৈর্ঘ্যের জ্যা ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

শর্তানুসারে, প্রদত্ত বৃত্ত $(0, 0)$, $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুগামী।

$\therefore\ c=0$ এবং $9+6g=0$ এবং $16+8f=0$

$\therefore\ g=-\frac{3}{2}$, $f=-2$, সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2+y^2-3x-4y=0.$$

অনুশীলনী IV B

1. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :—

(i) $x^2+y^2=4$; (ii) $x^2+y^2=5$;

(iii) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$;

(iv) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$;

(v) $2x^2+2y^2+3x-5y-2=0$;

(vi) $x^2+y^2-6x+14y+33=0$.

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি বৃত্তের সমীকরণ কিনা, পরীক্ষা করিয়া দেখ :

(i) $x^2+y^2=4$; (ii) $x^2+y^2+2x+2y-5=0$;

(iii) $2x^2+2y^2-12x-4y+7=0$;

(iv) $x^2+2xy+y^2+5x+6y-7=0$;

(v) $x^2+y^2-x-4y+7=0$.

3. নিম্নলিখিত বিন্দুগামী বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (0, 0), (4, 0), (0, 5) ; (ii) (1, 2), (3, −4), (5, −6) ;

(iii) (1, 1), (2, −1), (3, 2) ; (iv) (2, 1), (2, 3), (4, −1).

(v) (0, 0), (0, 5), (−2, −1) [Mysore '46]

(vi) (3, 4), (3, −6), (−1, 2) [H. S. '61]

4. প্রমাণ কর যে (2, 0), (5, −3), (2, − 6) এবং (−1, −3) বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. (2, 3) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $x^2+y^2+2x+2y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. (0, 0) বিন্দু এবং অক্ষদ্বয়ের সহিত $3x+4y=12$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাদের মধ্যদিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '62 Comp.]

7. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ যথাক্রমে 6 ও 8. ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. (4, 3) এবং (−2, 5) বিন্দুদ্বয়গামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $2x-3y=4$ সরলরেখায় অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $2x^2+2y^2+5x-6y+2=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{\sqrt{5}}{4}$. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. $x^2+y^2-4x+6y+2=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 একক তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. একটি বৃত্ত x-অক্ষের উপর মূলবিন্দু হইতে 2 একক দূরে অবস্থিত বিন্দু দুইটি দিয়া যায়। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 হইলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

§ 4·6. কোন বৃত্তের সম্পর্কে কোন বিন্দুর অবস্থান :

মনে কর, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের সমতলে $P(x', y')$ একটি বিন্দু। মনে কর, O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং r উহার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ O বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং $OP=\sqrt{(x'+g)^2+(y'+f)^2}$
আবার $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

এক্ষণে P বিন্দুটি বৃত্তের একটি অন্তঃস্থ, উপরিস্থ অথবা বহিঃস্থ বিন্দু হইলে OP যথাক্রমে r অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সমান অথবা বৃহত্তর হইবে।

অর্থাৎ, $\sqrt{(x'+g)^2+(y'+f)^2} <, =$ অথবা, $> \sqrt{g^2+f^2-c}$ হইবে,
অর্থাৎ, $(x'+g)^2+(y'+f)^2 <, =$ অথবা $> g^2+f^2-c$ হইবে,
অর্থাৎ, $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c <, =$ অথবা > 0 হইবে।

সুতরাং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c<0$ হইলে, (x', y') বিন্দুটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'=0$ হইলে, (x', y') বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপরিস্থ বিন্দু এবং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'>0$ হইলে, (x', y') বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

অতএব, কোন বৃত্তের সম্পর্কে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে, বৃত্তের সমীকরণটিকে এরূপ আকারে প্রকাশ কর, যে উহার ডানপক্ষ শূন্য হয়। এইবার এই সমীকরণের বামদিকে x ও y-এর স্থলে যথাক্রমে বিন্দুটির ভুজ ও কোটি বসাও। যদি এখন বামপক্ষের রাশিমালাটির মান ঋণাত্মক হয়, তবে বিন্দুটি বৃত্তটির একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তবে বিন্দুটি বৃত্তটির উপরিস্থ বিন্দু এবং রাশিমালাটির মান ধনাত্মক হইলে বিন্দুটি বৃত্তটির একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

অনুশীলনী IV C.

নিম্নলিখিত বৃত্তসমূহের সমীকরণের পার্শ্বে লিখিত বিন্দুগুলির বৃত্তসমূহের সম্পর্কে অবস্থান [(i) ভিতরে (ii) উপরে এবং (iii) বাহিরে] নির্ণয় কর।

1. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$; (i) (0, 0) (ii) (5, 2)
2. $x^2+y^2-4x-6y+9=0$; (i) (0, 0) (ii) (2, 2)
3. $2x^2+2y^2+8x-6y+7=0$; (i) (2, 3) (ii) (1, −2)

§ 4·7. কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমাণ :

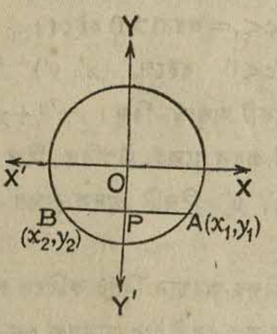
মাধ্যমিক পর্যায়ে বৃত্তসম্পর্কিত যে-সকল উপপাদ্য প্রমাণ করা হইয়াছে, স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে তাহাদের প্রমাণ সম্ভব। এই অনুচ্ছেদে দুইটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্যের প্রমাণ স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে করা হইতেছে।

1. কোন বৃত্তের কোন জ্যার মধ্যবিন্দুর সহিত বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যার উপর লম্ব হয়।

মনে কর বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=r^2 \cdots (1)$

[বৃত্তের সমীকরণ উপরের আকারে লওয়া সম্ভব, কারণ মূলবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় ইচ্ছানুযায়ী নির্বাচন করা যায়।]

মনে কর, মূলবিন্দু O সুতরাং O বৃত্তের কেন্দ্র।



চিত্র 35

মনে কর, AB জ্যার মধ্যবিন্দু P এবং A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2).

$\therefore\ x_1^2+y_1^2=r^2 \cdots (2)$ এবং $x_2^2+y_2^2=r^2 \cdots (3)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2=0$,

বা, $x_1^2-x_2^2=-(y_1^2-y_2^2) \cdots (4)$

এক্ষণে AB-র মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

OP যোগকর। OP-এর প্রবণতা $(m_1)=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

আবার AB-এর প্রবণতা $(m_2)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

এক্ষণে OP ও AB-এর প্রবণতাদ্বয়ের গুণফল $(m_1.m_2)$

$$=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{-(y_1^2-y_2^2)}=-1 \ [(4) \text{ হইতে}]$$

সুতরাং OP এবং AB পরস্পরের উপর লম্ব।

2. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

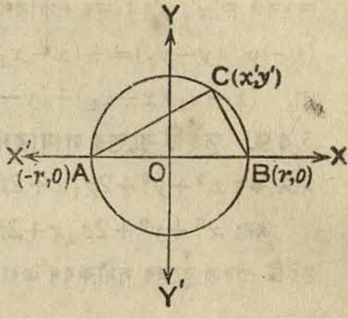
মনে কর কোন বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং C বৃত্তস্থ কোন বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle$ACB একটি সমকোণ। আমরা বৃত্তের কেন্দ্র O-কে মূল-বিন্দু এবং $\overleftrightarrow{AB}$-কে x অক্ষরূপে লইতে পারি। মনে কর বৃত্তের ব্যাসার্ধ r.

সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2+y^2=r^2 \cdots(1)$ এবং A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে $(-r, 0)$ ও $(r, 0)$. মনে কর C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y').

যেহেতু C বৃত্তের একটি বিন্দু,

$\therefore \quad x'^2+y'^2=r^2$

বা, $y'^2=r^2-x'^2 \cdots\cdots(2)$



চিত্র 36

মনে কর $\overleftrightarrow{AC}$ ও $\overleftrightarrow{BC}$-র প্রবণতা যথাক্রমে m_1 ও m_2.

$\therefore \quad m_1=\dfrac{y'-0}{x'-(-r)}=\dfrac{y'}{x'+r}$,

এবং $m_2=\dfrac{y'-0}{x'-r}=\dfrac{y'}{x'-r}$;

$\therefore \quad m_1.m_2=\dfrac{y'}{x'+r}.\dfrac{y'}{x'-r}=\dfrac{y'^2}{x'^2-r^2}=\dfrac{r^2-x'^2}{x'^2-r^2}$ [(2) অনুসারে]

$=-1.$

সুতরাং $\overleftrightarrow{AC}$ ও $\overleftrightarrow{BC}$ পরস্পর সমকোণে নত, অর্থাৎ $\angle$ACB একটি সমকোণ। অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে যে, যে কোন বৃত্তের যে কোন ব্যাস পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করিবে। অর্থাৎ সকল অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

§ 4·8. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় :

মনে কর, বিন্দু A (x_1, y_1) এবং বিন্দু B (x_2, y_2)-এর সংযোজক সরল-রেখাংশ AB একটি বৃত্তের ব্যাস এবং P (x', y') ঐ বৃত্তের পরিধিস্থ একটি বিন্দু। AB, AP এবং BP যুক্ত করা হইল।

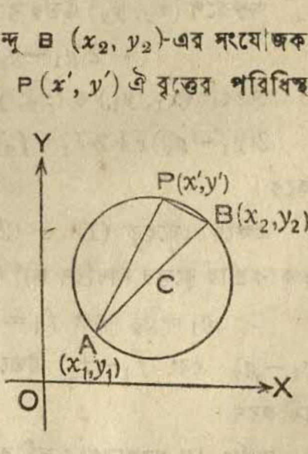
এখন AP র প্রবণতা $(m_1)=\dfrac{y'-y_1}{x'-x_1}$.

এবং BP-র প্রবণতা $(m_2)=\dfrac{y'-y_2}{x'-x_2}$.

যেহেতু AB বৃত্তের ব্যাস,

$\therefore$ $\angle$APB একটি সমকোণ

[§ 47 (2)]



চিত্র 37

$\therefore \quad m_1.m_2=-1$, বা $\dfrac{y'-y_1}{x'-x_1}.\dfrac{y'-y_2}{x'-x_2}=-1.$

বা, $(y'-y_1)(y'-y_2)=-(x'-x_1)(x'-x_2)$,

সুতরাং $P(x', y')$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$(y-y_1)(y-y_2)=-(x-x_1)(x-x_2)$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

§ 49. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যার সমীকরণ।

মনে কর $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0\cdots(1)$

এবং $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0\cdots(2)$

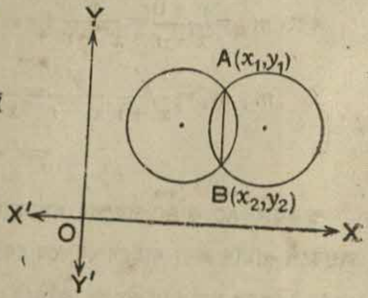
দুইটি প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ এবং AB উহাদের একটি সাধারণ জ্যা।

মনে কর A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2).

যেহেতু (x_1, y_1) উভয় বৃত্তের বিন্দু

$\therefore \quad x_1^2+y_1^2+2g_1x_1$
$+2f_1y_1+c_1=0\cdots(3)$

এবং $x_1^2+y_1^2+2g_2x_1$
$+2f_2y_1+c_2=0\cdots(4)$



চিত্র 38

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$2(g_1-g_2)x_1+2(f_1-f_2)y_1+c_1-c_2=0\cdots(5)$$

অনুরূপে (x_2, y_2) উভয় বৃত্তের বিন্দু বলিয়া পাই

$$2(g_1-g_2)x_2+2(f_1-f_2)y_2+c_1-c_2=0\cdots(6)$$

সুতরাং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) উভয়েই

$2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0\cdots\cdots(6)$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

এক্ষণে যেহেতু (1) ও (2) বৃত্তদ্বয় বিভিন্ন, এবং এককেন্দ্রীয় নয় (কারণ, এককেন্দ্রীয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা থাকিতে পারে না),

$\therefore \quad g_1=g_2$ এবং $f_1=f_2$ উভয়েই সিদ্ধ হইতে পারে না। অর্থাৎ g_1-g_2 এবং f_1-f_2 উভয়েই শূন্য নয়। সুতরাং (6) একটি সরলরেখার সমীকরণ।

অর্থাৎ AB সরলরেখার সমীকরণ $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0.$

দ্রষ্টব্য : উপরের আলোচনায় উভয় বৃত্তের সমীকরণেই x^2 ও y^2-এর সহগ 1 ধরা হইয়াছে এবং সাধারণ জ্যার সমীকরণ-(6), সমীকরণ-(1) হইতে সমীকরণ-(2) বিয়োগ করিলে পাওয়া যায়। x^2 ও y^2-এর সহগ কোন বৃত্তের সমীকরণে 1 না হইলে, সাধারণ জ্যা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ঐ সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণ-(1) বা (2)-এর আকারে প্রকাশ কর। এইবার নূতন সমীকরণ দুইটির বিয়োগফল নির্ণেয় সাধারণ জ্যার সমীকরণ হইবে।

উদাহরণ 1. (1, 2) ও (3, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ হয়, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

এখানে $x_1=1,\ x_2=3,\ y_1=2,\ y_2=-4,$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $(x-1)(x-3)+(y-2)(y+4)=0$

বা, $x^2+y^2-4x+2y-5=0.$

উদা. 2. $x^2+y^2-14x+10y+58=0$ ও $2x^2+2y^2-10x+14y+6=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যার সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ $x^2+y^2-14x+10y+58=0\cdots(1)$

এবং $2x^2+2y^2-10x+14y+6=0$

বা, $x^2+y^2-5x+7y+3=0$ (উভয়পক্ষকে x^2-এর সহগ 2 দ্বারা ভাগ করিয়া)$\cdots(2)$

এক্ষণে (1)−(2) হইতে পাই, নির্ণেয় সাধারণ জ্যার সমীকরণ :

$$-9x+3y+55=0,\ \text{বা},\ 9x-3y-55=0.$$

উদা. 3. একটি বৃত্তাংশের জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং ঐ বৃত্তাংশস্থিত কোণের পরিমাপ θ. প্রমাণ কর যে, বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$$
$$\pm\cot\theta\,[(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)]=0.$$

মনে কর বৃত্তাংশটি APB এবং P (x, y) বৃত্তাংশটির যে কোন বিন্দু ও A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) সুতরাং AP ও BP র প্রবণতা যথাক্রমে m_1 ও m_2 হইলে,

$$m_1=\frac{y-y_1}{x-x_1}\quad \text{এবং}\quad m_2=\frac{y-y_2}{x-x_2}.$$

এখানে প্রদত্ত শর্তানুসারে, $m\angle \text{APB}=\theta.$

$$\therefore\quad \tan\theta=\pm\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\pm\frac{\dfrac{y-y_2}{x-x_2}-\dfrac{y-y_1}{x-x_1}}{1+\dfrac{y-y_2}{x-x_2}\cdot\dfrac{y-y_1}{x-x_1}}$$

বা, $\tan\theta=\pm\dfrac{(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)}{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$
$=\pm\cot\theta\,[(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)]$

এবং ইহাই বৃত্তের সমীকরণ।

§ 4·10. একটি প্রদত্ত সরলরেখা ও একটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :

মনে কর $lx+my+n=0 \quad (l, m)\neq(0, 0)\cdots(1)$
একটি প্রদত্ত সরলরেখার এবং

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(2)$ একটি প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ।

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+k(lx+my+n)=0\cdots\cdots(3)$

সমীকরণটি k-র বিভিন্ন মানের জন্য সরলরেখা (1) ও বৃত্ত (2)-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তসমূহের সমীকরণ।

প্রমাণ। যেহেতু সমীকরণ (1) কে

$x^2+y^2+(2g+kl)x+(2f+km)y+c+kn=0$

আকারে প্রকাশ করা যায় এবং এই আকারে

x^2-এর সহগ $=y^2$-এর সহগ এবং xy-এর সহগ $=0$.

সুতরাং সমীকরণ (3) একটি বৃত্তের সমীকরণ।

আবার (x', y') যদি সরলরেখা (1) ও বৃত্ত (2)-এর ছেদবিন্দু হয়, তবে

$lx'+my'+n=0$ এবং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c=0$

সুতরাং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c+k(lx'+my'+n)=0$.

অর্থাৎ (x', y') দ্বারা সমীকরণ (3) সিদ্ধ হয়।

সুতরাং সমীকরণ (3) প্রদত্ত সরলরেখা এবং প্রদত্ত বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : $k=0$ হইলে, সমীকরণ (3) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হয়।

§ 4·11. $k_1(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+$
$k_2(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0\cdots(1)$

$(k_1, k_2)\neq(0, 0)$ এবং $k_1\neq-k_2$

সমীকরণটি k_1 ও k_2-র বিভিন্ন মানের জন্য

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \cdots\cdots(2)$$

এবং $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \cdots\cdots(3)$ বৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দুগামী সকল বৃত্তের সমীকরণ।

প্রমাণ। স্পষ্টতঃ সমীকরণ (1)-এ

x^2-এর সহগ $=k_1+k_2=y^2$-এর সহগ $\neq 0$ এবং

xy-এর সহগ $=0$

সুতরাং সমীকরণ (1) একটি বৃত্তের সমীকরণ।

আবার (x', y) প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইলে

$$x'^2+y'^2+2g_1x'+2f_1y'+c_1=0 \text{ এবং}$$
$$x'^2+y'^2+2g_2x'+2f_2y'+c_2=0.$$

সুতরাং, $k_1(x'^2+y'^2+2g_1x'+2f_1y'+c_1)$
$+k_2(x'^2+y'^2+2g_2x'+2f_2y'+c_2)=0$

অর্থাৎ সমীকরণ (1) (x', y') দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং সমীকরণ (1) প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় (2) ও (3)-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : 1. $k_1=0$ হইলে সমীকরণ (1) বৃত্ত (3)কে

এবং $k_2=0$ হইলে উহা বৃত্ত (2)-কে প্রকাশ করে।

2. $\dfrac{k_2}{k_1}=k$ ($k_1\neq 0$ হইলে) লিখিয়া প্রদত্ত সমীকরণকে x^2+y^2+
$2g_1x+2f_1y+c_1+k(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$

আকারে প্রকাশ করিয়া সাধারণতঃ প্রশ্নের সমাধান করা হয়।

অনুশীলনী IVD

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের সংযোজক সরল রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (0, 0), (4, 5) (ii) (−2, 4), (4, 6), (iii) (a, b), $(-b, a)$.

2. নিম্নের বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যার সমীকরণ নির্ণয় কর :

$$2x^2+2y^2+8x-6y+7=0$$
$$5x^2+5y^2-10x+15y+21=0.$$

3. P (a, b) ও Q $(b, -a)$ একটি বৃত্তের দুইটি বিন্দু। PQ জ্যা বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে 45° পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\therefore \quad \tan\theta = \pm\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} = \pm\frac{\dfrac{y-y_2}{x-x_2}-\dfrac{y-y_1}{x-x_1}}{1+\dfrac{y-y_2}{x-x_2}\cdot\dfrac{y-y_1}{x-x_1}}$$

বা, $$\tan\theta = \pm\frac{(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)}{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}$$

বা, $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$$
$$=\pm\cot\theta\,[(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)]$$

এবং ইহাই বৃত্তের সমীকরণ।

§ 4·10. একটি প্রদত্ত সরলরেখা ও একটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :

মনে কর $lx+my+n=0 \quad (l, m)\neq(0, 0)\cdots(1)$

একটি প্রদত্ত সরলরেখার এবং

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(2)$ একটি প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ।

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+k(lx+my+n)=0\cdots\cdots(3)$

সমীকরণটি k-র বিভিন্ন মানের জন্য সরলরেখা (1) ও বৃত্ত (2)-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তসমূহের সমীকরণ।

প্রমাণ। যেহেতু সমীকরণ (1) কে

$x^2+y^2+(2g+kl)x+(2f+km)y+c+kn=0$

আকারে প্রকাশ করা যায় এবং এই আকারে

x^2-এর সহগ $=y^2$-এর সহগ এবং xy-এর সহগ $=0$.

সুতরাং সমীকরণ (3) একটি বৃত্তের সমীকরণ।

আবার (x', y') যদি সরলরেখা (1) ও বৃত্ত (2)-এর ছেদবিন্দু হয়, তবে

$lx'+my'+n=0$ এবং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c=0$

সুতরাং $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c+k(lx'+my'+n)=0$.

অর্থাৎ (x', y') দ্বারা সমীকরণ (3) সিদ্ধ হয়।

সুতরাং সমীকরণ (3) প্রদত্ত সরলরেখা এবং প্রদত্ত বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : $k=0$ হইলে, সমীকরণ (3) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হয়।

§ 4·11. $k_1(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+$
$k_2(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0\cdots(1)$
$(k_1, k_2)\neq(0, 0)$ এবং $k_1\neq-k_2$

সমীকরণটি k_1 ও k_2-র বিভিন্ন মানের জন্য

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0\cdots\cdots(2)$$

এবং $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0\cdots\cdots(3)$ বৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দুগামী সকল বৃত্তের সমীকরণ।

প্রমাণ। স্পষ্টতঃ সমীকরণ (1)-এ

x^2-এর সহগ $=k_1+k_2=y^2$-এর সহগ $\neq 0$ এবং

xy-এর সহগ $=0$

সুতরাং সমীকরণ (1) একটি বৃত্তের সমীকরণ।

আবার (x', y) প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইলে

$$x'^2+y'^2+2g_1x'+2f_1y'+c_1=0 \text{ এবং}$$
$$x'^2+y'^2+2g_2x'+2f_2y'+c_2=0.$$

সুতরাং, $k_1(x'^2+y'^2+2g_1x'+2f_1y'+c_1)$
$+k_2(x'^2+y'^2+2g_2x'+2f_2y'+c_2)=0$

অর্থাৎ সমীকরণ (1) (x', y') দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং সমীকরণ (1) প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় (2) ও (3)-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : 1. $k_1=0$ হইলে সমীকরণ (1) বৃত্ত (3)-কে এবং $k_2=0$ হইলে উহা বৃত্ত (2)-কে প্রকাশ করে।

2. $\frac{k_2}{k_1}=k$ ($k_1\neq 0$ হইলে) লিখিয়া প্রদত্ত সমীকরণকে x^2+y^2+
$2g_1x+2f_1y+c_1+k(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$

আকারে প্রকাশ করিয়া সাধারণতঃ প্রশ্নের সমাধান করা হয়।

অনুশীলনী IVD

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের সংযোজক সরল রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (0, 0), (4, 5) (ii) (−2, 4), (4, 6), (iii) (a, b), $(-b, a)$.

2. নিম্নের বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যার সমীকরণ নির্ণয় কর :

$$2x^2+2y^2+8x-6y+7=0$$
$$5x^2+5y^2-10x+15y+21=0.$$

3. P (a, b) ও Q $(b, -a)$ একটি বৃত্তের দুইটি বিন্দু। PQ জ্যা বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে 45° পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-10x+9=0$, $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ ও $x^2+y^2-18x-4y+21=0$ বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্ত তিনটির সমীকরণগুলি যথাক্রমে,

$(x-5)^2+y^2=16$, $(x-3)^2+(y+1)^2=9$

এবং $(x-9)^2+(y-2)^2=64$,

অতএব কেন্দ্র তিনটি হইল (5, 0), (3, −1) এবং (9, 2)

এখন (5, 0) এবং (3, −1) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-0=\frac{0-(-1)}{5-3}(x-5)$$

বা, $y=\frac{1}{2}(x-5)$, বা, $2y=x-5$; বা, $x-2y=5$.

এখন দেখা যাইতেছে যে, তৃতীয় বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (9, 2) দ্বারা $x-2y=5$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত কেন্দ্রত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ হইল $x-2y=5$.

উদা. 2. একটি বৃত্ত মূলবিন্দু হইতে +3 একক দূরে উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু বৃত্তটি উভয় অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে +3 একক দূরে স্পর্শ করে, সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র (3, 3) বিন্দু এবং উহার ব্যাসার্ধ 3. সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$ বা $x^2+y^2-6x-6y+9=0$.

[দ্রষ্টব্য : "বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব"—এই উপপাদ্যটি তোমরা মাধ্যমিক স্তরে শিখিয়াছ। ষষ্ঠ অধ্যায়ে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হইয়াছে। উদা. 2.-এ উপপাদ্যটির সাহায্য লওয়া হইল।]

উদা. 3. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং উহার বাহুর দৈর্ঘ্য a. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$কে অক্ষদ্বয় ধরিয়া প্রমাণ কর যে, বর্গক্ষেত্রটির পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2=a(x+y).$$

যেহেতু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ অক্ষদ্বয় এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a, অতএব A, B, C, D বিন্দু চারিটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) ও $(0,a)$.

এক্ষণে, মনে কর ABD বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

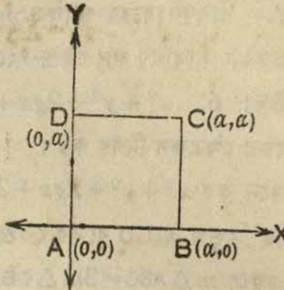
যেহেতু বৃত্তটি A $(0, 0)$ বিন্দুগামী,

$\therefore \quad c=0.$

বৃত্তটি $(a, 0)$ ও $(0, a)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যায় বলিয়া,

$a^2+2ga=0$, বা, $g=-\frac{a}{2}$,

এবং $a^2+2fa=0$; বা, $f=-\frac{a}{2}$



চিত্র 39

বৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2-ax-ay=0$.

আবার $x=a$, $y=a$ ঐ সমীকরণে বসাইয়া পাই, (a, a) দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং ABD বৃত্তটি C বিন্দুগামী অর্থাৎ ABCD বর্গক্ষেত্রের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-ax-ay=0$, বা, $x^2+y^2=a(x+y)$.

উদা. 4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু ; বৃত্তটি $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ সরলরেখাকে y-অক্ষে ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র মূলবিন্দু, মনে কর বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=r^2$. এক্ষণে বৃত্তটি $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ সরলরেখাকে y-অক্ষে ছেদ করে, অর্থাৎ বৃত্তটি y-অক্ষ এবং $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ এর ছেদবিন্দুগামী। এক্ষণে সরলরেখার সমীকরণে $x=0$ বসাইয়া পাই, ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(0, -6)$, যেহেতু বৃত্তটি এই বিন্দুগামী,

$\therefore \quad r^2=36.$ সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2=36$.

উদা. 5. $x^2+y^2-6x-10y+9=0$

এবং $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে ঐ জ্যা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখার উপর লম্ব।

বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ $x^2+y^2-6x-10y+9=0 \cdots (1)$

এবং $x^2+y^2-4x+6y-12=0 \cdots (2)$

(1) − (2) করিয়া পাই সাধারণ জ্যার সমীকরণ

$$-2x-16y+21=0 \quad \text{বা,} \quad 2x+16y=21.$$

আবার বৃত্ত (1)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ এবং

বৃত্ত (2)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2, -3)$;

সুতরাং কেন্দ্রসংযোজক রেখার প্রবণতা $m_1=\dfrac{5-(-3)}{3-2}=8.$

আবার সাধারণ জ্যা-এর প্রবণতা $m_2=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$.

$\therefore$ প্রবণতাদ্বয়ের গুণফল $m_1.m_2=8\times(-\frac{1}{8})=-1$.

সুতরাং সাধারণ জ্যা কেন্দ্র-সংযোজক রেখার উপর লম্ব।

উদা. 6. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

মনে কর $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে, $\triangle$ABC একটি অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। OA, OB, OC যোগ কর।

এক্ষণে $m\triangle ABC=3m\triangle OBC=\frac{3}{2}.\ OB.OC\sin BOC$

এক্ষণে, $OB=OC=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$\therefore\quad OB.OC=g^2+f^2-c.$

আবার কেন্দ্রস্থ $m\angle BOC=2$ (পরিধিস্থ $m\angle BAC$)

$=2.60^\circ$ ($\because$ $\triangle$ABC সমবাহু) $=120^\circ$

$\therefore\quad \sin BOC=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\quad m\triangle ABC=\frac{3}{2}.\ OB.OC\sin BOC=\frac{3}{2}(g^2+f^2-c).\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$$

উদা. 7. (1, −2) ও (4, −3) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $3x+4y=7$ সরলরেখায় অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃত্তটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

সুতরাং ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$.

$\because$ বৃত্তটি (1, −2) এবং (4, −3) বিন্দু দিয়া যায়,

$\therefore\quad 5+2g-4f+c=0\cdots$(i) এবং $25+8g-6f+c=0\cdots$(ii)

আবার, যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ সরলরেখা $3x+4y=7$-এর উপর অবস্থিত, $\therefore\quad -3g-4f=7\cdots$(iii)

উপরের (i), (ii), (iii) সমীকরণ তিনটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়,
$g=-\frac{47}{15}, f=\frac{3}{5}, c=\frac{11}{3}$.

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণটি হইল $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$.

উদা. 8. একটি সমতলের উপরে একটি গতিশীল বিন্দুর ঐ সমতলের দুইটি স্থিরবিন্দু হইতে দূরত্বের অনুপাত ধ্রুবক $\neq 1$ হইলে প্রমাণ কর যে গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত।

মনে কর $P(x, y)$ গতিশীল বিন্দু এবং $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দুইটি স্থিরবিন্দু।

মনে কর, $\frac{AP}{BP}=k$ (ধ্রুবক)।

এক্ষণে $AP=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

এবং $BP=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}=k.$$

বা, $\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=k^2$

বা, $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=k^2\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\}$

বা, $x^2(k^2-1)+y^2(k^2-1)+2x(x_1-k^2x_2)+2y(y_1-k^2y_2)$
$+k^2(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)=0\cdots(1)$

সুতরাং (1) হইল P (x, y) বিন্দুর সঞ্চারপথের নির্ণেয় সমীকরণ। আবার, সমীকরণ (1)-এ x^2, y^2-এর সহগ সমান $(\neq 0)$ এবং xy-এর সহগ শূন্য।

সুতরাং সঞ্চার পথটি একটি বৃত্ত।

উদা. 9. x-অক্ষ একটি বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a. $y=mx$ সরলরেখা এই বৃত্তের জ্যা এবং এই জ্যা-র একটি প্রান্ত মূলবিন্দু। প্রমাণ কর যে এই জ্যাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ

$$(1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x+my)=0.$$

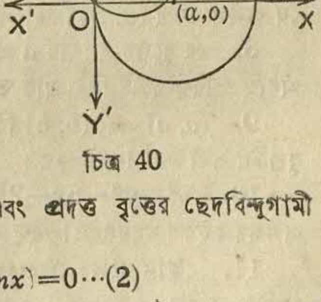
যেহেতু $y=mx$ প্রদত্ত বৃত্তের জ্যা এবং জ্যাটির একটি প্রান্ত মূলবিন্দু সুতরাং প্রদত্ত বৃত্ত মূলবিন্দুগামী।

এক্ষণে, x-অক্ষ প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ a হওয়ায় উহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

সুতরাং প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ

$(x-a)^2+y^2=a^2$

বা, $x^2+y^2-2ax=0\cdots(1)$



চিত্র 40

এক্ষণে, নির্ণেয় বৃত্ত $y=mx$ সরলরেখা এবং প্রদত্ত বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী হওয়ায় উহার সমীকরণ

$$x^2+y^2-2ax+k(y-mx)=0\cdots(2)$$

এক্ষণে, যেহেতু $y=mx$ এই বৃত্তের ব্যাস, সুতরাং এই বৃত্তের কেন্দ্র $\left(a+\frac{mk}{2}, -\frac{k}{2}\right)$, $y=mx$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad -\frac{k}{2}=ma+\frac{m^2k}{2}$$

বা, $ma=-\frac{k}{2}(1+m^2)$ বা, $k=-\frac{2ma}{1+m^2}$.

k-র এই মান সমীকরণ-(2) এ বসাইয়া পাই, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2-2ax-\frac{2ma}{1+m^2}(y-mx)=0$$

বা, $(1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x+my)=0.$

প্রশ্নমালা 6

1. (*a*) প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=1$ এবং $x^2+y^2-12x+4y=1$ বৃত্ত তিনটির কেন্দ্র তিনটি সমরেখ। [H. S. '68]

(*b*) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 এবং বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (1, −2) বিন্দু এবং উহা $3x+y=14$ ও $2x+5y=18$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়া গিয়াছে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$ ও $x^2+y^2-4x-12y=9$ বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ একটি সমান্তর প্রগতি।

4. $x+y=6$, $2x+y=4$ ও $x+2y=5$ সরলরেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Agra '45]

5. যে ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (0, 1), (−2, 0) ও (1, 0) তাহার বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। ত্রিভুজটির যে বাহু প্রথমপাদে অবস্থিত তাহাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C.U. '50(Sup)]

✓ 6. (−3, 7) ও (2, 2) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $2x-3y=13$ সরলরেখায় অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

✓ 7. $3x-2y-1=0$ ও $4x+y-27=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) বিন্দু তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং যাহা x-অক্ষের উপর মূলবিন্দু হইতে b দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু দুইটি দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (o, a) এবং (b, h) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষে অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ এই বৃত্তের উপর অবস্থিত এবং অক্ষদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দু সমূহের স্থানাঙ্কগুলি নির্ণয় কর। [H. S. '72]

11. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $x-4y+7=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটির সহিত x-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ যথাক্রমে 2 এবং 6. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1969]

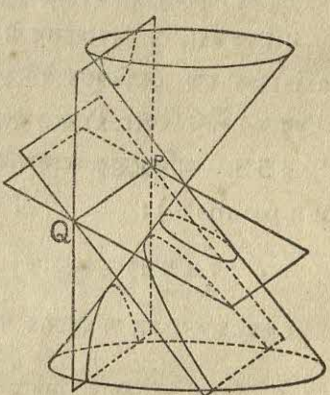
12. একটি সমতলে একটি গতিশীল বিন্দুর ঐ সমতলের n-সংখ্যক স্থির বিন্দু হইতে দূরত্বের বর্গের যোগফল ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত।

পঞ্চম অধ্যায়

কনিক্ সেক্‌সন বা শঙ্কুচ্ছেদ

অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত

5·1. কনিক্ সেক্‌সন বা শঙ্কুচ্ছেদ : লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমতল-দ্বারা বিভিন্ন প্রকার ছেদ্ (section)-কে কনিক্ সেক্‌সন বা শঙ্কুচ্ছেদ বলে। শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী সমতল দ্বারা ছেদ্ একজোড়া সরলরেখা। যদি সমতলটি শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল হয়, তবে ছেদ্‌টি একটি বৃত্ত। যদি ছেদক সমতলটি ভূমির সমান্তরাল না হইয়া তির্যক হয় এবং শঙ্কুর সকল উৎপাদকরেখাকে ছেদ করে, তবে ছেদ্‌টি একটি উপবৃত্ত। যদি ছেদক সমতলটি শঙ্কুর একটি এবং একটি মাত্র উৎপাদক রেখার সমান্তরাল হয়, তবে ছেদকটি একটি অধিবৃত্ত। আর ছেদক সমতলটি যদি শঙ্কুর অক্ষের সমতল হয়, তবে ছেদকসমতল ঐ শঙ্কু এবং আর একটি বিপরীত শঙ্কুকে একটি পরাবৃত্তে ছেদ করে। বৃত্ত সম্বন্ধে চতুর্থ অধ্যায়ে আলোচনা করা হইয়াছে। সরলরেখাযুগল (pair of straight lines) সম্বন্ধে আলোচনা পাঠ্যবহির্ভূত। বর্তমান অধ্যায়ে অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। এই বক্রগুলির একটি সাধারণ ধর্ম আছে ; প্রত্যেকটি



চিত্র 41

বক্রই কোন সমতলে গতিশীল এরূপ একটি বিন্দুর সঞ্চার পথ যে বিন্দুটির সর্ব-অবস্থানে ঐ সমতলস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ও কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নয়) হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সতত ধ্রুবক হয়।

ঐ স্থিরবিন্দু ও নির্দিষ্ট সরলরেখাকে যথাক্রমে কনিক্ সেক্‌সন বা কনিক্‌টির **নাভি** (focus) এবং **নিয়ামক** (directrix) বলে। কনিক্‌গুলির উপরোক্ত সাধারণ ধর্মকে **নাভি-নিয়ামক ধর্ম** (Focus-directrix property) বলে।

ঐ ধ্রুবক অনুপাতকে কনিকের **উৎকেন্দ্রতা** (eccentricity) বলে। উৎকেন্দ্রতা, সাধারণতঃ ইংরাজি e-অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। নাভি-নিয়ামক ধর্মে সর্বদা দূরত্বগুলির সাংখ্যমানই লওয়া হয় ; এইজন্য উৎকেন্দ্রতা সর্বদা ধনাত্মক।

কনিকটি একটি **অধিবৃত্ত** (parabola) যখন $e=1$,

একটি **উপবৃত্ত** (ellipse) যখন $e<1$

এবং **পরাবৃত্ত** (hyperbola) যখন $e>1$.

(A) অধিবৃত্ত (Parabola)

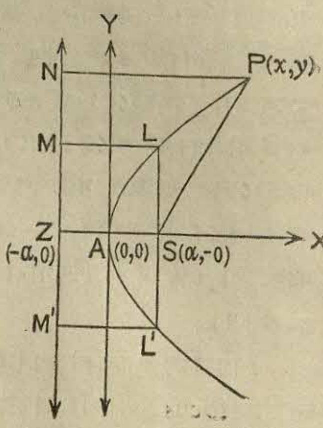
§ 52. **অধিবৃত্তের সংজ্ঞা :** অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 1 হওয়ায় অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যাইতে পারে।

কোন সমতলে যদি কোন গতিশীল বিন্দু সর্বদা ঐ সমতলস্থিত অন্য কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নয়) হইতে সমদূরবর্তী থাকে, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চার পথকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু অধিবৃত্তের **নাভি** এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা **নিয়ামক**।

নাভির মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্ব সরলরেখাকে অধিবৃত্তের **অক্ষ** (axis) বলা হয়। যে বিন্দুতে অধিবৃত্তের অক্ষটি অধিবৃত্তকে ছেদ করে, তাহাকে অধিবৃত্তের **শীর্ষ** (vertex) বলে।

§ 53. **অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ** (The standard equation of a parabola) :

মনে কর S অধিবৃত্তের নাভি এবং $\overleftrightarrow{MM'}$ নিয়ামক। SZ, S হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব। সুতরাং $\overleftrightarrow{SZ}$ অধিবৃত্তের অক্ষ। $\overleftrightarrow{SZ}$ ঐ অধিবৃত্ত ও উহার নিয়ামককে যথাক্রমে A ও Z বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র 42

A বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overleftrightarrow{ZX}$ সরলরেখাকে x-অক্ষ এবং A বিন্দুতে $\overleftrightarrow{ZX}$-এর উপর লম্ব $\overleftrightarrow{AY}$ সরলরেখাকে y-অক্ষ মনে কর।

মনে কর নাভি হইতে নিয়ামকের দূরত্ব $2a$. $\therefore$ $SZ=2a$.
যেহেতু A, অধিবৃত্তের একটি বিন্দু,

$\therefore$ SA (নাভি হইতে A বিন্দুর দূরত্ব) = AZ (নিয়ামক হইতে A বিন্দুর দূরত্ব)। $\therefore$ $SA=AZ=\frac{1}{2}.2a=a$.

সুতরাং নাভি S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ নিয়ামকটি x-অক্ষের উপর লম্ব হওয়ায়, নিয়ামকের সমীকরণ $x=K$ আকারের। যেহেতু, নিয়ামকটি $Z(-a, 0)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $-a=K$.

সুতরাং নিয়ামকের সমীকরণ $x+a=0$.

মনে কর $P(x, y)$ অধিবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু।

মনে কর, PN, P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর N বিন্দুতে লম্ব।

$\because$ P অধিবৃত্তের একটি বিন্দু, $\therefore$ $PS=PN$.

এক্ষণে $PS=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ এবং $PN=x+a$.

$\therefore$ $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x+a$, বা, $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$,

বা, $y^2=(x+a)^2-(x-a)^2$, বা, $y^2=4ax$.

সুতরাং শীর্ষকে মূলবিন্দু এবং অক্ষকে x-অক্ষ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $\mathbf{y^2=4ax}$.

$y^2=4ax$ সমীকরণকে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ বলে।

দ্রষ্টব্য : মনে কর, PQ, P বিন্দু হইতে x অক্ষের উপর লম্ব। সুতরাং $y^2=4ax$ সমীকরণ হইতে পাই, $PQ^2=4AS.AQ$.

§ 5·4. **নাভিলম্ব** (Latus Rectum) :

মনে কর LL′ নাভি S বিন্দুতে অধিবৃত্তের অক্ষের উপর লম্ব এবং অধিবৃত্তকে L ও L′ বিন্দুতে ছেদ করে। LL′কে অধিবৃত্তের **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলে।

মনে কর, কোন অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$. সুতরাং অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক (a, o). মনে কর LL′ (S বিন্দুগামী) অধিবৃত্তের নাভিলম্ব এবং $LS=y$. সুতরাং LS, অধিবৃত্তের অক্ষের (এখানে x-অক্ষের) উপর লম্ব হওয়ায় L বিন্দুর ভুজ a এবং কোটি y অর্থাৎ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, y), যেহেতু (a, y) অধিবৃত্তের একটি বিন্দু, $\therefore$ $y^2=4a^2$. $y=\pm 2a$.

অর্থাৎ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 2a)$ [কারণ, চিত্রে L বিন্দু x-অক্ষের উপরদিকে অবস্থিত।]. L বিন্দু চিত্রে x-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত হওয়ায় L′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -2a)$.

$\therefore$ $LS=L'S=2a$. সুতরাং $LL'=2a+2a=4a$

অর্থাৎ $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$.

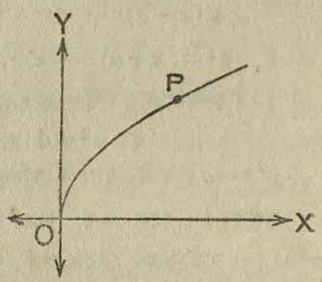
§ 5·5. অধিবৃত্তের আকৃতি (Shape of the Parabola)

§ 5·3-এ দেখা গিয়াছে, যে-কোন অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুতে অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখাকে y-অক্ষ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হয় $y^2=4ax\cdots(1)$ [এখানে নাভি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত].

এক্ষণে, সমীকরণ-(1)-এ y-এর কেবলমাত্র দ্বিঘাত উপস্থিত থাকায় ইহা স্পষ্ট যে, অধিবৃত্তটি x-অক্ষে অর্থাৎ উহার অক্ষরেখায় সুসমঞ্জস (symmetrical about its axis).

আবার সমীকরণ-(1) হইতে পাই, $y=\pm 2\sqrt{ax}\cdots\cdots(2)$

y-অক্ষের বামদিকের কোন বিন্দু অধিবৃত্তটির বিন্দু হইতে পারে না। কারণ, y অক্ষের বামদিকের যে-কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক, এবং এই ঋণাত্মক মানের জন্য (2) হইতে y-এর কেবলমাত্র কাল্পনিক মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু হওয়ায়, মূলবিন্দু $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের বামদিকের অন্তিম বিন্দু। আবার x-এর মান যত বড় হইবে,



চিত্র 43

$y=\pm\sqrt{ax}$-এর সাংখ্যমানও তত বড় হইতে থাকিবে এবং x অসীমের দিকে অগ্রসর হইলে, y-এর মানও অসীমের দিকে অগ্রসর হইবে। সুতরাং অধিবৃত্তটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে অর্থাৎ উহার বক্রতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে হইবে।

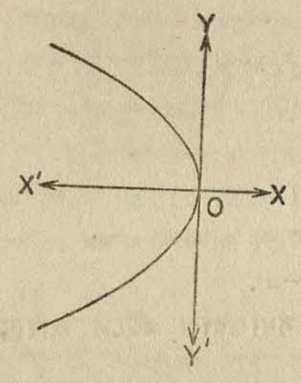
§ 5·6. অধিবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার

(i) $y^2=-4ax$ (a ধনাত্মক)$\cdots(1)$

সমীকরণকে x-এর স্থলে $-x$ বসাইয়া $y^2=4ax$ আকারে পরিণত করা যায়।

সুতরাং $y^2=-4ax$ সমীকরণটিও একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। এই অধিবৃত্তে শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, কিন্তু অক্ষ $\overrightarrow{OX'}$. সুতরাং এই অধিবৃত্তের

y-অক্ষের ডানদিকে কোন অংশ থাকিবে না এবং অধিবৃত্তটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। এই অধিবৃত্তটিও উহার অক্ষরেখায় সুসমঞ্জস হইবে।



চিত্র 44

আবার পূর্বের আলোচনার ন্যায়ই দেখান যাইবে $x^2=4ay\cdots(2)$ ও $x^2=-4ay\cdots(3)$ সমীকরণ দুইটিও দুইটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। উভয় অধিবৃত্ত, y-অক্ষে অর্থাৎ উহার অক্ষে সুসমঞ্জস। অধিবৃত্ত (2)এর x-অক্ষের নীচের দিকে এবং অধিবৃত্ত (3)-এর x-অক্ষের উপরদিকে কোন অংশ থাকিবে না। অধিবৃত্ত (2) ও (3) যথাক্রমে x-অক্ষের উপর ও নীচের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে।

(ii) কোন অধিবৃত্তের নাভিকে মূলবিন্দু এবং অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ

এইক্ষেত্রে অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ হইলে, নাভি s-এর নিয়ামক হইতে দূরত্ব $2a$. সুতরাং নিয়ামকের সমীকরণ $x+2a=0$ এবং নাভির স্থানাঙ্ক (0, 0). অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দু $P(x, y)$-এর অধিবৃত্তের নাভি হইতে দূরত্ব $=$ P বিন্দুর নিয়ামক হইতে দূরত্বের সমান।

সুতরাং $\sqrt{x^2+y^2}=x+2a.$

বা, $x^2+y^2=x^2+4ax+4a^2$

বা, $y^2=4a(x+a)$

এবং ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ নাভিকে মূলবিন্দু এবং অধিবৃত্তের অক্ষকে y-অক্ষ ধরিলে অনুরূপে দেখান যায় যে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $x^2=4a(y+a)$.

(iii) অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং নিয়ামককে y-অক্ষ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ

কোন অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ হইলে, এইক্ষেত্রে নিয়ামকের সমীকরণ $x=0$ এবং নাভির স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$. সুতরাং $P(x, y)$ অধিবৃত্তের

যে কোন বিন্দু হইলে, P বিন্দুর অধিবৃত্তের নাভি হইতে দূরত্ব=P বিন্দুর অধিবৃত্তের নিয়ামক হইতে দূরত্ব।

$\therefore \quad \sqrt{(x-2a)^2+y^2}=x$, বা, $(x-2a)^2+y^2=x^2$

বা, $x^2-4ax+4a^2+y^2=x^2$ বা, $y^2=4ax-4a^2$

বা, $y^2=4a(x-a)$

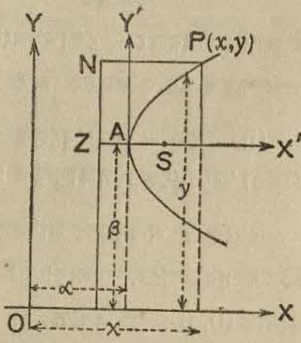
এবং ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ অধিবৃত্তের নিয়ামক ও অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $x^2=4a(y-a)$.

§ 5·7. অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ :

মনে কর, শীর্ষবিন্দু A-র স্থানাঙ্ক (α, β) ও নাভিলম্ব$=4a$. স্পষ্টতঃ অক্ষদ্বয়কে OX ও OY হইতে পরিবর্তিত করিয়া AX′ ও AY′এ স্থানান্তরিত করিলে এবং নূতন অক্ষ অনুসারে অধিবৃত্তের যে কোন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (X, Y) হইলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $Y^2=4aX \cdots (1)$.

এখন OX, OY অক্ষ অনুসারে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ধরিয়া চিত্র হইতে দেখা যায় $X=x-\alpha$ ও $Y=y-\beta$.



চিত্র 45

সুতরাং সমীকরণ-(1) পরিবর্তিত হইয়া দাঁড়ায়, $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha) \cdots (2)$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** এখানে নাভির স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$, শীর্ষবিন্দু (α, β) $LL'=4a$. নিয়ামকের সমীকরণ $x=\alpha-a$ এবং নাভিলম্বের সমীকরণ $x=\alpha+a$.]

বিকল্প প্রমাণ ঃ

যেহেতু. Pএর স্থানাঙ্ক (x, y) ও Sএর স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$,

$\therefore \quad SP^2=(x-a-\alpha)^2+(y-\beta)^2$.

আবার, $PM=ZN=ZA+AN=a+x-\alpha$ (চিত্র দেখ।)

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে পাওয়া যায় $SP=PM$, $\therefore \quad SP^2=PM^2$.

$\therefore \quad (x-a-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x+a-\alpha)^2$,

বা, $(y-\beta)^2=(x+a-\alpha)^2-(x-a-\alpha)^2=4a(x-\alpha)$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)\cdots(2)$.

দেখিতে পাই অনুরূপে, অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে উহার সমীকরণ হইবে $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)\cdots(3)$

অধিবৃত্তের অক্ষ যখন x-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় [(2) হইতে পাই] $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$

বা, $4ax=y^2-2\beta y+\beta^2+4a\alpha$,

বা, $x=\frac{1}{4a}y^2-\frac{\beta}{2a}y+\frac{\beta^2+4a\alpha}{4a}$, অর্থাৎ $x=Ay^2+By+C$.

আবার, অধিবৃত্তের অক্ষ যখন y-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় [সমীকরণ-(3) দেখ]

$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$, বা, $4ay=x^2-2\alpha x+\alpha^2+4a\beta$,

বা, $y=\frac{1}{4a}x^2-\frac{\alpha}{2a}x+\frac{\alpha^2+4a\beta}{4a}$

অর্থাৎ $y=Ax^2+Bx+C$.

অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার $x=Ay^2+By+C$ ও $y=Ax^2+Bx+C$ হইলে উহার শীর্ষবিন্দু নির্ণয় :

$x=Ay^2+By+C$ সমীকরণটি দেখিয়াই বুঝা যায় অধিবৃত্তের অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং ইহাকে $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে।

$Ay^2+By+C=x$, বা, $y^2+\frac{B}{A}y=\frac{x}{A}-\frac{C}{A}$,

বা, $\left(y+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{x}{A}+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{C}{A}=\frac{x}{A}+\frac{B^2-4AC}{4A^2}$,

বা, $\left(y+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(x+\frac{B^2-4AC}{4A}\right)\cdots(1)$

$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ সমীকরণে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β),

$\therefore$ এই সমীকরণের সহিত (1)-কে তুলনা করিয়া দেখা যায়,

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B^2-4AC}{4A}, -\frac{B}{2A}\right)$।

$y=Ax^2+Bx+C$কে অনুরূপভাবে $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(y+\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$

আকারে প্রকাশ করা যায়। যেহেতু এক্ষেত্রে অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং ইহাকে $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$র সহিত তুলনা করিলে দেখা যায়, এখানে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$।

§ 5·8. অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ প্রদত্ত হইলে উহার সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় :

মনে কর, নাভি S-এর স্থানাঙ্ক (α, β) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $Ax+By+C=0$.

মনে কর, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে-কোন একটি বিন্দু এবং P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব।

এখন $SP^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$

এবং $PM^2=\left\{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2$.

তোমরা জান অধিবৃত্তের শর্তানুযায়ী SP = PM, $\therefore \quad SP^2=PM^2$.

অতএব, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left\{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2$

বা, $(A^2+B^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}=(Ax+By+C)^2$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। উপরের সমীকরণটিকে সাজাইয়া রাখিলে পাই

$(A^2+B^2)\{(x^2+y^2)-2(\alpha x+\beta y)+(\alpha^2+\beta^2)\}-(Ax+By)^2$
$-2C(Ax+By)-C^2=0.$

বা, $(A^2+B^2)(x^2+y^2)-(Ax+By)^2-2x\{\alpha(A^2+B^2)+CA\}$
$-2y\{\beta(A^2+B^2)+BC\}+(A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2=0,$

বা, $(Bx-Ay)^2-2x\{\alpha(A^2+B^2)+CA\}-2y\{\beta(A^2+B^2)+BC\}$
$+(A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2=0.$

অতএব অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকার হইবে

$$(lx+my)^2+2gx+2fy+c=0.$$

[**দ্রষ্টব্য :** সমীকরণটি লক্ষ্য করিলে দেখিবে যে x ও yএর দ্বিঘাত অংশ একটি পূর্ণবর্গ রাশিরূপে আছে, সুতরাং x ও y-এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা অধিবৃত্ত সূচিত হইলে ইহার দ্বিঘাত অংশটুকু অর্থাৎ $ax^2+2hxy+by^2$ একটি পূর্ণবর্গ হইবে। অতএব, দেখা যায়, ইহা হইতে গেলে $h^2=ab$ হইতে হইবে।

অতএব, x ও yএর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবার শর্ত $h^2=ab$].

§ 5·9. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের সম্পর্কে (x_1, y_1) বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় :

মনে কর, P (x_1, y_1) অধিবৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু এবং PN অধিবৃত্তের অক্ষ AXএর উপর লম্ব। PN ঐ অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ Q বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক$=x_1$ এবং যেহেতু Q বিন্দু অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, $\therefore$ $QN^2=4ax_1$.

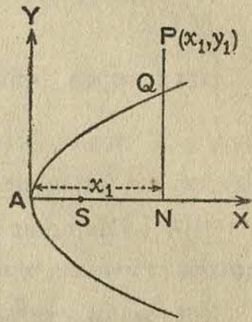
স্পষ্টতঃই দেখা যায় যে, P বিন্দুটি অধিবৃত্তের যথাক্রমে বাহিরে, উপরে বা অভ্যন্তরে থাকিবে

যদি PN$>$, $=$, বা, $<$QN হয়,

অর্থাৎ যদি $PN^2>$, $=$, বা, $<QN^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $y_1^2>$, $=$, বা, $<4ax_1$ হয়,

অর্থাৎ যখন $y_1^2-4ax_1$ রাশিটির মান ধনাত্মক, শূন্য বা ঋণাত্মক হয়।



চিত্র 46

§ 5·10. উপপাদ্য। অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উহার অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

[The locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to its axis.]

এখানে জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া তাহারা অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সমান কোণে নত থাকিবে অর্থাৎ উহাদের ঐ কোণের tangent অর্থাৎ প্রবণতা (gradient) m একই হইবে।

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ এবং উহার একটি জ্যা-এর সমীকরণ $y=mx+c$, এই জ্যা-এর সমান্তরাল জ্যা-গুলির প্রবণতা (gradient) m হইবে এবং উহাদের c ভিন্ন ভিন্ন মানের হইবে।

জ্যা-এর সমীকরণ $y=mx+c$ হইতে পাই $x=\frac{y-c}{m}$.

x-এর এই মান অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$এ বসাইয়া পাই

$$y^2=\frac{4a(y-c)}{m}, \text{ বা, } my^2-4ay+4ac=0,$$

এই সমীকরণের বীজ মনে কর, y_1 এবং y_2. অতএব ঐ জ্যা অধিবৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের কোটি হইল y_1 ও y_2.

এখন ঐ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $y_1+y_2=\frac{4a}{m}$, বা, $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}$.

মনে কর, এই জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k).

$\therefore \quad k=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad \therefore \quad k=\frac{2a}{m}$.

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $y=\frac{2a}{m}$, ইহা একটি সরলরেখা।

যেহেতু অক্ষের সমীকরণ $y=0$, $\therefore$ $y=\frac{2a}{m}$ সরলরেখা অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা এবং উহা অক্ষের সমান্তরাল।

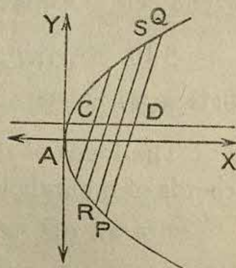
ব্যাস (Diameter) ঃ অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ যে সরলরেখা তাহাকে অধিবৃত্তের ব্যাস বলে।

চিত্রে PQ, RS প্রভৃতি সমান্তরাল জ্যা এবং উহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ CD সরলরেখা।

অতএব CD অধিবৃত্তের ব্যাস।

এই ব্যাস অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা ব্যাসের **শীর্ষবিন্দু**। চিত্রে C হইল ব্যাসের শীর্ষবিন্দু।

অধিবৃত্তের ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-গুলিকে double ordinates বলা হয়।



চিত্র 47

প্যারামিটার (Parameter) ঃ অধিবৃত্তের কোন ব্যাস যে সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহাদের মধ্যে নাভিগামী জ্যাটিকে এই ব্যাসের **প্যারামিটার** বা **উপব্যাস** বলে।

[দ্রষ্টব্য ঃ নাভিলম্বটি অধিবৃত্তের অক্ষের প্যারামিটার।]

অধিবৃত্তের কোন ব্যাসের প্যারামিটার ব্যাসের শীর্ষবিন্দুর নাভি-দূরত্বের চারিগুণ হয়।

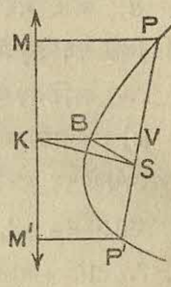
মনে কর, $y^2=4ax \cdots$ (i) অধিবৃত্তের PP′ একটি নাভিগামী জ্যা

PP′এর সমীকরণ $y=m(x-a)\cdots$(ii)

এই জ্যা-এর সমদ্বিখণ্ডক ব্যাস BV-এর সমীকরণ

$$y=\frac{2a}{m},$$

এবং ইহার শীর্ষবিন্দু অর্থাৎ ইহা যে বিন্দুতে অধিবৃত্তকে ছেদ করে সেই B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$। [$y=\frac{2a}{m}$ এবং $y^2=4ax$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া]



চিত্র 48

(i) ও (ii)এর মধ্যে y অপনয়ন করিয়া পাই,

$$m^2(x-a)^2=4ax,$$

বা, $m^2x^2-2a(m^2+2)x+a^2m^2=0.$

মনে করি, এই সমীকরণের বীজদ্বয় x_1 ও x_2.

$\therefore$ (i) ও (ii)এর ছেদবিন্দু P ও P'এর x-স্থানাঙ্ক হইবে x_1 ও x_2.

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $x_1+x_2=\frac{2a(m^2+2)}{m^2}$.

এখন $PP'=PS+P'S=(a+x_1)+(a+x_2)=2a+(x_1+x_2)$

$$=2a+\frac{2a(m^2+2)}{m^2}=4a\left(1+\frac{1}{m^2}\right).$$

আবার, $BS=\left(\frac{a}{m^2}-a\right)^2+\left(\frac{2a}{m}\right)^2=a^2\left\{\left(\frac{1}{m^2}-1\right)^2+\frac{4}{m^2}\right\}$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^2.$$

$$\therefore\quad BS=a\left(1+\frac{1}{m^2}\right).$$

অতএব, $PP'=4BS$.

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(a) $y^2=4x$, (b) $y^2=3x$, (c) $2y^2=5x$, (d) $y^2+6x=0$

(e) $x^2=2y$, (f) $x^2=-4py$, (g) $y^2=px+q$

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2=4ax$.

(a) এখানে $y^2=4x$, $\therefore$ $a=1$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(a, 0)$ অর্থাৎ $(1, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=4\times1=4$.

(b) এখানে $y^2=3x$, সুতরাং $4a=3$, $\therefore\ a=\frac{3}{4}$.

অতএব, নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{3}{4}, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=4\times\frac{3}{4}=3$.

(c) এখানে $2y^2=5x$, বা, $y^2=\frac{5}{2}x$, সুতরাং $4a=\frac{5}{2}$. $\therefore\ a=\frac{5}{8}$.

অতএব, নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{5}{8}, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=4\times\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$.

(d) অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2+6x=0$ অর্থ $y^2=-6x$, সুতরাং অধিবৃত্তটি শীর্ষবিন্দু দিয়া গিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত হইয়াছে।

$\therefore$ নাভিলম্ব $=4a=6$, কিন্তু নাভির স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ বা $(-\frac{3}{2}, 0)$.

(e) এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2=2y$, সুতরাং উহার নাভি y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উহা y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

এখানে $4a=2$, $\therefore\ a=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $(0, a)$ অর্থাৎ $(0, \frac{1}{2})$ এবং নাভিলম্ব $=4a=2$.

(f) এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2=-4py$, সুতরাং উহার নাভি y-অক্ষের ঋণাত্মক অংশের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ এখানে নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -p)$ এবং নাভিলম্ব $=4p$.

(g) এখানে সমীকরণ হইল $y^2=px+q$, বা, $y^2=p\left(x+\frac{q}{p}\right)$.

এক্ষণে মনে কর, $y=Y$ এবং $x+\frac{q}{p}=X$ অর্থাৎ মনে কর, মূলবিন্দুকে $\left(-\frac{q}{p}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হইল এবং নূতন স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় হইল ঐ বিন্দুতে মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়।

এখন প্রদত্ত সমীকরণটি $Y^2=pX$ সমীকরণে পরিণত হইল। অতএব $X=\frac{p}{4}$, $Y=0$ দ্বারা নাভি নির্ণীত হইবে। $\therefore$ মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে, নাভির স্থানাঙ্ক হইল $\left\{\left(\frac{p}{4}-\frac{q}{p}\right), 0\right\}$ অর্থাৎ $\left(\frac{p^2-4q}{4p}, 0\right)$ এবং নাভিলম্ব $=p$

উদা. 2. (a) $y^2=12x$ ও (b) $y^2-4x-2y-7=0$ অধিবৃত্ত দুইটির শীর্ষবিন্দু ও নিয়ামক নির্ণয় কর।

(a) এখানে $4a=12$. $\therefore\ a=3$. অতএব, শীর্ষবিন্দু হইল $(0, 0)$ এবং নিয়ামকের (directrix-এর) সমীকরণ হইল $x+a=0$ অর্থাৎ $x+3=0$.

(b) এখানে প্রদত্ত সমীকরণটি হইল $y^2-2y-4x-7=0$,

বা, $y^2-2y+1=4x+8$.

বা, $(y-1)^2=4(x+2)$.

এক্ষণে, $Y=y-1$ এবং $X=x+2$ ধরিয়া অর্থাৎ অক্ষদ্বয়কে $(-2, 1)$ বিন্দুতে সমান্তরাল অক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া সমীকরণটি হয়, $Y^2=4X$ ইহাতে $4a=4 \quad \therefore \quad a=1$. সুতরাং $X=0, Y=0$ দ্বারা শীর্ষবিন্দু এবং $X+1=0$ দ্বারা নিয়ামক পাওয়া যায়। অতএব, মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে শীর্ষবিন্দু হইল $(-2, 1)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইল $x+2+1=0$, অর্থাৎ $x+3=0$.

দ্রষ্টব্যঃ উপরের উদা. $2(b)$-তে $X=0$ হইয়াছে, কিন্তু $X=x+2$, সুতরাং $x+2=0, \quad \therefore \quad x=-2$. আবার, $Y=0$ হইয়াছে, কিন্তু $Y=y-1$, সুতরাং $y-1=0, \quad \therefore \quad y=1$. অতএব শীর্ষবিন্দু $(-2, 1)$।]

উদা. 3. $y^2=4px$ অধিবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে, উহার নাভিলম্ব ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '34]

$\because$ $y^2=4px$ অধিবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে, $\therefore (-2)^2=4p\times 3$, অতএব, $4=12p, \quad \therefore \quad p=\frac{1}{3}$. $\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $y^2=\frac{4}{3}x$.
$\therefore$ নাভিলম্ব$=\frac{4}{3}$.

আবার, এখানে $a=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}, \quad \therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক$=(a, 0)=(\frac{1}{3}, 0)$.

উদা. 4. যদি $a+b\neq 0$, তবে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী $y^2=2mx$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '52]

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=\frac{ab}{a+b}$ ও $y=\frac{ab}{a+b}$; সুতরাং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$.

এখন যেহেতু অধিবৃত্ত $y^2=2mx$ ঐ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী, সুতরাং আমরা পাই $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2=2m\left(\frac{ab}{a+b}\right), \quad \therefore \quad m=\frac{ab}{2(a+b)}$.

অতএব, নাভির নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left\{\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right\}$.

উদা. 5. $y^2=4x$ অধিবৃত্তের কোন দ্বিগুণ-কোটির দৈর্ঘ্য $8a$ হইলে, প্রমাণ কর যে উহার শীর্ষবিন্দুর সহিত ঐ কোটির প্রান্তদ্বয় সংযোজক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ। [W. B. H. S. 1960]

এখানে 'দ্বিগুণ-কোটি' অর্থে নাভিলম্বের সমান্তরাল জ্যা।

মনে কর, PQ ঐরূপ একটি জ্যা এবং ইহা x-অক্ষকে অর্থাৎ অধিবৃত্তের অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখানে প্রমাণ করিতে হইবে $m\angle PAQ=90°$. A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু। P বিন্দুর কোটি $=4a$ ($\because$ PQ, N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত)। অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$-এ $y=4a$ বসাইয়া পাই $4ax=16a^2$, $\therefore\ x=4a$.

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4a, 4a)$, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4a, -4a)$, এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$।

এখন $\overleftrightarrow{PA}$ রেখার প্রবণতা $=\dfrac{4a}{4a}=1$,

এবং $\overleftrightarrow{QA}$ রেখার প্রবণতা $=\dfrac{-4a}{4a}=-1$,

সুতরাং রেখাদ্বয়ের প্রবণতা দুইটির গুণফল $=1\times -1=-1$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PA}$ ও $\overleftrightarrow{QA}$ পরস্পর লম্ব অর্থাৎ $m\angle PAQ=90°$.

উদা. 6. যে অধিবৃত্তের নাভি $(2, 1)$ বিন্দু ও নিয়ামক $4x-3y=1$ সরলরেখা তাহার সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে কর, অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন একটি বিন্দু। এখানে S-এর স্থানাঙ্ক $(2, 1)$। $\therefore$ $SP=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

আবার, P বিন্দু হইতে নিয়ামক $4x-3y=1$ এর উপর PM লম্ব হইলে,

$$PM=\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4x-3y-1}{5}.$$

এখন, যেহেতু $SP^2=PM^2$; $\therefore$ $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{(4x-3y-1)^2}{25}$

ইহাকে সরল করিয়া পাওয়া যায়,

$9x^2+24xy+16y^2-92x-56y+124=0$ ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

নাভি $S(2, 1)$ হইতে নিয়ামক $4x-3y-1=0$এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য SZ ধরিলে, $SZ=\dfrac{4\times 2-3\times 1-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{5}$,

তোমরা জান, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $LL'=2SZ$ কিন্তু এখানে $SZ=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$.

উদা. 7. $(-1, 1)$ বিন্দুতে যাহার নাভি এবং $x+y+1=0$ সরলরেখা যাহার নিয়ামক সেই অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. (B. Sc) '32]

মনে কর, অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y)। এখানে নাভি Sএর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

এক্ষণে, নাভি S হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

আবার, নিয়ামক $x+y+1=0$ হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্ব

$$=\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}.$$

এখন, $\because$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু উহার নাভি ও নিয়ামক হইতে সমদূরবর্তী, $\therefore$ এখানে $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}$

বা, $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{(x+y+1)^2}{2}$,

বা, $2(x+1)^2+2(y-1)^2=(x+y+1)^2$,

বা, $2x^2+4x+2+2y^2-4y+2=x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$

বা, $x^2+y^2+2x-6y-2xy+3=0$,

বা, $(x-y)^2+2x-6y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 8. $y^2=4ax$এর নাভিলম্ব যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে বৃত্তটি অধিবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু দিয়া যায়।

এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$, $\therefore$ নাভিলম্ব $=4a$.

যেহেতু বৃত্তটির ব্যাস $=$ নাভিলম্ব $=4a$, $\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=2a$.

আবার নাভিলম্ব ব্যাস বলিয়া, নাভি S-ই বৃত্তের কেন্দ্র।

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a, 0)$

অতএব, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2+(y-0)^2=(2a)^2$,

বা, $(x-a)^2+y^2=4a^2$.

আবার, অধিবৃত্তের অক্ষ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক আমরা জানি $(-a, 0)$। এখানে Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2+y^2=4a^2$ সিদ্ধ হয়; কারণ, $(-a-a)^2+0=4a^2$; সুতরাং দেখা যাইতেছে যে নির্ণেয় বৃত্তটি অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে।

অনুশীলনী V (A)

1. নিম্নের অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির নাভিলম্ব ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

(i) $y^2=14x$ (ii) $y^2=5x$ (iii) $2y^2=7x$
(iv) $y^2+2x=0$ (v) $x^2=4y$ (vi) $x^2+8y=0$
(vii) $2x^2+7y=0$ (viii) $y^2=ax+b$.

2. (a) $x^2=8y$ (b) $x^2-4x-2y-7=0$ অধিবৃত্ত দুইটির শীর্ষবিন্দু ও নাভি নির্ণয় কর।

3. $y^2=3px$ অধিবৃত্তের একটি বিন্দু $(2, -1)$; অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $y^2=13x$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দুই প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. $y=ax^2+bx+c$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '72]

6. $5y^2=7x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '36]

7. $(3,-2)$ বিন্দুগামী $y^2=4px$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '34]

8. $3y^2=4x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব, নাভির স্থানাঙ্ক এবং $2x=3y$ সরলরেখা উহার সহিত কোন্ কোন্ বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে তাহা নির্ণয় কর। [C. U. '35]

9. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ও $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং ঐ ছেদবিন্দুগামী $y^2=2ax$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '43]

10. যে অধিবৃত্তের নাভি $(3, -2)$ বিন্দু, এবং $2x-y+3=0$ সরলরেখা যাহার নিয়ামক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '58]

11. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা অধিবৃত্তকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।

12. একটি অধিবৃত্ত ধনাত্মক y-অক্ষকে অক্ষ করিয়া বিস্তৃত, উহার নাভি $(0, 3)$ বিন্দু এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12. উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. একটি অধিবৃত্তের নাভি মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং নিয়ামক $2x+y-1=0$ সরলরেখা। উহার সমীকরণ ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর। [C. U. '54]

14. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু যে বৃত্তের কেন্দ্র এবং যাহা অধিবৃত্তের নাভিগামী তাহার সমীকরণ কি হইবে?

15. একটি অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দুই প্রান্তবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ (নাভিলম্ব দ্বারা) নির্ণয় কর।

(B) উপবৃত্ত (Ellipse)

§ 5·11. **সংজ্ঞা :** যদি কোন গতিশীল বিন্দু কোন সমতলের উপরে এরূপে চলিতে থাকে যে, ঐ সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে বিন্দুটির দূরত্ব দুইটির অনুপাত সর্বদা সমান থাকে এবং ঐ অনুপাতটির মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে একটি **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।

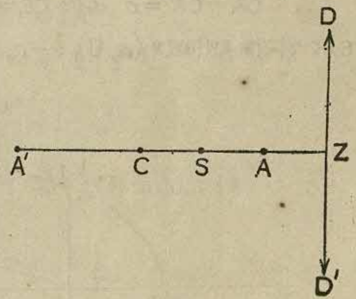
ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে উপবৃত্তের **নাভি** (Focus), ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) এবং ঐ ধ্রুবক অনুপাতকে **উৎকেন্দ্রতা** (eccentricity) বলে। উৎকেন্দ্রতাকে সাধারণতঃ ইংরাজি অক্ষর e দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

§ 5·12. **উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং কেন্দ্র** (Vertices and centre of an ellipse.)

মনে কর কোন উপবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক $\overleftrightarrow{DD'}$ এবং উৎকেন্দ্রতা e. নাভি S হইতে নিয়ামকের উপর SZ লম্ব টান। SZ রেখাংশকে A এবং A' বিন্দুতে $e : 1$ একই অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর।

$$\therefore \quad \frac{SA}{AZ}=\frac{SA'}{A'Z}=e \cdots (1)$$

সুতরাং (1) হইতে পাই, A এবং A' উপবৃত্তের বিন্দু।



চিত্র 49

A ও A'-কে উপবৃত্তের দুইটি শীর্ষবিন্দু বলা হয়। মনে কর C, AA' রেখাংশের মধ্যবিন্দু; C বিন্দুকে উপবৃত্তের কেন্দ্র বলে। AA' রেখাংশকে উপবৃত্তটির **পরাক্ষ** (major axis) বলা হয়।

মনে কর, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ অর্থাৎ $AA'=2a$. $\therefore$ $CA=CA'=a$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $SA=e.AZ \cdots (2)$

এবং $SA'=e.A'Z \cdots (3)$

(2) এবং (3) সমীকরণদ্বয়ের উভয় পক্ষ যোগ করিয়া পাই,

$SA+SA'=e(AZ+A'Z)$

বা, $AA'=e\{(CZ-CA)+(CZ+CA')\}$ [চিত্র দেখ]

বা, $2a=e\{(CZ-a)+(CZ+a)\}=2e.CZ,$

$\therefore \quad a=e.CZ,$ বা, $CZ=\frac{a}{e}.$

আবার সমীকরণ (2) হইতে সমীকরণ (1) বিয়োগ করিয়া পাই

$SA'-SA=e(A'Z-AZ),$ বা, $(CS+CA')-(CA-CS)=e.AA'$

বা, $(CS+a)-(a-CS)=e.2a,$ বা, $2CS=2ea,\quad \therefore \quad CS=ae.$

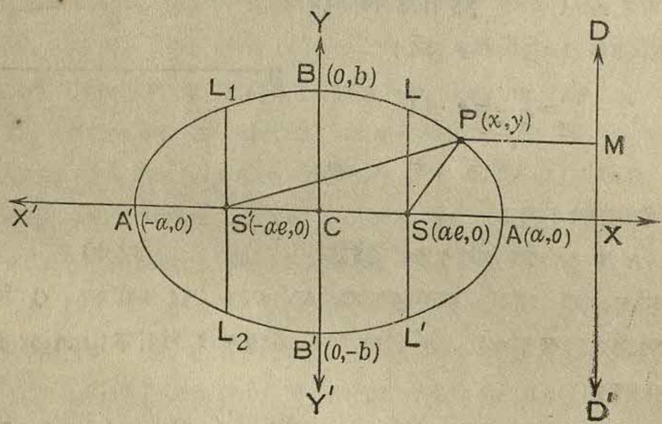
§ 5·13. কোন উপবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং পরাক্ষ রেখাকে x-অক্ষ ধরিয়া উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর কোন উপবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক $\overleftrightarrow{DD'}$, C কেন্দ্র, CX নিয়ামকের উপর লম্ব এবং A ও A′ দুইটি শীর্ষ বিন্দু। সুতরাং AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ রেখা।

C বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overleftrightarrow{CX}$ সরলরেখাকে x-অক্ষ এবং C বিন্দুতে $\overleftrightarrow{CX}$এর উপর লম্ব সরলরেখাকে y-অক্ষ মনে কর।

মনে কর উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$.

$\therefore$ $CA=CA'=a$ এবং $CS=ae$ অতএব, A ও A′ বিন্দুদ্বয়ের ও নাভি Sএর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0), (-a, 0)$ ও $(ae, 0)$.



চিত্র 50

এক্ষণে, যদি $\overleftrightarrow{CX}$, নিয়ামক $\overleftrightarrow{DD'}$-কে X বিন্দুতে ছেদ করে তবে $CX=\frac{a}{e}$ হইবে।

অতএব X বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{e}, 0)$ সুতরাং নিয়ামক $\overleftrightarrow{DD'}$, x-অক্ষের উপর লম্ব ও $(\frac{a}{e}, 0)$ বিন্দুগামী হওয়ায়, উহার সমীকরণ $x=\frac{a}{e}$.

এখন মনে কর P (x, y) উপবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু। PS যোগ কর। PM, P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব হইলে, $FS = e.PM \cdots (1)$

এক্ষণে, $PM = \frac{a}{e} - x$ এবং $PS = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$

∴ (1) হইতে পাই, $\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e(\frac{a}{e} - x) = a - ex.$

বা, $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2.$

[উভয়পক্ষে বর্গ করিয়া]

বা, $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \cdots (2)$ [উভয় পক্ষকে $a^2(1-e^2)$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

সমীকরণ (2), উপবৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ। এখানে সমীকরণ-(2)এ, $x = 0$ বসাইয়া পাই, $y = \pm a\sqrt{1-e^2}.$

দেখা যাইতেছে যে, y-অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর, ঐ দুইটি বিন্দু B ও B′, ধর $BB' = 2b$.

∴ $b = CB = a\sqrt{1-e^2}$, ∴ $b^2 = a^2(1-e^2).$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (3)$

সমীকরণ-(3)কে কোন উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (standard equation) বলা হয়।

সংজ্ঞা : BB′ রেখাংশকে উপবৃত্তের উপাক্ষ (minor-axis) বলা হয়। উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$ এবং $b^2 = a^2(1-e^2).$

§ 5·14. দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক (Second focus and second directrix.)

পূর্ব অনুচ্ছেদের সমীকরণ-(2) হইতে পাই,

$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$ বা, $x^2 - x^2e^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$

বা, $x^2 + a^2e^2 + y^2 = a^2 + e^2x^2.$

বা, $(x^2 + 2aex + a^2e^2) + y^2 = a^2 + 2aex + e^2x^2$

[উভয়পক্ষে $2aex$ যোগ করিয়া]

বা, $(x+ae)^2 + y^2 = (a+ex)^2,$

বা, $(x+ae)^2 + y^2 = e^2(x + \frac{a}{e})^2 \cdots (A).$

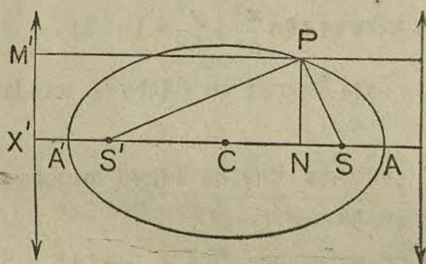
বা, $\frac{\sqrt{(x+ae)^2 + y^2}}{(x + \frac{a}{e})} = \pm e \cdots (A)$

এক্ষণে, উপরের (A)-র বামপক্ষের লব $\sqrt{(x+ae)^2+y^2}$ হইল $(-ae, 0)$ ও P (x, y) বিন্দু দুইটির দূরত্ব এবং হর $x+\frac{a}{e}$ হইল P বিন্দুর $ex+a=0$ সরলরেখা হইতে দূরত্ব। সুতরাং ডানপক্ষের e-র সাংখ্যমান ধরিলে, বলা যায় যে,

উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু P (x, y) এর $(-ae, 0)$ বিন্দু ও $ex+a=0$ সরলরেখা হইতে দূরত্ব দুইটির অনুপাত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e. এইজন্য $(-ae, 0)$ বিন্দুকে উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি (second focus) ও $ex+a=0$ বা $x=-\frac{a}{e}$ সরলরেখাকে উপবৃত্তের দ্বিতীয় নিয়ামক (second directrix) বলা হয়। নাভি বিন্দুদ্বয়গামী যে জ্যা দুইটি নিয়ামকের সমান্তরাল তাহাদিগকে উপবৃত্তের দুইটি **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলে।

§ 5·15. উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর নাভিদ্বয় হইতে দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

P, উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু। $\overleftrightarrow{MX}$ ও $\overleftrightarrow{M'X'}$ দুইটি নিয়ামক, S ও S′ দুইটি নাভি। MM′, P বিন্দু দিয়া নিয়ামকদ্বয়ের উপর লম্ব।



চিত্র 51

এখন, $SP+S'P=e.PM+e.PM'$

$=e(PM+PM')=e.MM'=2e.CX=2a=$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য।

[দ্রষ্টব্য : ∵ ঐ দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি = পরাক্ষের দৈর্ঘ্য ; ∴ ঐ সমষ্টি ধ্রুবক।]

§ 5·16. নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য।

(চিত্র 50 দেখ) মনে কর, LL′ নাভি Sএ উপবৃত্তের নাভিলম্ব। যেহেতু S-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$, ∴ Lএর ভুজ $=ae$. সুতরাং L-এর স্থানাঙ্ক (ae, SL).

যেহেতু L, উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর উপরিস্থ বিন্দু।

∴ Lএর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{SL^2}{b^2}=1, \text{ বা, } \quad \frac{SL^2}{b^2}=1-e^2$$

$$\therefore \quad SL^2=b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2} \quad \left[\because\ b^2=a^2(1-e^2)\right],$$

$$\therefore \quad SL=\frac{b^2}{a}. \quad \therefore \text{ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য}=LL'=2SL=\frac{2b^2}{a}.$$

অনুরূপে অপর নাভিলম্বটির দৈর্ঘ্যও $\frac{2b^2}{a}$.

§ 5·17. P উপবৃত্তের কোন বিন্দু এবং PN, P বিন্দুর কোটি হইলে, $PN^2 : AN.AN' :: b^2 : a^2$. (চিত্র 51)

উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

বা, $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2}$.

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{b^2}=\frac{A'N.AN}{a^2}, \quad \therefore \quad \frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{BC^2}{AC^2}.$$

§ 5·18. **সংক্ষিপ্তসার :**

কোন উপবৃত্তের কেন্দ্রকে মূল বিন্দু, পরাক্ষ ও উপাক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরিলে,

1. উপবৃত্তের সমীকরণ হয়, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0).

3. পরাক্ষ ও উপাক্ষের সমীকরণ যথাক্রমে $y=0$ ও $x=0$ এবং তাহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$.

4. নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$.

5. নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=\frac{a}{e}$ ও $x=-\frac{a}{e}$.

6. শীর্ষদ্বয়ের অর্থাৎ পরাক্ষ ও উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় A ও A'এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$.

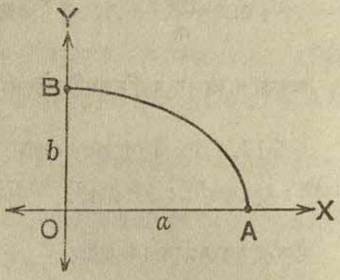
7. উপাক্ষ ও উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় অর্থাৎ B ও B' বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b)$ ও $(0, -b)$

8. নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য : $\frac{2b^2}{a}$.

9. a ও bএর সম্পর্ক : $b^2=a^2(1-e^2)$.

§ 5·19. উপবৃত্তের আকৃতি (Shape of the Ellipse)

উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ পাওয়া যায়। এখন দেখা যাইতেছে, যদি xএর মান a হইতে বৃহত্তর বা $-a$ হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, তবে yএর মান কাল্পনিক হয়। ∴ উপবৃত্তটি A এবং A′-এর বাহিরে যাইবে না। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে ইহা B, B′-এর বাহিরেও যায় না। আরও দেখা যায় যে xএর যে-কোন মানে yএর দুইটি সমান এবং বিপরীতধর্মী মান পাওয়া যায় এবং yএর যে-কোন মানে xএর সমান এবং বিপরীতধর্মী দুইটি মান পাওয়া যায়। ∴ উপবৃত্ত পরাক্ষ রেখা এবং উপাক্ষ রেখায় সুসমঞ্জস অবিচ্ছিন্ন বক্র রেখা (closed curve)। সুতরাং প্রথম পাদে উপবৃত্তটির আকৃতির সহিত অপর তিনটি পাদে উপবৃত্তটির আকৃতি সর্বসম।



চিত্র 52

5·20. উপবৃত্তের উপাক্ষ এবং পরাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইলে উপবৃত্তের সমীকরণ।

উপবৃত্তের পরাক্ষ যদি y-অক্ষ বরাবর হয় অর্থাৎ উহার নাভিদ্বয় যদি y-অক্ষের উপর থাকে এবং মূলবিন্দুটি পূর্বের ন্যায় কেন্দ্রে অবস্থিত হয়, তবে উপবৃত্তের সমীকরণ হয় $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ [এক্ষেত্রে পরাক্ষ $=2a$ এবং উপাক্ষ $=2b$ ধরিয়া]।

এইরূপে উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, ae)$ ও $(0, -ae)$ হইয়া থাকে ; এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হয় $ey=a$ ও $ey=-a$.

§ 5·21. উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ (General equation)।

নাভি, উৎকেন্দ্রতা ও নিয়ামকের সমীকরণ হইতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, উপবৃত্তের নাভি S-এর স্থানাঙ্ক (α, β), উৎকেন্দ্রতা$=e$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $Ax+By+C=0$.

উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু লও। P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান।

উপবৃত্তের শর্ত হইতে জানি $SP=e.PM$, ∴ $SP^2=e^2PM^2$.

এখন $SP^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ এবং $PM^2=\left\{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2.\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2},$$

বা, $(A^2+B^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}=e^2.(Ax+By+C)^2$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

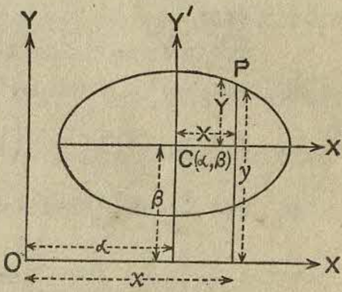
এই সমীকরণকে সরল করিলে

$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ আকারে পরিণত হয়।

[**দ্রষ্টব্য** : এই আকারের সংখ্যাযুক্ত সহগ-বিশিষ্ট সমীকরণ হইতে দেখা যাইবে যে, সমীকরণটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে যখন $h^2<ab$ হইবে।]

§ **5·22.** উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যখন যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল তখন উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ রেখাদ্বয় CX′ ও CY′ বরাবর থাকিয়া মূল অক্ষদ্বয় OX ও OYএর সমান্তরালভাবে আছে। উপবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু P লও। C-কে মূল বিন্দু এবং CX′ ও CY′কে অক্ষদ্বয় ধরিয়া P বিন্দুর স্থানাঙ্ক মনে কর (X, Y)।



চিত্র 53

এখন পরাক্ষের দৈর্ঘ্য$=2a$ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য$=2b$ হইলে, উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\cdots\cdots(i)$$

যদি মূল অক্ষদ্বয় OX ও OY অনুসারে Cএর স্থানাঙ্ক (α, β) ও Pএর স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, তবে চিত্র 53 অনুসারে দেখা যায় যে, $X=x-\alpha$ ও $Y=y-\beta$.

অতএব, উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1,$$

সরল করিয়া এই সমীকরণের আকার দাঁড়ায়

$$lx^2+my^2+2gx+2fy+c=0,$$

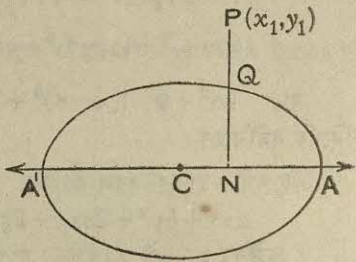
এখানে l ও m দুইটি ভিন্ন ভিন্ন ধনাত্মক রাশি।

§ 5·23. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত সম্পর্কে (x_1, y_1) বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বাহিরে লওয়া হইল। পরাক্ষ AA′এর উপর PN লম্ব।

$CN=x_1$ ও $PN=y_1$.

মনে কর, PN-লম্ব উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। [চিত্র 54 দেখ] অঙ্কন অনুসারে Q বিন্দুর



চিত্র 54

স্থানাঙ্ক (x_1, QN), $\therefore \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{QN^2}{b^2}=1$, বা, $QN^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$। চিত্র হইতে স্পষ্টতঃ দেখা যায়, P বিন্দু উপবৃত্তের যথাক্রমে বহিঃস্থ, উপরিস্থ বা অভ্যন্তরস্থ হইবে,

যখন, $PN >=$ বা $< QN$ হইবে,

বা, যখন, $PN^2 >=$ বা $< QN^2$ হইবে,

বা, যখন, $y_1^2 >=$ বা $< b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$ হইবে,

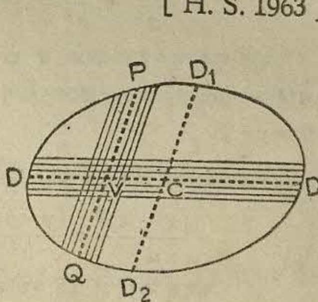
বা, যখন $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1 >=$ বা <0 হইবে।

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বহিঃস্থ, উপরিস্থ বা অভ্যন্তরস্থ হইবে যখন $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1$ রাশির মান যথাক্রমে ধনাত্মক, শূন্য অথবা ঋণাত্মক হইবে।

§ 5·24. উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা। [H. S. 1963]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ইহার কেন্দ্রই মূলবিন্দু।

[চিত্র 55-এ] সমান্তরাল জ্যাগুলির যে কোন একটি জ্যা PQ এর সমীকরণ ধরা যাক $y=mx+c \cdots$(i)



চিত্র 55

সমান্তরাল জ্যাগুলির প্রত্যেকটির প্রবণতা 'm' এবং c-এর ভিন্ন ভিন্ন মানে উহারা বিভিন্ন সরলরেখা।

মনে কর, জ্যা-(i) এর অর্থাৎ PQএর মধ্যবিন্দু Vএর স্থানাঙ্ক (h, k)।

$\therefore \quad k=mh+c, \quad$ বা, $\quad c=k-mh \cdots$(ii)

এখন (i) হইতে yএর মান উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1, \quad \text{বা,} \quad b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2,$$

বা, $\quad x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0 \cdots$(iii)

মনে কর, x_1 ও x_2 এই দ্বিঘাত সমীকরণ-(iii)এর দুইটি বীজ। ইহারাই সমীকরণ-(i) ও উপবৃত্তের ছেদবিন্দু P ও Qএর x-স্থানাঙ্ক।

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2}.$$

কিন্তু $h=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}$

$$=-\frac{a^2m}{a^2m^2+b^2}(k-mh)$$ [(ii) হইতে cএর মান বসান হইল।]

$\therefore \quad k=-\dfrac{b^2}{a^2m}h,$ [ইহা c বর্জিত বলিয়া সমান্তরাল জ্যাগুলির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রেই সত্য হইবে।]

অতএব, মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

ইহা x ও y-এর একঘাত সমীকরণ বলিয়া সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা এবং ইহা (0, 0) দ্বারা সিদ্ধ হয় বলিয়া এই সরলরেখাটি মূখবিন্দুগামী অর্থাৎ এক্ষেত্রে উহা উপবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুগামী।

সুতরাং সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

§ 5·25. **ব্যাস ও প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস** (Diameter and conjugate diameters).

উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে উপবৃত্তের ব্যাস (Diameter) বলে। চিত্র 55এ DD′ একটি ব্যাস D_1D_2 আর একটি ব্যাস।

DD′ ব্যাসের সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}x \cdots$(i)

একই উপবৃত্তের ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসের জন্য mএর মান বিভিন্ন হইবে।

মনে কর, সমীকরণ (i) টি $y=m'x$, সুতরাং $m'=-\frac{b^2}{a^2m}$,

বা, $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ ...(ii)

এখন দেখ, সমীকরণ $y=m'x$ যদি একটি ব্যাসের সমীকরণ হয়, তবে $y=mx$ আর একটি ব্যাসের সমীকরণ হইবে। $\left[\because\ m=-\frac{b^2}{a^2m'}\right]$

তাহা হইতে দেখা যাইতেছে যে, যদি $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ হয়, তবে সরলরেখা $y=m'x$, অপর একটি সরলরেখা $y=mx$ এর সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক হয়।

দুইটি ব্যাস যদি এমনভাবে অবস্থান করে যে, একটি অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ঐ দুইটি ব্যাসকে উপবৃত্তের পরস্পর প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস (conjugate diameters) বলে।

সমীকরণ (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে m ও m' প্রবণতা যুক্ত দুইটি ব্যাসের পরস্পর প্রতিযোগী হওয়ার শর্ত হইল

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

উদা. 1. (i) $4x^2+9y^2=36$ ও (ii) $5x^2+4y^2=20$ উপবৃত্ত দুইটির নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা ও নাভির স্থানাংক নির্ণয় কর।

(i) প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2+9y^2=36$, বা, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

অতএব, এখানে $b^2=4$ এবং $a=3$,

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times4}{3}=\frac{8}{3}$,

উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9-4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাংক হইল $(\pm ae, 0)$ অর্থাৎ $\left(\pm3\times\frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$

বা, $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

(ii) প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $5x^2+4y^2=20$, বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

এখানে দেখা যাইতেছে [illegible] এক্ষেত্রে পরাক্ষ রেখা অর্থাৎ নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2\times 4}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$,

উৎকেন্দ্রতা $=e=\sqrt{\dfrac{5-4}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $\left(0, \pm\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ বা $(0, \pm 1)$,

উদা. 2. $4x^2+9y^2+16x-9y+12=0$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয়, নিয়ামকদ্বয় এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইল $4x^2+9y^2+16x-9y+12=0$,

বা, $4x^2+16x+16+9y^2-9y+\frac{9}{4}=6\frac{1}{4}$,

বা, $4(x+2)^2+9(y-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{4}$, বা, $\frac{16}{25}(x+2)^2+\frac{36}{25}(y-\frac{1}{2})^2=1$.

এখন $x+2=X$ এবং $y-\frac{1}{2}=Y$ লিখিলে অর্থাৎ মূলবিন্দুকে $(-2, \frac{1}{2})$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া সেই বিন্দু দিয়া মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে নূতন অক্ষদ্বয় ধরিলে ঐ সমীকরণটি হয় $\frac{16}{25}X^2+\frac{36}{25}Y^2=1$

এখানে $a^2=\frac{25}{16}$ ও $b^2=\frac{25}{36}$. $\therefore\ e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{25}{16}-\frac{25}{36}}{\frac{25}{16}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

আবার নূতন অক্ষদ্বয়ে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$ $=\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{12}, 0\right)$ ও $\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{12}, 0\right)$ এবং নিয়ামকদ্বয় হইল $X\pm\dfrac{a}{e}=0$, অর্থাৎ $X\pm\frac{3}{4}\sqrt{5}=0$.

অতএব, মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(-2\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{12}, \dfrac{1}{2}\right)$ $\left[\because\ x+2=X=\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{12},\ \therefore\ x=-2\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{12};\right.$

এবং $\because\ y-\frac{1}{2}=Y=0,\ \therefore\ y=\frac{1}{2}]$

আবার, নিয়ামকদ্বয় হইল $x+2\pm\frac{3}{4}\sqrt{5}=0$ [$\because\ X=x+2$].

উদা. 3. কোন উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4$ ইঞ্চি এবং নিকটতম নাভি হইতে শীর্ষের দূরত্ব $1{\cdot}5$ ইঞ্চি। উহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [C. U. '44]

(চিত্র 50 দেখ) এখানে নাভিলম্ব $=4$ ইঞ্চি,

$\therefore$ SL $=2$ ইঞ্চি, এবং AS $=1{\cdot}5$ ইঞ্চি।

আবার, $\because$ SL $=e.$XS $=e($XA$+$AS$)=e.$XA$+e.$AS $=$ AS $+e.$AS.

$\therefore\ 2=1{\cdot}5+1{\cdot}5e$, বা, $1{\cdot}5e=2-1{\cdot}5={\cdot}5$.

$\therefore$ নির্ণেয় $e=\dfrac{{\cdot}5}{1{\cdot}5}=\dfrac{1}{3}$.

উদা. 4. নাভি $(1, -2)$, নিয়ামক $y=2x+3$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ হইলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, S নাভি, P উপবৃত্তের উপর যে-কোন একটি বিন্দু, ইহার স্থানাঙ্ক যেন (x, y) এবং PM নিয়ামকের উপর লম্ব।

$$\therefore \quad SP=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$$

এবং নিয়ামক হইতে অর্থাৎ $2x-y+3=0$ হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব

$$=\frac{2x-y+3}{\sqrt{1^2+2^2}}, \quad \therefore \quad PM=\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}; \text{ কিন্তু } SP=e.PM,$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=\frac{1}{2}\times\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-2x+4y+5=\frac{(2x-y+3)^2}{20},$$

বা, $20x^2+20y^2-40x+80y+100$

$$=4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y,$$

বা, $16x^2+19y^2+4xy-52x+86y+91=0$, ইহাই উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 5. এরূপ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, স্থানাঙ্ক-অক্ষদ্বয় যাহার দুই অক্ষ এবং যাহা $(2, 2)$ ও $(3, 1)$ বিন্দু দিয়া যায়। উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$\because$ উপবৃত্তটি $(2, 2)$ এবং $(3, 1)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ ঐ দুই স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ।

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned}\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{aligned}\right\}$$

এই দুই সমীকরণকে সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $a^2=\frac{32}{3}$ এবং $b^2=\frac{32}{5}$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমীকরণ হইল } \frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$$

বা, $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$, বা, $3x^2+5y^2=32.$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{32}{5}}{\sqrt{\frac{32}{3}}}=\frac{2\sqrt{32}.\sqrt{3}}{5}=\frac{8}{5}\sqrt{6}$;

আবার, $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{32}{3}-\frac{32}{5}}{\frac{32}{3}}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

$$\therefore\quad ae=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{5}=\frac{8}{\sqrt{15}}.$$

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ বা $\left(\pm\dfrac{8}{\sqrt{15}}, 0\right)$.

উদা. 6. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের দুই অক্ষ এবং (*a*) যাহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 5 ও উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$; (*b*) যাহার নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$ ও উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{3}$. [C. U.]

(*a*) মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$\therefore\quad \dfrac{2b^2}{a}=$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=5$, এবং $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=e^2=\dfrac{4}{9}$.

অতএব, $2b^2=5a\cdots$(i) এবং $5a^2-9b^2=0\cdots$(ii)

প্রথম সমীকরণ হইতে b^2এর মান $\dfrac{5a}{2}$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$5a^2-\frac{45a}{2}=0,\quad\text{বা,}\quad 5a\left(a-\frac{9}{2}\right)=0,$$

কিন্তু $\because\ a\neq 0,\ a-\frac{9}{2}=0,\ \therefore\ a=\frac{9}{2}$.

$\therefore\quad a^2=\frac{81}{4}$, এবং $b^2=\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{45}{4}$.

$\therefore$ উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\dfrac{x^2}{\frac{81}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{45}{4}}=1$,

বা, $\dfrac{4x^2}{81}+\dfrac{4y^2}{45}=1$, বা, $20x^2+36y^2=405$.

(*b*) মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$\because$ নাভিবিন্দুদ্বয় $(\pm ae, 0)$, এবং $e=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ এখানে $ae=4$, বা $\frac{1}{3}.a=4$, $\therefore\ a=12$

আবার, যেহেতু $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$, বা, $a^2e^2=a^2-b^2$,

$\therefore\quad 16=144-b^2,\quad \therefore\quad b^2=128.$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{128}=1$, বা, $8x^2+9y^2=1152$

উদা. 7. $2x^2+3y^2=6$ উপবৃত্তের যে ব্যাস $3x+4y=5$ সরলরেখার সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে উপবৃত্তের সমীকরণ $2x^2+3y^2=6$,

বা, $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\cdots$(i), $\therefore\ a^2=3$ ও $b^2=2$,

সরলরেখাটির সমীকরণ $3x+4y=5$,

বা, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\cdots$(ii), $\therefore\ m=-\frac{3}{4}$.

মনে কর, ব্যাসের সমীকরণ $y=m'x$.

$\because\ mm'=-\frac{b^2}{a^2},\ \therefore\ -\frac{3}{4}m'=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{2}{3}$ বা, $m'=\frac{8}{9}$.

অতএব, ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{8}{9}x$ বা, $9y=8x$.

উদা. 8. $4x^2+5y^2=20$ উপবৃত্তের $y=3x$ ব্যাসের অনুবন্ধীব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2+5y^2=20$,

বা, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\ \therefore\ a^2=5$ ও $b^2=4$.

প্রদত্ত ব্যাসের সমীকরণ $y=3x,\ \therefore\ m=3$.

মনে কর, অনুবন্ধীব্যাসের সমীকরণ $y=m'x$.

$\therefore\ m'\times 3=-\frac{4}{5}$, বা, $m'=-\frac{4}{15}$.

অতএব, নির্ণেয় অনুবন্ধীব্যাসের সমীকরণ হইল

$y=-\frac{4}{15}x$, বা, $4x+15y=0$.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে $y+3x=0$ এবং $4y-x=0$ সরলরেখাদ্বয় $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস।

উপবৃত্তের সমীকরণ $3x^2+4y^2=5$,

বা, $\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1,\ \therefore\ a^2=\frac{5}{3}$ ও $b^2=\frac{5}{4}$.

ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ, $y+3x=0$, বা, $y=-3x$,

এবং $4y-x=0$, বা, $y=\frac{1}{4}x$.

$\therefore\ mm'=-3\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$, এবং $-\frac{b^2}{a^2}=\frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}}=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ [$\because$ উভয় পক্ষেরই মান $=-\frac{3}{4}$.]

ব্যাস দুইটির অনুবন্ধী হওয়ার ইহাই শর্ত।

অতএব, উপবৃত্তের প্রদত্ত ব্যাসদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী।

অনুশীলনী V (B)

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেক উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর :—

(i) $9x^2+16y^2=144.$ (ii) $3x^2+4y^2=12.$

(iii) $25x^2+16y^2=400.$ (iv) $2x^2+3y^2=8.$

(v) $2x^2+3y^2=1.$ [U. P. B. '52]

2. $3x^2+4y^2=48$ উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U. '41]

3. $9x^2+5y^2-30y=0$ উপবৃত্তের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $4x^2+9y^2-24x-36y+36=0$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয় নির্ণয় কর।

5. একটি উপবৃত্তের নাভিলম্বটি পরাক্ষের অর্ধেক ; উহার উৎকেন্দ্রতা, নির্ণয় কর। [U. P. B. '48]

6. $x^2+2y^2=2$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U. '37]

7. $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয় নির্ণয় কর।

8. অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) যাহার পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 ও 6.

(ii) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\surd 2}$ ও নাভিলম্ব 3.

(iii) যাহার পরাক্ষ $\frac{9}{2}$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\surd 3}$.

(iv) যাহা (2, 3) ও (−4, 1) বিন্দু দিয়া গিয়াছে।

9. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) যাহার নাভি (2, 1), $x+2y-1=0$ সরলরেখা নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\surd 3}$. (ii) যাহার নাভি $(-1, 1)$, নিয়ামক $x-y+3=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$. [C. U. '45]

10. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় একটি উপবৃত্তের দুই অক্ষ ; উহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$ এবং উহা $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C U. '42]

11. x- ও y-অক্ষ যাহার অক্ষদ্বয়, যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$ এরূপ $(-3, 1)$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '48]

12. x- ও y-অক্ষ একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় এবং উহা $(2, 2)$ ও $(3, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী ; উহার সমীকরণ ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [C. U. '39]

13. x- ও y-অক্ষই যে উপবৃত্তের দুইটি অক্ষ তাহা যদি $(-3, 1)$ ও $(2, -2)$ বিন্দুগামী হয়, তবে তাহার সমীকরণ ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

[C. U. '45]

14. $\tan^{-1}11$ কোণে নত $5x^2+6y^2=15$. উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. যে উপবৃত্তের নাভি $(6, 7)$, নিয়ামক $x+y+2=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ও পরাক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া যে উপবৃত্তের নাভিলম্ব 5 ও উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর [C. U]

17. একটি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$ এবং নাভি ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব 16 ইঞ্চি হইলে উহার প্রধান অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '43]

18. প্রমাণ কর যে, $4x-3y+8=0$ এবং $x+3y-1=0$ সরলরেখাদ্বয় $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাসের সমান্তরাল।

[C. U. '49]

19. প্রমাণ কর যে, $y+3x=0$ এবং $4y-x=0$, $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস। [C. U.]

(C) পরাবৃত্ত (Hyperbola)

§ 5·26. যদি কোন গতিশীল বিন্দু কোন সমতলের উপরে এমনভাবে চলিতে থাকে যে, ঐ সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে উহার দূরত্ব দুইটির অনুপাত সর্বদা সমান থাকে এবং ঐ অনুপাত যদি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে একটি পরাবৃত্ত (Hyperbola) বলে।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে পরাবৃত্তের নাভি (Focus), ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখাকে নিয়ামক (Directrix) এবং ঐ সমান বা ধ্রুবক অনুপাতকে উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলা হয়। সাধারণতঃ নাভি S দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতা e দ্বারা সূচিত হইয়া থাকে।

[**দ্রষ্টব্য** : যে কনিকের উৎকেন্দ্রতা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর, তাহা একটি পরাবৃত্ত।]

§ 5·27. **পরাবৃত্তের শীর্ষ ও কেন্দ্র** (Vertices and Centre of a Hyperbola).

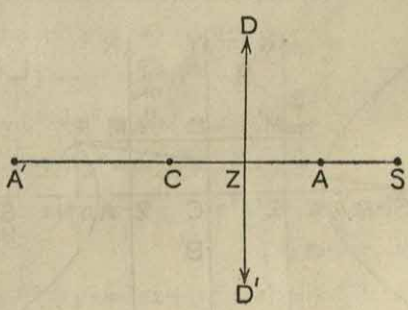
মনে কর, একটি পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e এবং উহার নাভি ও নিয়ামক যথাক্রমে S বিন্দু ও $\overleftrightarrow{DD'}$ সরলরেখা। মনে কর SZ, S হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব এবং SZ, নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। SZ-কে A ও A′ বিন্দুতে $e:1$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর।

$$\text{সুতরাং, } \frac{SA}{AZ}=\frac{SA'}{A'Z}=e\cdots(1)$$

সুতরাং A ও A′ বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের দুইটি বিন্দু। A ও A′ বিন্দু দুইটিকে পরাবৃত্তের দুইটি **শীর্ষবিন্দু** বলে। মনে কর, C, AA′ সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু। C বিন্দুকে পরাবৃত্তটির **কেন্দ্র** বলে। AA′ রেখাংশকে পরাবৃত্তের **তির্যকঅক্ষ** (Transverse axis) বলা হয়।

মনে কর, AA′-এর দৈর্ঘ্য $2a$. $\therefore$ $CA=C'A=a$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই, $SA=e.AZ\cdots(2)$ এবং $SA'=e.A'Z\cdots(3)$



চিত্র 56

(2) এবং (3) সমীকরণ দুইটির উভয়পক্ষ যোগ করিয়া পাই,

$SA+SA'=e(AZ+A'Z)$, বা, $(CS-CA)+(CS+CA')=e.AA'$,

বা, $(CS-a)+(CS+a)=e.2a$, বা, $2CS=2ae$ $\therefore$ $CS=ae$.

আবার সমীকরণ-(2) হইতে সমীকরণ-(1) বিয়োগ করিয়া পাই,

$SA'-SA=e(A'Z-AZ)$, বা, $AA'=e[(CA'+CZ)-(CA-CZ)]$

বা, $2a=2e.CZ$. $\therefore$ $CZ=\frac{a}{e}$.

§ 5·28. কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং তির্যক অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, কোন পরাবৃত্তের নাভি S ও নিয়ামক $\overleftrightarrow{KZ}$. $\overleftrightarrow{KZ}$এর উপর SZ লম্ব টান। মনে কর SZ পরাবৃত্তকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

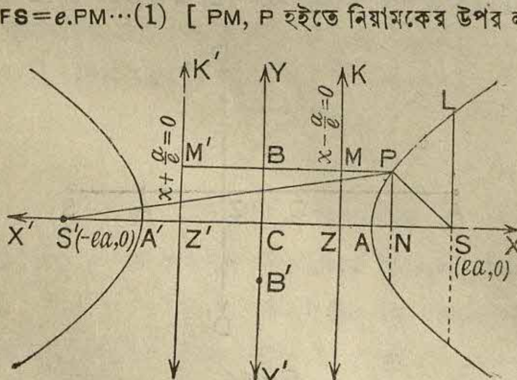
সুতরাং A, A′ বিন্দু দুইটি পরাবৃত্তের দুইটি শীর্ষ। মনে কর, C, AA′ রেখাংশের মধ্যবিন্দু। অতএব C, পরাবৃত্তের কেন্দ্র। C বিন্দুতে YY′, AA′এর উপর লম্ব টান। Cকে মূলবিন্দু এবং $\overleftrightarrow{AA'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$-কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ মনে কর।

Z বিন্দু x-অক্ষের একটি বিন্দু এবং $CZ=\frac{a}{e}$ (পূর্ব অনুচ্ছেদে প্রমাণ করা হইয়াছে।) হওয়ায় Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$. এক্ষণে নিয়ামক, AA′ বা x-অক্ষের উপর লম্ব এবং $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুগামী। সুতরাং **নিয়ামকের সমীকরণ** $x=\frac{a}{e}$.

আবার $CS=ae$ হওয়ায়, S বিন্দুর অর্থাৎ **নাভির স্থানাঙ্ক** $(ae, 0)$.

এক্ষণে, মনে কর $P(x, y)$ পরাবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু।

$\therefore$ $PS=e.PM\cdots(1)$ [PM, P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব]



চিত্র 57

এক্ষণে $PM=x-\frac{a}{e}$ এবং $PS=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$

$\therefore \quad \sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e(x-\frac{a}{e})=(ex-a)$

বা, $(x-ae)^2+y^2=(ex-a)^2$ [উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1) \cdots$ (A) [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1. \quad \cdots(1).$ [উভয়পক্ষকে $a^2(e^2-1)$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

যেহেতু $e>1$, সুতরাং $a^2(e^2-1)$ ধনাত্মক।

মনে কর, $a^2(e^2-1)=b^2$

সুতরাং পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots(2)$

সমীকরণ- 2)কে পরাবৃত্তের **আদর্শ সমীকরণ** (standard equation) বলা হয়।

সংজ্ঞা : $\overleftrightarrow{YY'}$ সরলরেখার উপর তির্যক অক্ষের দিকে B ও B′ এরূপ দুইটি বিন্দু নির্ণয় কর, যেন BC=B′C=b হয়।

BB′ রেখাংশকে পরাবৃত্তের **অনুবন্ধী অক্ষ** (conjugate axis) বলে। সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$.

§ 5·29. পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক (Second focus and second directrix of a hyperbola) :

পূর্ব অনুচ্ছেদের সমীকরণ-(A) হইতেছে

$$x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1),$$

বা $x^2e^2-x^2-y^2=a^2e^2-a^2$

বা, $a^2e^2+x^2+y^2=a^2+e^2x^2$

বা, $x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$.

[উভয়পক্ষে, $2aex$ যোগ করিয়া]

বা, $(x+ae)^2+y^2=(ex+a)^2=e^2(x+\frac{a}{e})^2$

$\therefore \quad \sqrt{(x+ae)^2+y^2}=e(x+\frac{a}{e})$, বা, $\frac{\sqrt{(x+ae)^2+y^2}}{x+\frac{a}{e}}=e \cdots$(B)

এক্ষণে, উপরের (B) হইতে বলা যায়, P (x, y) বিন্দুর S′$(-ae, 0)$ বিন্দু

এবং $x=\frac{a}{e}$ সরলরেখা হইতে দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e. সুতরাং S′ ও $x=-\frac{a}{e}$ সরলরেখাকে যথাক্রমে পরাবৃত্তের নাভি ও নিয়ামক ধরিলেও একই পরাবৃত্ত পাওয়া যাইবে।

অতএব পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

দ্রষ্টব্য : (i) S ও S′ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$.

(ii) S নাভির জন্য নিয়ামকের সমীকরণ $x=\frac{a}{e}$ এবং S′ নাভির জন্য নিয়ামকের সমীকরণ $x=-\frac{a}{e}$ এবং নিয়ামকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

§ 5·30. নাভিলম্ব ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য

সংজ্ঞা : নাভি-বিন্দুগামী যে জ্যা নিয়ামকের সমান্তরাল, তাহাকে পরাবৃত্তের **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলে। যেহেতু পরাবৃত্তের দুইটি নাভি ও দুইটি নিয়ামক, সুতরাং পরাবৃত্তের দুইটি নাভিলম্ব থাকিবে।

S নাভির স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$। ∴ S বিন্দুগামী নাভিলম্বের প্রান্ত L-এর স্থানাঙ্ক (ae, SL).

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2}-\frac{\text{SL}^2}{b^2}=1, \quad \text{বা,} \quad e^2-\frac{\text{SL}^2}{b^2}=1$$

বা, $\frac{\text{SL}^2}{b^2}=e^2-1=\frac{a^2+b^2}{a^2}-1=\frac{b^2}{a^2}, \quad \therefore \text{SL}^2=\frac{b^4}{a^2}, \quad \therefore \text{SL}=\frac{b^2}{a}.$

$$\therefore \quad \text{নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য}==2\text{SL}=\frac{2b^2}{a}.$$

অনুরূপে S′ নাভিগামী নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যও $\frac{2b^2}{a}$.

§ 5·31. পরাবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর নাভিদূরত্ব দুইটির অন্তর উহার তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

মনে কর, S ও S′ দুইটি নাভি এবং P পরাবৃত্তের উপরিস্থ বিন্দু। [§ 5·28এর চিত্র দেখ]

$\therefore \quad \text{S}'\text{P}=e\text{PM}'$ এবং $\text{SP}=e.\text{PM}$

$\therefore \quad \text{S}'\text{P}-\text{SP}=e(\text{PM}'-\text{PM})=e\text{MM}'=e\text{ZZ}'=2e.\text{CZ}=2a=\text{AA}'.$

§ 5·32. সংক্ষিপ্তসার :

কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু, তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরিলে,

1. পরাবৃত্তের সমীকরণ হয় $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. পরাবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0)

3. তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ যথাক্রমে $y=0$ ও $x=0$.

4. নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$

5. নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x+\frac{a}{e}=0$ এবং $x-\frac{a}{e}=0$.

6. নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : $\frac{2b^2}{a}$. 7. উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$.

8. A, A′, B, B′ বিন্দু চারিটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0), (-a, 0), (0, b)$ $(0, -b)$.

§ 5·33. পরাবৃত্তের কোন বিন্দু P হইতে তির্যক অক্ষের উপর PN লম্ব হইলে, $\frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{b^2}{a^2}$.

প্রমাণ। মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{বা,} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2}.$$

$$=\frac{(x-a)(x+a)}{a^2}\ldots\ldots(1)$$

এক্ষণে, $PN=y$; $AN=CN-CA=x-a$ এবং $A'N=A'C+CN=a+x$,

∴ উপরের (1) হইতে পাওয়া যায়,

$$\frac{PN^2}{b^2}=\frac{AN.A'N}{a^2}; \quad \text{বা,} \quad \frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{b^2}{a^2}.$$

§ 5·34. **পরাবৃত্তের আকৃতি** (Shape of hyperbola).

পূর্বের আলোচনায় দেখা গেল যে, যে কোন পরাবৃত্তের সমীকরণকে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots(1)$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

এক্ষণে, 1. সমীকরণ-(1)-এ x ও y-এর কেবলমাত্র দ্বিঘাত উপস্থিত থাকায়, পরাবৃত্ত উভয় অক্ষের যে কোনটিতে সুসমঞ্জস। কারণ, $P(x', y')$ পরাবৃত্তের কোন বিন্দু হইলে (x', y') সমীকরণ-(1) সিদ্ধ করিবে। আবার (x', y') দ্বারা সমীকরণ-(1) সিদ্ধ হইলে $(x', -y')$ বা $(-x', y')$ দ্বারাও সমীকরণ-(1) সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ $P(x', y')$ পরাবৃত্তের কোন বিন্দু হইলে, $(x', -y')$ বা $(-x', y')$ বিন্দুও পরাবৃত্তের বিন্দু হইবে।

2. সমীকরণ-(1)-কে y-এর জন্য সমাধান করিয়া,

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\cdots\cdots(2)$$

বা, $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\cdots\cdots(3)$ আকারে লেখা যায়।

সমীকরণ-(2) ও (3), যথাক্রমে x-অক্ষের উপর ও নীচের দিকে পরাবৃত্তের অংশকে প্রকাশ করে। আবার যেহেতু তির্যক অক্ষ বা x-অক্ষে পরাবৃত্ত সুসমঞ্জস, সুতরাং পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের উপরদিকের আকৃতি সম্বন্ধে আলোচনাই যথেষ্ট হইবে। সুতরাং সমীকরণ-(2) সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

প্রথমে সমীকরণ-(2)-এ $x=0$ বসাইলে দেখা যায় y-এর মান কাল্পনিক হয়। x-এর মান 0 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া যতক্ষণ না a হয়, y-এর মান ততক্ষণ কাল্পনিক হইবে। $x=a$ হইলে $y=0$ হয়। সুতরাং $(a, 0)$ বিন্দু y-অক্ষের ডানদিকে পরাবৃত্তের অন্তিম বাম বিন্দু। এইবার x-এর মান a হইতে যত বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে, y-এর মান সর্বদা বাস্তব ও ধনাত্মক হইবে এবং ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। এইরূপে x-এর মান যখন অসীমরূপে বড় হইবে, y-এর মানও তখন অসীমের দিকে অগ্রসর হইবে। সুতরাং পরাবৃত্তের এই অংশ $(a, 0)$ বিন্দু হইতে ক্রমশঃ ডানদিকে ঊর্ধ্বমুখে অনন্তের দিকে অগ্রসর হইবে। অনুরূপে দেখা যাইবে যে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের উপরদিকে y-অক্ষের বামদিকের অংশে $(-a, 0)$ বিন্দুর ডানদিকে কোন বিন্দু নাই। পরাবৃত্তের এই অংশ $(-a, 0)$ বিন্দু হইতে ক্রমশঃ বামদিকে ঊর্ধ্বমুখে অনন্তের দিকে অগ্রসর হইবে।

একই প্রকার আলোচনায় সমীকরণ-(3) হইতে পাই, তির্যক অক্ষের নীচের দিকের অংশও y-অক্ষের উভয়দিকে $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ বিন্দু হইতে যথাক্রমে ডান ও বামদিকে নিম্নাভিমুখে অনন্তের দিকে অগ্রসর হইবে।

সুতরাং পরাবৃত্তের y-অক্ষের (অর্থাৎ অনুবন্ধী অক্ষের) উভয়দিকে দুইটি বিচ্ছিন্ন অংশ থাকে এবং $x=a$ ও $x=-a$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে পরাবৃত্তের কোন অংশ থাকে না।

§ 5·35. পরাবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার :

(i) পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়কে y-অক্ষ বরাবর অর্থাৎ পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ y-অক্ষ বরাবর লইলে, এবং পরাবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিলে § 5·27 এর ন্যায় দেখান যায় যে পরাবৃত্তের সমীকরণ হয়, $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, যেখানে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$.

দ্রষ্টব্য। 1. এই ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল।

2. পরাবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং নাভিদ্বয়কে কোনও একটি স্থানাঙ্কের অক্ষের উপর লইলে পরাবৃত্তের সমীকরণের আকার হয়

$$ax^2-by^2=\pm 1(a, b>0)$$

নাভিদ্বয় সংযোজক রেখাকে x-অক্ষ ধরিলে ধনাত্মক চিহ্নটি এবং y-অক্ষ ধরিলে ঋণাত্মক চিহ্নটি লইতে হয়।

(ii) পরাবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, k) এবং তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ হইলে

(a) যখন তির্যক অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, তখন পরাবৃত্তের সমীকরণ হয়

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

(b) তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হয়

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

§ 5·36. (x', y') বিন্দুটি একটি পরাবৃত্তের ভিতরে অথবা বাহিরে অবস্থিত হইলে $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1$এর মান যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয়।

প্রমাণ। উপবৃত্তের ক্ষেত্রের অনুরূপ। কেবলমাত্র b^2-এর পরিবর্তে $-b^2$ লইতে হইবে। (§ 5·23 দেখ)।

§ 5·37. অনুবন্ধী পরাবৃত্ত (Conjugate hyperbola):

কোন পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ অপর একটি পরাবৃত্তের যথাক্রমে অনুবন্ধী অক্ষ ও তির্যক অক্ষ হইলে, পরাবৃত্ত দুইটিকে পরস্পরের **অনুবন্ধী পরাবৃত্ত** বলে।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$ সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$

পরাবৃত্ত দুইটি পরস্পরের অনুবন্ধী।

§ 5·38 সমপরাবৃত্ত (Rectangular hyperbola)

কোন পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য সমান হইলে পরাবৃত্তটিকে একটি **সমপরাবৃত্ত** (Rectangular hyperbola) বলে।

যেহেতু $a=b$, $\therefore$ সমপরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$,

বা, $x^2-y^2=a^2$.

ইহার উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2a^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.

§ 5.39. পরাবৃত্তের অসীম পথ (Asymptotes)

অসীম পথের সংজ্ঞা। যদি কোন সরলরেখা অনন্তপ্রসারী কোন কনিকের (conic) সহিত অসীম দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে মিলিত হয়, কিন্তু নিজে সম্পূর্ণ অসীমে অবস্থিত না থাকে, তবে তাহাকে ঐ কনিকের অসীম পথ (asymptote) বলে।

পরাবৃত্তের সমীকরণটিকে $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ এই আকারে লেখা যায়। ইহা হইতে দেখা যায় যে, ঐ পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুর পক্ষে y-এর সাংখ্যমান $\pm\frac{b}{a}x$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব y এর সীমাস্থান $\pm\frac{b}{a}x$ হইল এবং x এর মান যত ∞-এর নিকটতর হইতে থাকিবে y-এর মান তত ঐ সীমাস্থ মানের নিকটতর হইবে। অতএব, দেখা যায় যে x-এর মান ক্রমশঃ যত বৃদ্ধি পাইবে, পরাবৃত্তটি ক্রমশঃ তত $y=\pm\frac{b}{a}x$ সরলরেখাদ্বয়ের নিকটতর হইতে থাকিবে। $\therefore$ এই সরলরেখাদ্বয় হইল ঐ পরাবৃত্তের অসীম পথ।

দ্রষ্টব্য : (1) পরাবৃত্তের অসীম পথের সমীকরণ হইল $y=\pm\frac{b}{a}x$. ইহাকে $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ এই আকারেও লেখা যায়। অতএব, ঐ সমীকরণদ্বয়ের মিলিত আকার হইল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

(2) এখানে দেখা গেল যে, পরাবৃত্তের দুইটি অসীম পথ, উভয়ই কেন্দ্রগামী এবং x-অক্ষের সহিত উভয়ের নতি সমান।

(3) কোন পরাবৃত্তের এবং তাহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের অসীম পথ একই হয়।

§ 5.40. **ব্যাস।** পরাবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হয় এবং উহাকে পরাবৃত্তের ব্যাস বলে।

পরাবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ (The equation of the diameter of the hyperbola) :

মনে কর, পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং মনে কর, ব্যাসটি $y=mx+c$ সরল রেখার সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{b^2}{a^2m}.x$[উপবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণে b^2-এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিয়া]

বা, $y=m'x$, $\therefore$ $m'=\frac{b^2}{a^2m}$, বা, $mm'=\frac{b^2}{a^2}$.

যদি দুইটি ব্যাস $y=mx$ এবং $y=m'x$ এরূপ হয় যে একটি অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহাদিগকে পরস্পর প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস (conjugate diameters) বলে। ঐ ব্যাস দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী (conjugate) হইবার শর্ত হইল $mm'=\frac{b^2}{a^2}$.

উদা. 1. পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় ধরিয়া এমন একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর,

(i) যাহার তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয় 6 ও 4,

(ii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 6 এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব=10,

(iii) যাহা (1, 1) ও (2, −3) বিন্দু দিয়া যায়,

(iv) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{3}{2}}$ এবং একটি নাভি $(2\sqrt{6}, 0)$.

(i) এখানে $a=3$ এবং $b=2$.

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. বা, $4x^2-9y^2=36$.

(ii) এখানে $b=3$, নাভিদ্বয়ের দূরত্ব$=2ae=10$, $\therefore$ $ae=5$;

কিন্তু $ae=\sqrt{a^2+b^2}$, $\therefore$ $5=\sqrt{a^2+9}$,

বা, $25=a^2+9$, $\therefore$ $a^2=16$.

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, বা, $9x^2-16y^2=144$.

(iii) মনে কর, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\because$ ইহা (1, 1) এবং (2, −3) বিন্দুগামী

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ & \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \\ \text{এবং}\ & \frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1 \end{aligned}\right\}$$

এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $a^2=\frac{5}{2}$, $b^2=\frac{5}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$, বা, $2x^2-3y^2=5$.

(iv) এখানে একটি নাভি $(2\sqrt{6}, 0)$, সুতরাং $ae=2\sqrt{6}$.

$\therefore\ a.\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt{6}, \quad \therefore\ a=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4.$

আবার, $a^2e^2=a^2+b^2, \quad \therefore\ 16\times\frac{3}{2}=16+b^2,$

বা, $24=16+b^2$; $\quad \therefore\ b^2=8.$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$, বা, $x^2-2y^2=16$.

উদা. 2. $9x^2-16y^2=144$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে পরাবৃত্তের সমীকরণ $9x^2-16y^2=144$.

বা, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, সুতরাং এখানে $a=4$ এবং $b^2=9$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$,

উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16+9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)=(\pm 5, 0)$.

উদা. 3. (i) $4x^2-9y^2=36$ এবং (ii) $x^2-4y^2-6x-16y-23=0$. পরাবৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটির নাভিদ্বয়, নিয়ামকদ্বয় এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

(i) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$,

সুতরাং এখানে $a=3, b=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9+4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$,

অতএব, $ae=3\times\frac{\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}$.

$\therefore$ নির্ণেয় নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)=(\pm\sqrt{13}, 0)$.

এক্ষণে, নিয়ামকের সমীকরণের সূত্র $x\pm\frac{a}{e}=0$ হইতে

নির্ণেয় নিয়ামকদ্বয় হইল $x\pm\frac{9}{\sqrt{13}}=0 \left(\because\ \frac{a}{e}=\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$.

(ii) এখানে প্রদত্ত সমীকরণকে $(x^2-6x+9)-4(y^2+4y+4)=16$.

বা, $(x-3)^2-4(y+2)^2=16$,

বা, $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ এই আকারে লেখা যায়।

এক্ষণে যদি $x-3=X$ এবং $y+2=Y$ ধরা হয় অর্থাৎ যদি এখানে অক্ষদ্বয়কে (3, −2) বিন্দুতে সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ে স্থানান্তরিত করা হয়, তবে সমীকরণটির আকার হইবে $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{4}=1$. এখানে $a^2=16$ ও $b^2=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16+4}{16}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$\therefore$ $ae=4\times\frac{1}{2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ এবং $\frac{a}{e}=\frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$.

$\therefore$ নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm2\sqrt{5},\ 0)$ এবং নিয়ামকদ্বয় হইল $X\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0$. অতএব, মূল (অর্থাৎ পূর্বের) অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(3\pm2\sqrt{5},\ -2)$ এবং নিয়ামকদ্বয় হইল

$$x-3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0.$$

[দ্রষ্টব্য : নূতন অক্ষদ্বয়ে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm2\sqrt{5},\ 0)$ এখানে, $X=\pm2\sqrt{5}$, সুতরাং পূর্ব অক্ষদ্বয় সম্পর্কে $X=x-3$ বলিয়া $x-3=\pm2\sqrt{5}$ অর্থাৎ $x=3\pm2\sqrt{5}$ হইল। আবার, $\because Y=y+2$, $\therefore$ এখানে $y+2=0$, $\therefore$ $y=-2$. $\therefore$ নির্ণেয় নাভিদ্বয় $(3\pm2\sqrt{5},\ -2)$ হইল। অনুরূপে Xএর স্থানে $x-3$ বসাইয়া নির্ণেয় নিয়ামকদ্বয় হইল $x-3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0$.]

উদা. 4. একটি পরাবৃত্তের নাভি (−1, 2), উৎকেন্দ্রতা 3 এবং নিয়ামক $x+y=7$; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, P ঐ পরাবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এক্ষণে, নাভি (−1, 2) হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব

$=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}$.

আবার, নিয়ামক $x+y=7$ হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব

$$=\frac{x+y-7}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+y-7}{\sqrt{2}}.$$

এক্ষণে, $\dfrac{\text{নাভি হইতে P বিন্দুর দূরত্ব}}{\text{নিয়ামক হইতে P বিন্দুর দূরত্ব}}=e,$

$\therefore$ এখানে $\dfrac{\sqrt{(x^2+y^2+2x-4y+5)}}{\dfrac{x+y-7}{\sqrt2}}=e=3,$

$$\therefore \quad \sqrt{(x^2+y^2+2x-4y+5)}=\frac{3}{\sqrt2}(x+y-7).$$

এক্ষণে, উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া ও তৎপরে সরল করিয়া পাই

$7x^2+7y^2+18xy-130x-118y+431=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 5. দেখাও যে $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ এবং উহার কেন্দ্র ও অক্ষদ্বয় নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $(3x^2-12x+12)-(4y^2+8y+4)=12,$

বা, $3(x-2)^2-4(y+1)^2=12,$ বা, $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1.$

মূলবিন্দুকে (originকে) যদি $(2, -1)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়, তবে ঐ সমীকরণটি $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{3}=1$ হয় এবং ইহা পরাবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার, যাহার কেন্দ্র (centre) হইল মূলবিন্দু এবং যাহার অক্ষদ্বয় হইল x-অক্ষ ও y-অক্ষ।

এক্ষণে, পূর্বের মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে কেন্দ্রটি হইল $(2, -1)$ এবং পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় হইল $y+1=0$ ও $x-2=0$.

উদা. 6. একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(-1, 3)$ ও $(5, 3)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{2}$. পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর $S(-1, 3)$ ও $S'(5, 3)$ পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় এবং C বিন্দু SS′ রেখাংশের মধ্যবিন্দু। যেহেতু S ও S′ বিন্দুদ্বয়ের কোটি সমান, সুতরাং SS′ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং SS′এর দৈর্ঘ্য $=5-(-1)=6$. $\therefore$ $CS=\frac{1}{2}SS'=3$.

মনে কর, $2a$ ও $2b$ যথাক্রমে পরাবৃত্তটির তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ $CS=ae=a.\frac{3}{2}=\frac{3}{2}a.$ $\therefore$ $3=\frac{3}{2}a$, বা, $a=2$

আবার $b^2=a^2e^2-a^2=a^2(e^2-1)=4(\frac{9}{4}-1)=4.\frac{5}{4}=5.$

সুতরাং যেহেতু পরাবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$\left\{\dfrac{5-(-1)}{2}, \dfrac{3+3}{2}\right\}=(3, 3)$, সুতরাং পরাবৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1.$$

উদা. 7. যে পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 6 ও নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 10, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে অনুবন্ধী অক্ষ $=6$, $\therefore\ b=\frac{6}{2}=3$,

এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব অর্থাৎ $2ae=10$, বা, $ae=5$, $\therefore\ a=\dfrac{5}{e}$,

আবার, $e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}$, বা, $e^2=1+\dfrac{9}{\frac{25}{e^2}}=1+\dfrac{9e^2}{25}$,

বা, $e^2-\frac{9}{25}e^2=1$, বা, $\frac{16}{25}e^2=1$, বা, $e^2=\frac{25}{16}$, $\therefore\ e=\frac{5}{4}$,

$\therefore\ a=\dfrac{5}{e}=\dfrac{5}{\frac{5}{4}}=4.$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, বা, $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$,

বা, $9x^2-16y^2=144.$

অনুশীলনী V (C)

1. পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্ক-অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, (i) যাহার তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে 4 ও 3 ;

(ii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 5 এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 6{\cdot}5, 0)$;

(iii) যাহা $(3, -2)$ বিন্দুগামী ও যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 7 ;

(iv) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$ এবং তির্যক অক্ষ $8\sqrt{2}$.

2. (a) $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্ব এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) $\dfrac{x^2}{12^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U. '57]

3. (i) $12x^2-4y^2=3$ এবং (ii) $3x^2-4y^2+18x+16y+2=0$ পরাবৃত্ত দুইটির নাভিদ্বয় নিয়ামকদ্বয়, এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

4. (i) $x^2-3y^2=12$ পরাবৃত্তের $(-6, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের যে প্রান্তের উভয় স্থানাঙ্কই ধনাত্মক সেই প্রান্তে নাভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 3, একটি নাভি $(-1, 3)$ এবং অনুরূপ নিয়ামক $x+2y+1=0$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. যে পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় x- ও y-অক্ষ এবং যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 12 ও নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 13, তাহার সমীকরণ কি হইবে ?

§ 5·32 কনিকের প্যারামেট্রিক সমীকরণ (Parametric equations of Conic Sections) :

(i) বৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ :

θ-র সকল মানের জন্য $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের একটি বিন্দু। কারণ, $a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta=a^2$ হওয়ায় $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $x^2+y^2=a^2$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ কে বৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ বলে। বৃত্তটির কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a.

(ii) m-এর সকল মানের জন্য $(am^2, 2am)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি বিন্দু। কারণ $(2am)^2=4a.am^2$ হওয়ায়, $(am^2, 2am)$, $y^2=4ax$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

$x=am^2, y=2am$ অধিবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ। এই অধিবৃত্তের অক্ষ, x-অক্ষ, শীর্ষ মূলবিন্দু এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$.

(iii) θ-র সকল মানের জন্য $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি বিন্দু। কারণ $\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ হওয়ায় $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$, উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ। এই উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$.

(iv) θ-র সকল মানের জন্য $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের একটি বিন্দু। কারণ $\frac{a^2\sec^2\theta}{a^2}-\frac{b^2\tan^2\theta}{b^2}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ হওয়ায় $(a\sec\theta, b\tan\theta)$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$ একটি পরাবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ। এই পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং উহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$.

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. প্রমাণ কর যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(am_1^2, 2am_1)$ ও $(am_2^2, 2am_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক জ্যা নাভিবিন্দুগামী হইলে, $m_1m_2=-1$.

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-am_1^2}{am_1^2-am_2^2}=\frac{y-2am_1}{2am_1-2am_2},$$

বা, $$\frac{x-am_1^2}{a(m_1-m_2)(m_1+m_2)}=\frac{y-2am_1}{2a(m_1-m_2)},$$

বা, $$\frac{x-am_1^2}{(m_1+m_2)}=\frac{y-2am_1}{2},$$

বা, $2x-2am_1^2=y(m_1+m_2)-2am_1(m_1+m_2)$

বা, $2x-2am_1^2=y(m_1+m_2)-2am_1m_2-2am_1^2$.

বা, $2x=y(m_1+m_2)-2am_1m_2$.

এক্ষণে এই সরলরেখা (জ্যা) অধিবৃত্তের নাভি বিন্দু $(a, 0)$ দিয়া গেলে,
$2a=-2am_1m_2$, বা, $m_1m_2=-1$.

উদা. 2. যদি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের কোন নাভিবিন্দুগামী-জ্যার নাভি বিন্দুদ্বারা ছিন্ন অংশ দুইটির দৈর্ঘ্য l ও l' হয়, তবে প্রমাণ কর $\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a}$.

[C. U. B. Sc. '51]

মনে কর PP′, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিবিন্দু S-গামী একটি জ্যা এবং P, P′ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(am_1^2, 2am_1)$ ও $(am_2^2, 2am_2)$. যেহেতু PP′ জ্যা নাভি S$(a, 0)$ বিন্দুগামী, $\therefore\ m_1m_2=-1$ (উপরের উদাহরণ 1)।

এক্ষণে $$\text{SP}=\sqrt{(am_1^2-a)^2+(2am_1-0)^2}$$
$$=a\sqrt{(m_1^2-1)^2+4m_1^2}$$
$$=a\sqrt{(m_1^2+1)^2}=a(1+m_1^2)$$

মনে কর, SP$=l$ ও SP′$=l'$, $\therefore\ l=a(1+m_1^2)$.

অনুরূপে $l'=a(1+m_2^2)$.

এক্ষণে, $$\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a(1+m_1^2)}+\frac{1}{a(1+m_2^2)}=\frac{1+m_1^2+1+m_2^2}{a(1+m_1^2)(1+m_2^2)}$$
$$=\frac{2+m_2^2+m_1^2}{a(1+m_1^2+m_2^2+m_1^2m_2^2)}=\frac{2+m_2^2+m_1^2}{a(1+m_1^2+m_2^2+1)}$$
$$=\frac{2+m_1^2+m_2^2}{a(m_1^2+m_2^2+2)}=\frac{1}{a}.$$

উদা. 3. পরাক্ষ এবং উপাক্ষকে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় ধরিয়া $(-3, 1)$ বিন্দুগামী যে-উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[B. U. 1963]

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because$ উপবৃত্তটি $(-3, 1)$ বিন্দুগামী, $\therefore \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \cdots (1)$

আবার, যেহেতু উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\therefore b^2=a^2(1-\frac{2}{5})=\frac{3}{5}a^2 \cdots\cdots (2)$

সুতরাং (1) হইতে পাই, $\frac{9}{a^2}+\frac{5}{3a^2}=1$, বা, $\frac{32}{3a^2}=1$

$\therefore a^2=\frac{32}{3}$, এবং $b^2=\frac{32}{5}$.

সুতরাং উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$,

বা, $3x^2+5y^2=32$.

উদা. 4. একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয় $(0, 1)$ ও $(0, -1)$ দুই বিন্দু এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এক একক। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উপবৃত্তের নাভিদ্বয় সমাপতিত হইলে উহাকে কিরূপে বৃত্ত রূপে গণ্য করা যায় তাহা ব্যাখ্যা কর।

[C. U. '51]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (b>a)$, উহার নাভিদ্বয় $(0, be)$ ও $(0, -be)$ বিন্দুতে অবস্থিত। এখানে $be=1$ এবং $a=\frac{1}{2}$;

কিন্তু $a^2=b^2(1-e^2)$, বা, $a^2=b^2-b^2e^2$,

বা, $\frac{1}{4}=b^2-1 (\because be=1)$,

বা, $b^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. $\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$,

বা, $20x^2+4y^2=5$.

আবার, যদি নাভিদ্বয় সমাপতিত হয়, তবে উহারা অবশ্যই উপবৃত্তের কেন্দ্রে সমাপতিত হইবে।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে $be=0$, $\therefore e=0$; কিন্তু $a^2=b^2(1-e^2)$,

$\therefore a^2=b^2 \quad [\because e^2=0]$.

অতএব, উপবৃত্তটি হইল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, অর্থাৎ $x^2+y^2=a^2$, এবং ইহা একটি বৃত্ত।

উদা. 5. $x^2-y^2=a^2$ পরাবৃত্তের উপর $P(a \sec\theta, a \tan\theta)$ একটি চলমান বিন্দু এবং A যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু $(2a, 0)$, দেখাও যে AP রেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অপর একটি পরাবৃত্ত হইবে।

AP-র মধ্যবিন্দু (x', y') হইলে, $x'=\frac{a \sec\theta+2a}{2}$, $y'=\frac{a \tan\theta}{2}$

বা, $x'-a=\frac{a \sec\theta}{2}$, $y'=\frac{a \tan\theta}{2}$

বা, $4(x'-a)^2-4y'^2=a^2(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=a^2$

সুতরাং (x', y') বিন্দুর সঞ্চারপথ $4(x-a)^2-4y^2=a^2 \cdots (a)$

এক্ষণে $X=x-a$ ও $Y=y$ বসাইয়া সমীকরণ (a)-কে $\frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2}-\frac{Y}{(\frac{1}{2})^2}=a^2$ আকারে পরিণত করা যায়। এবং ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। সুতরাং নির্ণেয় সঞ্চারপথ $4(x-a)^2-4y^2=a^2$ একটি পরাবৃত্ত।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ ও $(a \cos\phi, b \sin\phi)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2},$$

এবং (i) এই জ্যা, উপবৃত্তের নাভিবিন্দুগামী হইলে,

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e-1}{e+1} \text{ বা } \frac{e+1}{e+1}$$

ও (ii) এই জ্যা $(\lambda, 0)$ বিন্দুগামী হইলে

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{\lambda-a}{\lambda+a}.$$

$(a \cos\theta, b \sin\theta)$ ও $(a \cos\phi, b \sin\phi)$

বিন্দুদ্বয় $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের দুইটি বিন্দু। এই বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা বা জ্যার সমীকরণ

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\cos\theta-a\cos\phi}=\frac{y-b\sin\theta}{b\sin\theta-b\sin\phi}$$

বা, $$\frac{x-a\cos\theta}{2a\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}=\frac{y-b\sin\theta}{2b\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}}$$

বা, $$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\frac{\theta+\phi}{2}}+\frac{y-b\sin\theta}{b\cos\frac{\theta+\phi}{2}}=0.$$

বা, $$bx\cos\frac{\theta+\phi}{2}-ab\cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2}+ay\sin\frac{\theta+\phi}{2}-ab\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}=0.$$

বা, $$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

[উভয়পক্ষকে ab দ্বারা ভাগ করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া।]

বা, $$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\left(\theta-\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

বা, $$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}\cdots(1)$$

(i) এক্ষণে, যদি এই জ্যা উপবৃত্তের $(ae, 0)$ নাভিবিন্দুগামী হয়, তবে সমীকরণ-(1)-এ $x=ae$ ও $y=0$ বসাইয়া পাই,

$$e\cos\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}$$

বা, $$\frac{\cos\frac{\theta+\theta}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}=\frac{1}{e},$$ বা, $$\frac{\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}+\cos\frac{\theta+\phi}{2}}=\frac{e-1}{e+1}$$

বা, $$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}}=\frac{e-1}{e+1}$$

বা, $$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e-1}{e+1}.$$

অনুরূপে, জ্যাটি $(-ae, 0)$ বিন্দুগামী হইলে, প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e+1}{e-1}$$

(ii) যদি জ্যাটি $(\lambda, 0)$ বিন্দুগামী হয়, তবে

$$\lambda \cos\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

বা, $\frac{\lambda}{a}=\frac{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}$, বা, $\frac{\lambda-a}{\lambda+a}=\frac{\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}+\cos\frac{\theta+\phi}{2}}$

বা. $\frac{\lambda-a}{\lambda+a}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}$,

উদা. 7. যদি e কোন পরাবৃত্তের এবং e' উহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে দেখাও যে $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$. [C. U. B. Sc. '41]

মনে কর, e হইল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা

এবং e' হইল উহার অনুবন্ধী $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা।

অতএব, $b^2=a^2(e^2-1)\cdots\cdots(1)$ এবং $a^2=b^2(e'^2-1)\cdots\cdots(2)$.

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^2b^2=a^2b^2(e^2-1)(e'^2-1)$,

বা, $(e^2-1)(e'^2-1)=1$, বা, $e^2+e'^2=e^2e'^2$, বা, $\frac{e^2+e'^2}{e^2e'^2}=1$.

$$\therefore\ \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

প্রশ্নমালা 8

1. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন সরলরেখা অধিবৃত্তটিকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে $x_1x_2=a^2$.

[H. S. 1972]

2. একটি গতিশীল বিন্দুর $(a, 0)$ বিন্দু হইতে দূরত্ব, উহার y-অক্ষ হইতে দূরত্ব অপেক্ষা সতত a অধিক। প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত।

3. $3x^2+4y^2=24$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

[B. U. 1964]

4. যদি $(\pm 3, 0)$ বিন্দুদ্বয় হইতে একটি গতিশীল বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত 10 হয়, তবে দেখাও যে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

5. দেখাও যে, যে চলমান বিন্দুর দুইটি স্থির বিন্দু হইতে দূরত্বদ্বয়ের অন্তর সতত ধ্রুবক, তাহার সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত।

6. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হইতে ধ্রুবক দৈর্ঘ্য $2l$ ছিন্ন করে। প্রমাণ কর যে উহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সমপরাবৃত্ত $x^2-y^2=l^2$.

7. $2a$ ও $2b$ দৈর্ঘ্যের দুইটি দণ্ড স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের মধ্যে এরূপে থাকিতেছে যে উহাদের প্রত্যেক অবস্থানে উহাদের প্রান্তগুলি একটি বৃত্তস্থ হয়। ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. যদি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর একটি প্রান্ত $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দু হয়, তবে উহার অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ঐ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $a\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right)^2$.

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ও $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ উপবৃত্তের $(a, 0)$ শীর্ষবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করিলে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=-\frac{b^2}{a^2}$.

10. প্রমাণ কর যে $\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b\frac{2t}{1+t^2}\right)$ বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি বিন্দু।

11. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ ও $(a\sec\phi,\ b\tan\phi)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক জ্যার সমীকরণ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi-\theta}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\phi+\theta}{2}.$$

———

ষষ্ঠ অধ্যায়
স্পর্শক ও অভিলম্ব
(Tangent and Normal)

§ 6·1. দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার ঃ

পূর্বের দুইটি অধ্যায়ে তোমরা বৃত্ত, উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত প্রভৃতি কণিকের সংজ্ঞা এবং উহাদের সমীকরণের আদর্শ আকার (standard forms of their equations) সম্বন্ধে শিখিয়াছ। একটি কণিকের সমীকরণকে x এবং yএর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \ (a, \ h, b)\neq(0, 0, 0)\cdots(1)$$

দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কারণ,

যদি (i) $a=b=1$, $h=0$ হয়, তবে (1)-সমীকরণটির আকার হইবে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, ইহা বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ ;

(ii) $a=0$, $h=0$, $b=1$, $2g=-4a$, $f=0$, $c=0$ হইলে সমীকরণটির আকার হইবে $y^2=4ax$ যাহা অধিবৃত্তের সমীকরণ ;

(iii) a স্থলে $\frac{1}{a^2}$, b এর স্থলে $\frac{1}{b^2}$, $h=g=f=0$ এবং $c=-1$ হইলে সমীকরণটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ আকারের হইবে এবং ইহা আদর্শ আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ।

(iv) অনুরূপে a স্থলে $\frac{1}{a^2}$, bএর স্থলে $-\frac{1}{b^2}$ এবং $h=g=f=0, c=-1$ হইলে সমীকরণটি পরাবৃত্তের আদর্শ আকারের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হইবে।

বিপরীতক্রমে প্রমাণ করা যায় সমীকরণ (1) একটি কণিকের সমীকরণ ব্যতীত অন্য কিছু হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য ঃ (1) সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ $(a, h, b)\neq(0, 0, 0)$কে যদি দুইটি একমাত্রিক উৎপাদকের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়, তবে ইহা এক জোড়া সরল রেখার সমীকরণ সূচিত করে। সমীকরণ-(1)কে দুইটি এক মাত্রিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে যদি

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \text{ হয়}\cdots(2).$$

অতএব (1) সমীকরণ এক জোড়া সরল রেখার সমীকরণ হইবে যদি শর্ত-(2) সিদ্ধ হয়।

যদি $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2\neq 0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি কণিককে সূচিত করে। এইক্ষেত্রে কণিকটি উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত এবং পরাবৃত্ত হইবে যদি যথাক্রমে $ab-h^2$এর মান শূন্য অপেক্ষা বড়, বা সমান বা ছোট হয় অর্থাৎ যদি যথাক্রমে $ab-h^2>0$, বা $=0$, বা <0 হয়।

উপবৃত্তের সমীকরণে $a=b$ বসাইলে বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়। সুতরাং বৃত্ত, উপবৃত্তের একটি বিশেষ আকার (form)।

(2) $ax^2+by^2=1$ $(a,b)\neq(0, 0)$, সমীকরণ a ও bএর বিভিন্ন মানের জন্য বৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের সমীকরণ। যথা, $a=b\neq 0$ হইলে, সমীকরণটি একটি বৃত্তের সমীকরণ হয়। $a=\frac{1}{a^2}, b=\frac{1}{b^2}$ এবং $a=\frac{1}{a^2}, b=-\frac{1}{b^2}$ হইলে সমীকরণটি যথাক্রমে উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের সমীকরণ হয়।

উদা. 1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি কোন্ বক্রকে সূচিত করে ?

(i) $x^2+y^2-6x+8y=0$ [H. S. '65]

(ii) $(y+4)^2=4(x-3)$

(iii) $(x-3)(y+4)=0$

(i) এখানে x^2এর সহগ $=y^2$এর সহগ এবং xyএর সহগ $=0$

অর্থাৎ সাধারণ সমীকরণে $a=b$ এবং $h=0$

$\therefore$ ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ii) এখানে $a=0, b=1, h=0$ $\therefore$ $ab-h^2=0$.

$\therefore$ ইহা একটি অধিবৃত্তকে সূচিত করে।

(iii) সমীকরণটি দুইটি একঘাত উৎপাদকের গুণফল হিসাবে আছে। $\therefore$ হয় $x-3=0$ কিংবা $y+4=0$. প্রথমটি y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা এবং দ্বিতীয়টি x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং সমীকরণটি এক জোড়া সরলরেখাকে সূচিত করে।

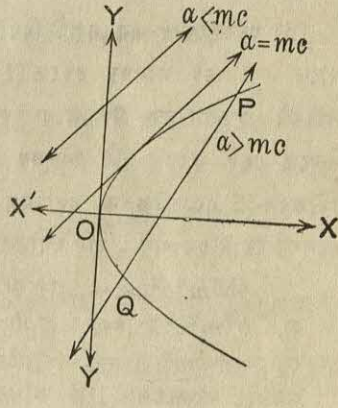
§ 6·2. সরলরেখা এবং কণিকের ছেদ (intersection of a straight line and a conic) **এবং ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য** (length intercepted by a chord) :

মনে করা যাক $y=mx+c\cdots\cdots(1)$ একটি সরলরেখার সমীকরণ। প্রথমে এই সরলরেখাটির সহিত অধিবৃত্ত $y^2=4ax\cdots(2)$এর ছেদ নির্ণয় করা যাক।

(1) হইতে y এর মান (2)-এ বসাইয়া পাওয়া যায় $(mx+c)^2=4ax$,

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0\cdots\cdots(3)$

সমীকরণ-(3) x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং ইহার দুইটি বীজ আছে। ঐ বীজদ্বয় অধিবৃত্তটির সহিত সরলরেখাটির ছেদবিন্দুর ভুজ (abscissa) নির্ণয় করে। এখন x-এর মানদ্বয় সমীকরণ (1)এ বসাইয়া y-এর অনুরূপ মানদ্বয় পাওয়া যাইবে। অতএব এইভাবে অধিবৃত্তটির সহিত সরলরেখাটির ছেদবিন্দুদ্বয় নির্ণয় করা যাইবে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে একটি সরলরেখা একটি অধিবৃত্তকে সাধারণতঃ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। এখন সমীকরণ-(3)এর বীজদ্বয় (i) বাস্তব এবং অসমান, (ii) সমান অথবা (iii) জটিল হইতে পারে। সুতরাং সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে (i) দুইটি পৃথক বাস্তব বিন্দুতে, (ii) দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে, অথবা (iii) দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করিবে অর্থাৎ উহাকে ছেদ করিবে না। এখন সমীকরণ-(3) এর বীজদ্বয় বাস্তব, সমান অথবা কাল্পনিক হইবে যদি যথাক্রমে উহার নিরূপক $>,=$ বা <0 হয়, অর্থাৎ যদি $4(mc-2a)^2-4m^2c^2>,=$ বা <0 হয় বা $a>,=$ বা $<mc$ হয়। সুতরাং সরলরেখাটি অধিবৃত্তের একটি জ্যা হইবে (বাস্তব বিন্দু P এবং Qতে ছেদ করিলে PQ একটি জ্যা হইবে), অথবা স্পর্শক হইবে (সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিলে স্পর্শক বলা হয়) অথবা ছেদ করিবে না যদি যথাক্রমে $a>mc$ বা $a=mc$ বা $a<mc$ হয়।



চিত্র 58

মনে কর সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং x_1, x_2 সমীকরণ-(3)এর বীজ হইবে।

অতএব উহাদের সমষ্টি $x_1+x_2=-\frac{2(mc-2a)}{m^2}$ এবং গুণফল $x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}$.

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$
$$=\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}=\frac{16a(a-mc)}{m^4}.$$

যেহেতু P, Q বিন্দুদ্বয় সরলরেখা-(1)এর উপর আছে, সুতরাং

$y_1 = mx_1 + c$ এবং $y_2 = mx_2 + c$ হইবে। এই সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করিয়া পাই $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$.

$$\therefore \text{ PQ জ্যার দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$
$$= (x_1 - x_2)\sqrt{1+m^2} = \frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a(a-mc)}$$

এইবার সরলরেখা-(1)টির সহিত যে কোন কণিক $ax^2 + by^2 = 1 \cdots (4)$ এর ছেদবিন্দু নির্ণয় করা যাক। (1) হইতে y-এর মান (2)-এ বসাইয়া পাই,

$$ax^2 + b(mx+c)^2 = 1,$$

বা, $(a + bm^2)x^2 + 2bmcx + (bc^2 - 1) = 0 \cdots (5)$

(5) হইতেছে x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং x-এর দুইটি মান আছে এবং এই মানদ্বয় হইতে (1) এবং (4)-এর দুইটি ছেদবিন্দু বাহির করা যাইবে। সুতরাং বৃত্ত, উপবৃত্ত বা পরাবৃত্তকে একটি সরলরেখা সাধারণতঃ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ বিন্দুদ্বয় বাস্তব, সমান অথবা কাল্পনিক হইবে যদি সমীকরণ-(5)এর নিরূপক যথাক্রমে শূন্য অপেক্ষা বড়, শূন্যের সমান বা শূন্য অপেক্ষা ছোট হয় অর্থাৎ যদি যথাক্রমে

$4b^2m^2c^2 >, =,$ বা $< 4(a + bm^2)(bc^2 - 1)$ হয়,

বা, $b^2m^2c^2 >, =,$ বা $< abc^2 + b^2m^2c^2 - (a + bm^2)$ হয়,

বা, $a + bm^2 >, =,$ বা $< abc^2$ হয়।

সুতরাং সরলরেখা-(1)টি কণিক-(4)এর জ্যা হইবে, অথবা স্পর্শক হইবে অথবা উহাকে ছেদ করিবে না যদি যথাক্রমে $a + bm^2 >, =,$ বা $< abc^2$ হয়।

এখন মনে কর সরলরেখাটি কণিক-(4)কে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং x_1 এবং x_2 সমীকরণ-(5)এর বীজ হইবে।

$$\therefore\ x_1 + x_2 = -\frac{2bcm}{(a+bm^2)} \text{ এবং } x_1 . x_2 = \frac{(bc^2-1)}{(a+bm^2)} \text{ হইবে।}$$

$$\therefore\ (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$
$$= \frac{4b^2m^2c^2}{(a+bm^2)^2} - 4.\frac{bc^2-1}{(a+bm^2)}$$
$$= \frac{4(a+bm^2-abc^2)}{(a+bm^2)^2}$$

যেহেতু $y_1 = mx_1 + c$ এবং $y_2 = mx_2 + c$, $\therefore$ বিয়োগ করিয়া পাই $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$.

$$\therefore \text{ PQ জ্যার দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+m^2(x_1-x_2)^2}$$
$$=(x_1-x_2)\sqrt{1+m^2}$$
$$=\frac{2}{a+bm^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a+bm^2-abc^2} \cdots (6)$$

এখন (6) এ a এবং bএর স্থলে $\frac{1}{a^2}$ বসাইয়া বৃত্তের সহিত, aএর স্থলে $\frac{1}{a^2}$ এবং bএর স্থলে $\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া উপবৃত্তের সহিত, aএর স্থলে $\frac{1}{a^2}$ এবং bএর স্থলে $-\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া পরাবৃত্তের সহিত সরলরেখা-(1) দ্বারা ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বাহির করা যাইবে।

উপরোক্ত আলোচনা হইতে নিম্নলিখিত ফলগুলি পাওয়া যাইতেছে।

$y=mx+c$ সরলরেখাটি

(i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে ছেদ করিবে বা স্পর্শক হইবে বা ছেদ করিবে না, তাহার শর্ত যথাক্রমে $a^2(1+m^2)>$, বা $=$, বা $<c^2$

এবং ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}$

(সমীকরণ-(6) এ a এবং b এর স্থলে $\frac{1}{a^2}$ বসাইয়া)।

(ii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে ছেদ করিবে বা স্পর্শক হইবে বা ছেদ করিবে না যদি যথাক্রমে $a>$, বা$=$, বা$<mc$ হয় এবং

ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a(a-mc)}$.

(iii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে ছেদ করিবে বা স্পর্শক হইবে বা ছেদ করিবে না যদি যথাক্রমে,

$b^2+a^2m^2>,=$, বা $<c^2$ হয় এবং ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য

$$=\frac{2ab}{b^2+a^2m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{(b^2+a^2m^2-c^2)}$$

(সমীকরণ-6এ aএর স্থলে $\frac{1}{a^2}$ এবং bএর স্থলে $\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া)।

(iv) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে ছেদ করে অথবা স্পর্শ করে অথবা ছেদ

করে না যদি যথাক্রমে $c^2 >$, বা $=$, বা $< a^2m^2 - b^2$ হয় এবং ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য$=\dfrac{2ab}{a^2m^2-b^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a^2m^2-b^2-c^2}$

$\left(\right.$সমীকরণ-(6)এ aএর স্থলে $\dfrac{1}{a^2}$ এবং bএর স্থলে $-\dfrac{1}{b^2}$ বসাইয়া$\left.\right)$।

দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত সরলরেখাটি কণিকের স্পর্শক হইলে ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য শূন্য হইবে ; এবং সরলরেখাটি কণিককে ছেদ না করিলে ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কাল্পনিক হইবে।

উদা. 1. $y^2=x$ অধিবৃত্তের সহিত $x-5y+6=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$\because\ x-5y+6=0,\quad \therefore\ x=5y-6 \cdots(1)$

এখন xএর মান $y^2=x$ সমীকরণে বসাইয়া পাই $y^2=5y-6$

বা, $y^2-5y+6=0$, বা, $(y-2)(y-3)=0$

$\therefore\ y=2, 3.\quad \therefore$ (1) হইতে পাই $x=4, 9$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 2) এবং (9, 3)।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা অধিবৃত্তের একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হয়।

মনে কর অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax.\ \cdots(1)$

সুতরাং ইহার অক্ষ, x-অক্ষ যাহার সমীকরণ $y=0$ এবং অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $y=k\ \cdots(2)$

সমীকরণ-(1)-এ $y=k$ বসাইয়া পাই, $k^2=4ax \cdots(3)$

সুতরাং সমীকরণ-(3) হইতে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এবং $y=k$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে।

যেহেতু সমীকরণ-(3) x-এর একটি একঘাত সমীকরণ, সুতরাং x-এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাইবে। অতএব সরলরেখা (2), প্রদত্ত অধিবৃত্তকে একটি এবং একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করিবে।

উদা. 3. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$ পরাবৃত্তের যে জ্যা মূলবিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[H. S. '60 (Comp.)]

অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্ব বলিয়া, এবং জ্যা-টি অক্ষদ্বয়ের সহিত সমপরিমাণ কোণে নত বলিয়া, ইহা উভয় অক্ষের সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং

জ্যা-টির প্রবণতা $=\tan 45^\circ=1$ এবং জ্যা টি মূলবিন্দু $(0, 0)$ গামী বলিয়া ইহার সমীকরণ $y=x\cdots(1)$ হইবে।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$এ $y=x$ বসাইয়া পাই, $\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

বা, $16x^2=225$, বা, $x=\pm\frac{15}{4}$, $\therefore$ $y=\pm\frac{15}{4}$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইতেছে $P(\frac{15}{4}, \frac{15}{4})$, $Q(-\frac{15}{4}, -\frac{15}{4})$।

$\therefore$ ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(\frac{15}{4}+\frac{15}{4})^2+(\frac{15}{4}+\frac{15}{4})^2}$

$=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$.

উদা. 4. একটি বৃত্ত x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে 5 ও 2এর সমান অংশ ছেদ করে এবং উহার কেন্দ্র $2x-y=6$ সরলরেখায় অবস্থিত। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ঐ শর্তে দুইটি বৃত্ত হইতে পারে।

মনে কর বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(1)$, ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ প্রদত্ত সরলরেখা $2x-y=6$এর উপর আছে বলিয়া পাই $-2g+f=6\cdots(2)$.

x-অক্ষের সমীকরণ $y=0$. $\therefore$ x-অক্ষ যে বিন্দু দুইটিতে বৃত্ত-(1)-কে ছেদ করিবে সেই বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $x^2+0+2gx+2f.0+c=0$

বা, $x^2+2gx+c=0$ সমীকরণ দ্বারা নিরূপিত হইবে।

মনে কর, x_1 এবং x_2 এই সমীকরণের বীজ।

$\therefore$ $x_1+x_2=-2g$ এবং $x_1.x_2=c$.

$\therefore$ x-অক্ষের দ্বারা ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=x_2-x_1$

$=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4g^2-4c}=5$ (দেওয়া আছে)

$\therefore$ $4g^2-4c=25\cdots(3)$

অনুরূপে y-অক্ষের দ্বারা ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য $=\sqrt{4f^2-4c}=2$

বা, $4f^2-4c=4$ বা $f^2-c=1\cdots(4)$

(4) হইতে cএর মান (3)এ বসাইয়া পাই,

$4g^2+4-4f^2=25$ বা $4g^2-4f^2=21$.

সমীকরণ-(2) হইতে fএর মান বসাইয়া পাই,

$4g^2-4(2g+6)^2=21$, বা, $4g^2+32g+55=0$,

বা, $(2g+5)(2g+11)=0$, $\therefore$ $g=-\frac{5}{2}$ বা $-\frac{11}{2}$.

gএর মান দুইটি সমীকরণ-(2)এ বসাইয়া পাই $f=1$ বা -5,

fএর মান দুইটি সমীকরণ-(4)এ বসাইয়া পাই $c=f^2-1=0$ বা 24.

∴ g, f এবং cএর দুইটি করিয়া মান পাওয়া যাইতেছে বলিয়া প্রদত্ত শর্তাধীনে দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাইবে।

একটি বৃত্তের সমীকরণ হইতেছে, $x^2+y^2+2(-\frac{5}{2})x+2.1y+0=0$

বা, $x^2+y^2-5x+2y=0$ এবং অপর বৃত্তের সমীকরণ হইতেছে $x^2+y^2+2(-\frac{11}{2})y+2(-5)y+24=0$,

বা, $x^2+y^2-11x-10y+24=0$.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব, জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2=a^2\cdots(1)$

এবং OM, কেন্দ্র O হইতে AB জ্যার উপর লম্ব। মনে কর OM, AB:ক M(x', y') বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $\overleftrightarrow{OM}$ সরলরেখা মূল বিন্দুগামী,

মনে কর, $\overleftrightarrow{OM}$এর সমীকরণ $\dfrac{x}{\cos\theta}=\dfrac{y}{\sin\theta}\cdots(2)$.

যেহেতু M(x', y'), $\overleftrightarrow{OM}$-এর উপর অবস্থিত, ∴ $\dfrac{x'}{\cos\theta}=\dfrac{y'}{\sin\theta}\cdots(3)$

আবার, $\overleftrightarrow{OM}$ এর উপর AB লম্ব হওয়ায় $\overleftrightarrow{AB}$-র সমীকরণ,

$$\frac{x-x'}{-\sin\theta}=\frac{y-y'}{\cos\theta}=r \text{ (মনে কর)}\cdots(4).$$

সুতরাং r, সরলরেখাটির (x', y') বিন্দু হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব।

এক্ষণে (4) হইতে $x=x'-r\sin\theta$ ও $y=y'+r\cos\theta$ বৃত্তের সমীকরণ $r^2+2r(y'\cos\theta-x'\sin\theta)+x'^2+y'^2-a^2=0\cdots(5)$

এক্ষণে দ্বিঘাত সমীকরণ (5)এর বীজ দুইটি r_1 ও r_2 হইলে, M(x', y') বিন্দু হইতে বৃত্ত ও ABর ছেদবিন্দু A ও Bর দূরত্ব r_1 ও r_2 হইবে।

এক্ষণে সমীকরণ-(5)-এর বীজদ্বয়ের যোগফল r_1+r_2

$=-2(y'\cos\theta-x'\sin\theta)=0$ [কারণ (3) অনুযায়ী $x'\sin\theta=y'\cos\theta$]

বা $r_1=-r_2$

অর্থাৎ AM $=-$BM. ∴ M, AB জ্যার মধ্যবিন্দু।

সুতরাং কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুশীলনী VI(A) :

1. $3x+4y+7=0$ সরলরেখা কোথায় $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে ছেদ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

2. $y^2=4x$ অধিবৃত্তের সহিত $x-5y+6=0$ সরলরেখা যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহার স্থানাঙ্ক বাহির কর।

3. $3x+4y-c=9$ সরলরেখার দ্বারা ছেদিত $x^2+y^2=64$ বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [H. S. '60]

cএর কোন্ মানের জন্য রেখাটি বৃত্তটিকে (i) স্পর্শ করিবে, (ii) ছেদ করিবে ?

4. x অক্ষ ও y-অক্ষ যে উপবৃত্তের দুই অক্ষ এবং যাহা $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ সরলরেখার সহিত x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরলরেখার সহিত y-অক্ষের উপর মিলিত হয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C.U. '38]

5. একটি বৃত্ত x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়ের সহিত 2এর সমান অংশ ছেদ করে, এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $x-3y+4=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

§ 6·3. স্পর্শক (tangent) :

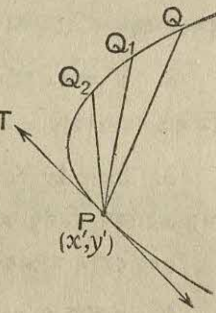
যে কোন একটি সরলরেখা একটি কণিককে সাধারণতঃ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। যদি ছেদবিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়, তবে সরলরেখাটিকে কণিকের স্পর্শক বলে। সুতরাং স্পর্শকের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : একটি সরলরেখাকে একটি কনিকের স্পর্শক বলা হয়, যখন সরলরেখাটি কণিককে দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করে। যে বিন্দুতে ছেদ বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়, তাহাকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু (point of contact) বলে।

অতএব কোন সরলরেখা একটি প্রদত্ত কনিকের স্পর্শক হইলে, ঐ সরলরেখা এবং কণিকের ছেদবিন্দুদ্বয় একই হয় ; অর্থাৎ ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ নির্ণায়ক পূর্ব-অনুচ্ছেদের সমীকরণ-(3) বা (5)-এর বীজদ্বয় যদি সমান হয়, তবে সরলরেখাটি কণিককে স্পর্শ করিবে।

কনিকের প্রদত্ত কোন বিন্দু P-এ স্পর্শক বাহির করিতে হইলে, ঐ বিন্দুর কাছাকাছি আরো একটি বিন্দু Q কণিকের উপর লওয়া হয়।

এখন PQ জ্যাটিকে P বিন্দুতে এমনভাবে ঘুরান হয় যাহাতে Q বিন্দু ক্রমশঃ কনিক বরাবর P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়। চিত্রে PQ, PQ_1, PQ_2 ইত্যাদি PQ-এর বিভিন্ন অবস্থান। এইভাবে ঘুরিতে ঘুরিতে যখন Q বিন্দু P বিন্দুতে সমাপতিত হইবে তখন PQ জ্যার সীমাস্থ অবস্থান $\overleftrightarrow{PT}$ সরলরেখা, P বিন্দুতে কনিকের স্পর্শক হইবে। লক্ষ্য কর যখন PQ সরলরেখা P বিন্দুতে ঘুরিতেছে তখন PQ-জ্যার দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ ছোট হইতেছে। এবং যখন PQ-জ্যাটি P বিন্দুতে $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শক হইয়া যায়, তখন PQ-জ্যা-এর দৈর্ঘ্য শূন্য হইতেছে, সুতরাং স্পর্শক হইতেছে এমন একটি রেখা যাহার দ্বারা কনিকের ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য শূন্য হইবে। এই ধারণার ব্যবহার করিয়াও, কোন প্রদত্ত বিন্দুতে একটি স্পর্শকের সমীকরণ বাহির করা হয়।



চিত্র 9

§ 6·4. কোন সরলরেখার একটি কনিকের স্পর্শক হইবার শর্ত (Condition of tangency) :

মনে কর, $y=mx+c$ ......(1) একটি সরলরেখা।

প্রথমে এই সরলরেখাটির $y^2=4ax$ ......(2) অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত বাহির করা যাউক।

সমীকরণ-(1) হইতে y এর মান সমীকরণ-(2)-এ বসাইয়া পাই

$(mx+c)^2=4ax$, বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ......(3)

এই সমীকরণটি (1) এবং-(2) এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের x-স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে। এখন যদি সরলরেখা-(1), অধিবৃত্ত (2)-এর স্পর্শক হয়, তবে ছেদবিন্দুদ্বয় সমাপতিত হইবে এবং এই হেতু x-স্থানাঙ্ক নির্ণয়কারী সমীকরণ-(3) এর বীজদ্বয় সমান হইবে। এখন সমীকরণ-(3)-এর বীজদ্বয় সমান হইবার শর্ত হইতেছে সমীকরণ-(3) এর নিরূপক=0,

বা, $4(mc-2a)^2=4m^2c^2$

বা, $mca=a^2$, বা, $c=\frac{a}{m}$, $m\neq 0$ ধরিয়া

$\therefore$ $y=mx+c$ সরলরেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $c=\frac{a}{m}$ হয়।

এইবার $y=mx+c$ সরলরেখাটির কনিক $ax^2+by^2=1$……(4)-এর স্পর্শক হইবার শর্ত বাহির করা যাক্।

y-এর মান $ax^2+by^2=1$ সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$ax^2+b(mx+c)^2=1,$$

বা, $(a+bm^2)x^2+2bmcx+(bc^2-1)=0$……(5)

ঐ সরলরেখাটি (4)-কনিকের স্পর্শক হইবে যদি সমীকরণ-(5) এর বীজদ্বয় সমান হয়। সমীকরণ-(5)এর বীজদ্বয়ের সমান হইবার শর্ত হইতেছে (5)-সমীকরণটির নিরূপক $=0$ অর্থাৎ,

$$4b^2m^2c^2=4(a+bm^2)(bc^2-1),\quad \text{বা,}\quad abc^2-a-bm^2=0$$

$$\text{বা,}\quad c^2=\frac{a+bm}{ab},\qquad \text{বা,}\quad c=\pm\sqrt{\frac{a+bm^2}{ab}}\ \cdots\cdots(6)$$

(6) হইতেছে (1)-সরলরেখার কনিক-(5) এর স্পর্শক হইবার শর্ত।

এখন সমীকরণ-(4)-এ $a=b=\frac{1}{a^2}$ হইলে সমীকরণটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ আকারের হয় এবং শর্ত-(6) এর আকার হয়,

$$c=\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

অনুরূপে a ও b স্থলে $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া এবং a ও b স্থলে $\frac{1}{a^2}$, $-\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া যথাক্রমে উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-সমীকরণ পাওয়া যায় এবং এই দুই ক্ষেত্রে সমীকরণ-(6)এর আকার হয় যথাক্রমে $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ এবং $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

উপরোক্ত আলোচনার ফলগুলিকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে লিখিতে পারি : $y=mx+c$ সরলরেখাটির

(i) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$-এর স্পর্শক হইবার শর্ত $c=\frac{a}{m}$, $m\neq 0$.

(ii) উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শক হইবার শর্ত $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

(iii) পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শক হইবার শর্ত $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(iv) বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$-এর স্পর্শক হইবার শর্ত $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$

(উপবৃত্তের সমীকরণে $a=b$ বসাইয়া বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়)

দ্রষ্টব্য : (1) সাধারণতঃ কোন সরলরেখা একটি কনিকের স্পর্শক কিনা

পরীক্ষা করিবার জন্য সরলরেখার এবং কনিকের সমীকরণদ্বয়কে যুগপৎ সমাধান করা হয়। যদি ছেদবিন্দুদ্বয় অভিন্ন হয়, তবে সরলরেখাটি কনিকের স্পর্শক হইবে।

(2) m-এর যে কোন মানের জন্য

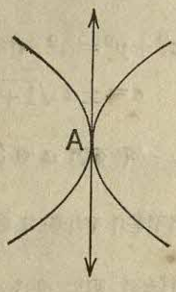
(i) $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে,

(ii) $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে,

(iii) $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

(iv) $y=mx+\frac{a}{m}$, $(m\neq 0)$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

(3) দুইটি বৃত্ত যদি পরস্পরকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে, তবে বলা হয় উহারা পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে। ঐ সমাপতিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উভয়েরই স্পর্শক হইবে। সুতরাং যদি দুইটি বক্র পরস্পরকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে A বিন্দুতে উভয়ের সাধারণ স্পর্শক থাকিবে। দুইটি বক্র পরস্পরকে স্পর্শ করিবার শর্ত হইতেছে উভয়ের ছেদবিন্দুদ্বয় সমাপতিত হইবে, অর্থাৎ ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ বা কোটি নির্ণয়ের সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।



চিত্র 60

উদা. 1. প্রমাণ কর $x-y=5$ রেখাটি $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [H. S. '61]

$x-y=5$ সরলরেখা হইতে পাই $x=y+5$. এই মান উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই $\frac{(y+5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, বা, $9(y^2+10y+25)+16y^2=144$,

বা, $25y^2+90y+81=0$ ·····(2)

বা, $(5y+9)^2=0$. $\therefore$ $y=-\frac{9}{5}, -\frac{9}{5}$, এবং $x=y+5=\frac{16}{5}, \frac{16}{5}$.

$\therefore$ সরলরেখা এবং উপবৃত্তটি সমপতিত বিন্দু $(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5})$-এ ছেদ করে।

অতএব সরলরেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতেছে $(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5})$।

উদা. 2. k-এর মান কত হইলে $x+3y=k$ সরলরেখাটি $x^2+y^2-3x-3y+2=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং সেক্ষেত্রে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

সরলরেখাটি হইতে লব্ধ $x=k-3y$ এই মান বৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$(k-3y)^2+y^2-3(k-3y)-3y+2=0,$$

বা, $10y^2+6(1-k)y+(k^2-3k+2)=0......(i)$

সমীকরণ-(i) প্রদত্ত বৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদবিন্দুদ্বয়ের y-স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিবে। এখন প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি উহাদের ছেবিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়, অর্থাৎ সমীকরণ-(i) এর বীজদ্বয় সমান হয়। এখন (i)-এর বীজদ্বয় সমান হইবে যদি সমীকরণ-(i) এর নিরূপক $=0$ হয়,

বা, $36(1-k)^2-4.10(k^2-3k+2)=0$, বা, $k^2-12k+11=0$,

বা, $(k-1)(k-11)=0$, $\therefore\ k=1$, বা, 11.

$\therefore$ k-এর মান 1 বা 11 হইলে প্রদত্ত সরলরেখাটি বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে।

যখন $k=1$, তখন সমীকরণ-(i) হইতে পাই $10y^2=0$ বা $y=0$

$$\therefore\ x=k-3y=1-0=1.$$

যখন $k=11$, তখন সমীকরণ-(i) হইতে পাই $10y^2-60y+90=0$

বা, $y^2-6y+9=0$, বা, $(y-3)^2=0$, বা, $y=3, 3$

এবং $x=k-3y=11-9, 11-9=2, 2.$

$\therefore$ যখন, $k=1$, সরলরেখাটি বৃত্তকে $(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যখন $k=11$, সরলরেখাটি বৃত্তকে $(2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

উদা. 3. যদি $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ সরলরেখা, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে দেখাও যে $\cos^2\alpha=1$. [C.U. '19 ; B.U. (Ent.) '63]

$y=mx+c$ সরলরেখার সহিত $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ তুলনা করিয়া পাই $m=\sin\alpha$ এবং $c=a\sec\alpha$.

এখন $y=mx+c$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত $c^2=a^2(1+m^2)$।

$\therefore$ $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $a^2\sec^2\alpha=a^2(1+\sin^2\alpha)$, বা, $\sec^2\alpha=1+\sin^2\alpha$,

বা, $\sec^2\alpha-1=\sin^2\alpha$, বা, $\tan^2\alpha=\sin^2\alpha$,

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha$, বা, $\sin^2\alpha=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

বা, $\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=0$, বা, $\sin^4\alpha=0$, বা, $\sin^2\alpha=0$;

অর্থাৎ $\cos^2\alpha=1$.

উদা. 4. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এবং $x^2+y^2=a^2$, বৃত্তদ্বয়ের পরস্পরকে স্পর্শ করিবার শর্ত বাহির কর।

বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিলে,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots(1)$ এবং $x^2+y^2=a^2 \cdots(2)$

সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটি সমাপতিত হইবে।

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $2gx+2fy+c+a^2=0$,

বা, $y=-\dfrac{2gx+c+a^2}{2f}$। সমীকরণ-(2)এ, y-এর এই মান বসাইয়া

পাই $x^2+\left(\dfrac{2gx+c+a^2}{2f}\right)^2=a^2$,

বা, $4(g^2+f^2)x^2+4gx(a^2+c)+(a^2+c)^2-4a^2f^2=0 \cdots(3)$

বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিলে এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ স্পর্শ করিবার শর্ত হইতেছে সমীকরণ-(3)এর নিরূপক$=0$ হইবে,

বা, $16g^2(a^2+c)^2=16(g^2+f^2)\{(a^2+c)^2-4a^2f^2\}$

বা, $g^2(a^2+c)^2=(g^2+f^2)(a^2+c)^2-4a^2f^2(g^2+f^2)$

বা, $4a^2f^2(g^2+f^2)=(g^2+f^2-g^2)(a^2+c)^2=f^2(a^2+c)^2$

বা, $4a^2(g^2+f^2)=(a^2+c)^2 \cdots(4)$.

সমীকরণ-(4) হইতেছে বৃত্তদ্বয়ের পরস্পরকে স্পর্শ করিবার শর্ত।

দ্রষ্টব্য : সমীকরণ-(4)কে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়।

$4a^2(g^2+f^2-c)=(a^2-c)^2$

বা, $\pm 2a\sqrt{g^2+f^2-c}=a^2-c.$

বা, $g^2+f^2=(g^2+f^2-c)\pm 2a\sqrt{g^2+f^2-c}+a^2$

$=(\sqrt{g^2+f^2-c}\pm a)^2$ [পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয় পক্ষে g^2+f^2 যোগ করিয়া]

বা, $\sqrt{g^2+f^2}=\sqrt{g^2+f^2-c}\pm a \cdots(5)$

এখন $x^2+y^2+2gx+2fc+c=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $A=(-g, -f)$

এবং ব্যাসার্ধ $r_1=\sqrt{g^2+f^2-c}$

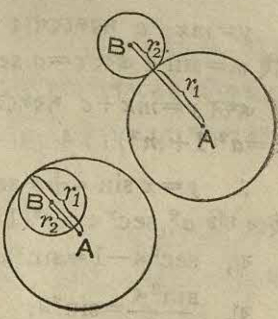
এবং $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র

$B=(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2=a$.

$\therefore$ $AB=\sqrt{g^2+f^2}$.

সুতরাং সমীকরণ-(5) হইতে পাই,

$AB=r_1\pm r_2$ বা দুইটি বৃত্তর পরস্পরকে স্পর্শ করিবার শর্ত হইতেছে



চিত্র 61

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব=উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি বা অন্তরফল।

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, যদি দুইটি ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হয়, তবে বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করে।

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, যদি দুইটি ব্যাসার্ধের অন্তরফলের সমান হয়, তবে বৃত্তদ্বয় অন্তঃস্পর্শ করে।

অনুশীলনী VIB.

1. দেখাও যে, $y=x+2$ রেখা $x^2+y^2=2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে $4x-2y+3=0$ সরলরেখা $y^2=12x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

3. $x^2+9y^2=2$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $3x+y=2$ সরলরেখার উপর লম্ব, তাহাদের সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে $x+my+am^2=0$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [U. P. B. '48]

5. a-এর কোন্ মানের জন্য $y=3x+1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে ?

6. দেখাও যে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্ত

(i) x-অক্ষকে স্পর্শ করে যদি $g^2=c$ হয়,

(ii) y-অক্ষকে স্পর্শ করে যদি $f^2=c$ হয়।

§ 6·5. কনিকের উপরিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

(Equation of tangent to a conic at a given pt. of the conic)

প্রথম পদ্ধতি : (স্পর্শক জ্যা-এর সীমাস্থ অবস্থান ধরিয়া)

মনে কর কনিকটি একটি অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ ·· (1)।

মনে কর কনিকের উপর অবস্থিত নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$-এ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর $Q(x_2, y_2)$ ঐ বিন্দুর নিকটস্থ অধিবৃত্তের উপর আর একটি বিন্দু। এখন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখা PQ-এর সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\cdots(2)$$

যেহেতু $P(x_1, y_2)$ এবং $Q\ (x_2, y_2)$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ দুইটি বিন্দু,

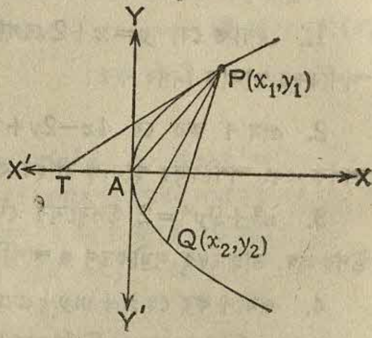
$\therefore \left.\begin{array}{l} y_1^2=4ax_1 \\ y_2^2=4ax_2 \end{array}\right\}$ ∴ বিয়োগ করিয়া পাই, $y_1^2-y_2^2=4a(x_1-x_2)$

বা, $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4a}{y_1+y_2}$, বা, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4a}{y_2+y_1}$.

এই মান সমীকরণ (2)এ বসাইয়া পাই,

$$y-y_1=\frac{4a}{y_2+y_1}(x-x_1)\cdots(3)$$

এখন মনে কর Q বিন্দুটি অধিবৃত্ত বরাবর P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে। যখন Q বিন্দু P বিন্দুতে সমাপতিত হইবে তখন PQ জ্যাএর সীমাস্থ অবস্থান $\overrightarrow{PT}$ সরলরেখাই P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।



চিত্র 62

যখন Q বিন্দু P বিন্দুতে মিলিত হইবে তখন $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ হইবে, এবং সমীকরণ-(3)এর আকার হইবে $y-y_1=\frac{4a}{y_1+y_1}(x-x_1)$

বা, $(y-y_1)y_1=2a(x-x_1)$

বা, $yy_1=y_1^2-2ax_1+2ax$

$=4ax_1-2ax_1+2ax \quad [\because \; y_1^2=4ax_1]$

$=2a(x+x_1)$.

PQ জ্যার সীমাস্থ অবস্থানের এই সমীকরণই P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে,

$$yy_1=2a(x+x_1).$$

অনুরূপে দেখান যায় যে বক্রের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে,

বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$এর স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$.

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : (স্পর্শক বক্রকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে ধরিয়া)

মনে কর, কনিকটি হইতেছে $ax^2+by^2=1\cdots\cdots(1)$

কনিক (1)এর উপরিস্থ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির করিতে হইবে। $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণকে

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r\cdots(2),$$ আকারে লওয়া হইল,

যেখানে r হইতেছে (x, y) এবং (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব এবং θ হইতেছে সরলরেখাটির x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত নতি (inclination)।

(2) হইতে পাই, $\left.\begin{array}{l} x=x_1+r\cos\theta \\ y=y_1+r\sin\theta \end{array}\right\}$ এই মান সমীকরণ-(1)এ বসাইয়া পাই, $a(x_1+r\cos\theta)^2+b(y_1+r\sin\theta)^2=1$

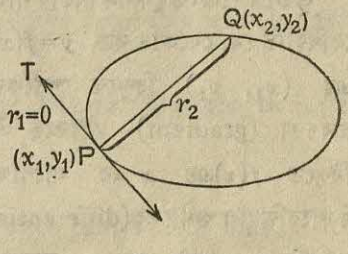
বা, $(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)r^2+2(ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta)r$
$+(ax_1^2+by_1^2-1)=0\cdots\cdots(5).$

এখন যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু $ax^2+by^2=1$ কনিকের উপর অবস্থিত সুতরাং $ax_1^2+by_1^2=1$ হইবে,

$\therefore$ সমীকরণটির আকার হইবে,

$$(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)r^2+2(ax_1\cos\theta+by_1\cos\theta)r=0\ldots(3)$$

সমীকরণ-(3) হইতে, কনিক-(1) এবং সরলরেখা-(2)এর ছেদ বিন্দুদ্বয়ের P বিন্দু হইতে দূরত্ব পাওয়া যায়। যেহেতু কনিক-(1) এবং সরলরেখা-(2) এর একটি ছেদ বিন্দু P, সুতরাং সমীকরণ-(3 এ rএর একটি মান শূন্য। এখন যদি সরলরেখা (2) কনিক-(1)এর স্পর্শক হয়, তবে সরলরেখাটি কনিককে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিবে। সুতরাং এইক্ষেত্রে অপর ছেদ বিন্দুটিও P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে।



চিত্র 63

সুতরাং সমীকরণ-(3 এর দুইটি বীজই শূন্য হইবে। এখন সমীকরণ-(3)-এর দুইটি বীজ শূন্য হইতে হইলে, সমীকরণটির আকার হইবে $r^2=0$, ইহা $ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta=0$ হইলে সম্ভব। সুতরাং সমীকরণ-(2), কনিক-(1)এর স্পর্শক হইবে যদি $ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta=0\cdots(4)$ হয়। সমীকরণ-(2) হইতে $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$এর মান বসাইয়া পাই,

$ax_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)=0$, বা, $ax_1x+byy_1=ax_1^2+by_1^2$

বা, $axx_1+byy_1=1\cdots(5)$।

যেহেতু সমীকরণ-(5), কনিক-(1)কে সমাপতিত বিন্দু P-এ ছেদ করে,

সুতরাং সমীকরণ-(5) হইতেছে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে কনিক $ax^2+by^2=1$এর স্পর্শক।

এখন aএর স্থলে $\frac{1}{a^2}$, bএর স্থলে একবার $+\frac{1}{b^2}$ এবং অপরবার $-\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া পাই,

(x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

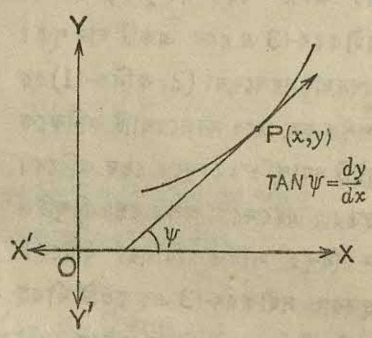
এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

উপবৃত্তের সমীকরণে $a=b$ বসাইয়া পাই,

(x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$এর স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$. অনুরূপে, এই পদ্ধতিতেও প্রমাণ করা যায় যে (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$এর স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$।

তৃতীয় পদ্ধতি (কলন বিদ্যার সাহায্যে)ঃ কলন বিদ্যায় (calculus) আমরা দেখিয়াছি যে, যেকোন বক্র $y=f(x)$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা (gradient) হইতেছে ঐ বিন্দুতে $f(x)$এর x-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্কের (differential coefficient-এর) সমান। সুতরাং যদি (x_1, y_1) বিন্দুতে $y=f(x)$এর ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$



চিত্র 64

হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে $y=f(x)$এর স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=\left(\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}\right)(x-x_1)\ldots(1)$$

(1)-এর সাহায্যে যে কোন বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ বাহির করা যায়। প্রথমে মনে কর বক্রটি হইতেছে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots\cdots(2)$

উভয় পক্ষকে differentiate করিয়া পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x+g}{y+f}.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হইবে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ (1) হইতে পাই, (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্ত $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

বা, $(y-y_1)(y_1+f)+(x_1+g)(x-x_1)=0$

বা, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)$

$$-(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1)=0 \cdots (2)$$

যেহেতু (x_1, y_1) বৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দু,

$\therefore$ $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ হইবে,

বা, $c=-(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1)$। এই মান সমীকরণ-(2) এ বসাইয়া পাই,

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \cdots\cdots (3)$$

(3) হইতেছে (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ।

অনুরূপে, অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=\frac{2a}{y_1}$.

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=-\frac{x_1/a^2}{y_1/b^2}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

সুতরাং, (x_1, y_1) বিন্দুতে (i) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x-x_1)=\frac{2a}{y_1}(x-x_1)$

বা, $yy_1=2a(x+x_1)$, [$\because$ $y_1^2=4ax_1$]

(ii) উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}(x-x_1)=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$, $\left[\because \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\right]$

(iii) পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}(x-x_1)=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ $\left[\because \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1.\right]$

দ্রষ্টব্য : (1) কোন বক্রের সমীকরণ হইতে (x_1, y_1) বিন্দুতে উহার স্পর্শকের সমীকরণ নিম্নলিখিত কৌশলের সাহায্যে লেখা যায় :

বক্রের সমীকরণে x^2 যুক্ত পদকে xx লিখিয়া একটি xএর স্থলে x_1 বসাইয়া xx_1 করিতে হইবে, অনুরূপে y^2যুক্ত পদকে yy_1, xযুক্ত পদকে $\frac{x+x}{2}$ লিখিয়া একটি x-এর স্থলে x_1 বসাইয়া $\frac{x+x_1}{2}$, yযুক্ত পদকে yএর স্থলে $\frac{y+y_1}{2}$ করিতে হইবে। xy পদকে $\frac{xy+xy}{2}$ আকারে লিখিয়া একটি পদে একটি xএর স্থলে x_1 এবং অপর পদে একটি yএর স্থলে y_1 করিতে হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখিতে হইলে, প্রথমে সমীকরণটিকে $x.x+y.y+g(x+x)+f(y+y)+c=0$ আকারে লিখিতে হইবে, পরে প্রতিটি পদে একটি xএর স্থলে x_1 এবং একটি yএর স্থলে y_1 বসাইয়া পাই,

$$x.x_1+y.y_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

ইহাই (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক।

(2) কনিকের সাধারণ সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে,

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

(3) (i) $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ বিন্দুতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :—

$$x\,a\cos\theta+y\,a\sin\theta=a^2$$

বা, $x\cos\theta+y\sin\theta=a.$

(ii) $(am^2, 2am)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :—

$$y.2am=2a(x+am^2)$$

বা, $my=x+am^2$.

বা, $y=\frac{1}{m}x+am$.

দ্রষ্টব্য : $(am^2, 2am)$ বিন্দুর প্যারামিটার m-এর অন্যোন্যক ঐ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের প্রবণতা।

(ii) $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :—

$$\frac{x.a\cos\theta}{a^2}+\frac{y.b\sin\theta}{b^2}=1$$

বা, $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$.

(iv) $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :—

$$\frac{x.a\sec\theta}{a^2}-\frac{y.b\tan\theta}{b^2}=1$$

বা, $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$.

(v) $\left(at, \frac{a}{t}\right)$ বিন্দুতে $xy=a^2$ সমপরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $x+t^2y=2at$

উদা. 1. স্পর্শকের সমীকরণগুলি লিখ :

(i) $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ বৃত্তের $(4, 5)$ বিন্দুতে,

(ii) $x^2+2x+y=0$ অধিবৃত্তের $(-2, 0)$ বিন্দুতে,

(iii) $5x^2+3y^2=137$ উপবৃত্তের $y=2$ বিন্দুতে,

(i) বৃত্তের সমীকরণটিকে $x.x+y.y+2(x+x)+3(y+y)-87=0$ আকারে লেখা হইল। এবার প্রতিটি পদে একটি x বা একটি y-এর স্থলে যথাক্রমে 4 ও 5 বসাইয়া আমরা $(4, 5)$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ পাই $x.4+y.5+2(x+4)+3(y+5)-87=0$

বা, $6x+8y-64=0$, বা, $3x+4y=32$.

(ii) $(-2, 0)$ অধিবৃত্তের বিন্দু বলিয়া, আগের নিয়ম অনুযায়ী স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে, $x.(-2)+(x-2)+\frac{1}{2}(y+0)=0$

বা, $-2x+y-4=0$, বা, $y=2x+4$.

(iii) উপবৃত্তের সমীকরণে $y=2$ বসাইয়া পাই, $5x^2+3.4=137$,

বা, $x^2=25$, বা, $x=\pm5$ সুতরাং $(\pm5, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির করিতে হইবে।

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে,

$$5x.(\pm5)+3y.2=137, \quad \text{বা}, \quad \pm25x+6y=137.$$

উদা. 2. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক $y+3x=0$ রেখার সহিত সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [H.S. '70]

$y+3x=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y+3x=c$ আকারে লওয়া যায়। এই সমীকরণ এবং অধিবৃত্ত $y^2=8x$এর ছেদ বিন্দুর কোটি $y^2=\frac{8}{3}(c-y)$, বা, $3y^2+8y-8c=0\cdots(1)$ সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়। এখন সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিলে, সমীকরণ-(1)এর বীজদ্বয় সমান হইবে। ইহার শর্ত, $64=4.3(-8c)$, বা, $c=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে, $y+3x=-\frac{2}{3}$

বা, $3y+9x+2=0$.

সমীকরণ-(1)-এ, $c=-\frac{2}{3}$ বসাইয়া পাই, $3y^2+8y+\frac{16}{3}=0$

বা, $9y^2+24y+16=0$, বা, $(3y+4)^2=0$

$\therefore$ $y=-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$ এবং $x=\frac{y^2}{8}=\frac{2}{9}, \frac{2}{9}$. $\therefore$ স্পর্শ বিন্দু$=(\frac{2}{9}, -\frac{4}{3})$.

বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর $y+3x=0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $y+3x=c\cdots(1)$। মনে কর স্পর্শ বিন্দু হইতেছে (x', y')। এখন (x', y') বিন্দুতে $y^2=8x$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতেছে

$y\,y'=4(x+x')$, বা, $y.y'-4x=4x'\cdots(2)$,

(1) এবং (2) উভয়ই (x', y') বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ।

$\therefore$ উভয় সমীকরণ একই সরলরেখাকে সূচিত করে। অতএব উভয়ের x, yএর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমানুপাতিক।

$\therefore$ $\frac{1}{y'}=\frac{3}{-4}=\frac{c}{4x'}$. $\therefore$ $y'=-\frac{4}{3}$ যেহেতু (x', y') অধিবৃত্তের বিন্দু

$\therefore$ $y'^2=8x'$ $\therefore$ $x'=\frac{1}{8}y'^2=\frac{1}{8}\times\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$,

এবং $c=\frac{12x'}{-4}=-3x'=-\frac{2}{3}$.

অতএব স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $y+3x=-\frac{2}{3}$, [সমীকরণ-1এ cএর মান বসাইয়া]

বা, $3y+9x+2=0$ এবং স্পর্শ বিন্দু $=(x', y')=(\frac{2}{9}, -\frac{4}{3})$.

উদা. 3. বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

মনে কর, প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ এবং (x', y') বৃত্তের যে কোন বিন্দু।

(x', y') বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx'+yy'=a^2 \cdots (1)$

এবং এই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সমীকরণ

$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'} \cdots (2)$ [যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু]

এক্ষণে, স্পর্শকের প্রবণতা $(m_1)=-\frac{x'}{y'}$

এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের প্রবণতা $(m_2)=\frac{y'}{x'}$

এখন, $m_1 m_2=-\frac{x'}{y'}.\frac{y'}{x'}=-1$,

$\therefore$ স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পরের উপর লম্ব।

দ্রষ্টব্য: যেহেতু যেকোন বৃত্তের সমীকরণ যথাযথ অক্ষ নির্বাচন করিয়া $x^2+y^2=a^2$ আকারে লওয়া যায়, সুতরাং উপরোক্ত তথ্য সকল বৃত্তের জন্যই সত্য।

উদা. 4. কোন্ শর্তে $lx+my+n=0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে?

মনে কর, $lx+my+n=0 \cdots (1)$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots (2)$ উপবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে স্পর্শক। এক্ষণে, (x', y') বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1, \text{ বা, } \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=0 \cdots (3)$$

সুতরাং সমীকরণ (1) ও (3) একই সরলরেখার সমীকরণ।

$$\therefore \frac{\frac{x'}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y'}{b^2}}{m}=\frac{-1}{n}$$

বা, $\frac{x'}{a^2l}=\frac{y'}{b^2m}=-\frac{1}{n}$

বা, $x'=-\frac{a^2l}{n},\ y'=-\frac{b^2m}{n}.$

এক্ষণে, যেহেতু (x', y') প্রদত্ত উপবৃত্তের একটি বিন্দু

$\therefore\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{a^4l^2}{a^2n^2}+\frac{b^4m^2}{b^2n^2}=1.$

বা, $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ এবং ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

অনুশীলনী VI C

1. নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বক্রের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখ :
   (i) $x^2+y^2-8x+10y=128$ বৃত্তের $(-8, 0)$ বিন্দুতে,
   (ii) $y^2=6x$ অধিবৃত্তের সেই বিন্দুতে যাহার কোটি হইতেছে 12,
   (iii) $y^2=4a(x-a)$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে,
   (iv) $2x^2+3y^2=6$ উপবৃত্তের উপাক্ষ এবং পরাক্ষের প্রান্ত বিন্দুতে।

2. $x^2+y^2=9$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Cal. Pre. U. '62]

3. যদি $y=3x+5$ সরলরেখা $y^2=8ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক ও অধিবৃত্তের নাভি নির্ণয় কর।

4. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুতে স্পর্শকটি অক্ষের সহিত 30° কোণে নত থাকে ?

5. mএর কোন্ কোন্ মানের জন্য $3y=mx+7$ সরলরেখা $2x^2+3y^2=14$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং সেই সকল ক্ষেত্রে স্পর্শবিন্দুগুলি কি হইবে ?

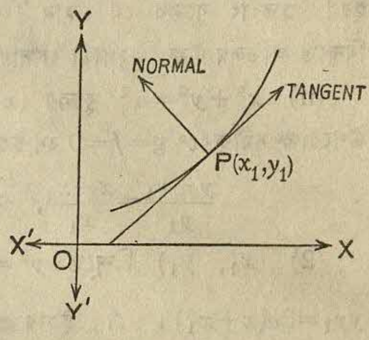
6. $x^2-y^2=9$ পরাবৃত্তের $(5, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের যে বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে মূলবিন্দু হইতে সেই বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. (Comp.) '60]

7. কোন্ শর্তে $lx+my+n=0$ সরলরেখা
   (i) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে, (ii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে ?

§ 6·6. অভিলম্ব (Normal) :

সংজ্ঞা : কোন বক্রের কোন একটি বিন্দুতে উক্ত বক্রের অভিলম্ব হইতেছে

একটি সরলরেখা যাহা ঐ বিন্দুগামী এবং ঐ বিন্দুতে বক্রের স্পর্শকের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত হয়। অর্থাৎ অভিলম্ব হইতেছে স্পর্শকের উপর স্পর্শ বিন্দুতে লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা। সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে যদি স্পর্শকের প্রবণতা m হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা হইবে $-\frac{1}{m}$। যেহেতু অভিলম্ব স্পর্শবিন্দুগামী, সুতরাং বক্রের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের



চিত্র 65

সমীকরণ হইবে $y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$, যেখানে m হইতেছে (x_1, y_1) বিন্দুতে বক্রের স্পর্শকের প্রবণতা।

যদি বক্রটির সমীকরণ $y=f(x)$ হয়, তবে (x_1, y_1) বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শকের প্রবণতা হইতেছে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$.

সুতরাং বক্রের অভিলম্বের প্রবণতা $-\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে,

$$y-y_1=-\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}(x-x_1).$$

§ 6·7. কনিকের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

(1) (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

বা, $(x_1+g)x+(y_1+f)y+gx_1+fy_1+c=0$

$\therefore$ স্পর্শকের প্রবণতা $=m=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ অভিলম্বের প্রবণতা $=-\dfrac{1}{m}=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1), \text{ বা, } \frac{y-y_1}{y_1+f}=\frac{x-x_1}{x_1+g} \cdots(1).$$

অনুসিদ্ধান্ত : (1). (i) অভিলম্বটির সমীকরণ $(-g, -f)$ বিন্দুর জন্য সিদ্ধ হয়। সুতরাং বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব কেন্দ্রগামী অর্থাৎ কোন বিন্দুতে অভিলম্ব উক্ত বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। $\therefore$ ব্যাসার্ধ স্পর্শকের উপর লম্ব।

(ii) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, উপরোক্ত সমীকরণে $g=f=0$ বসাইয়া পাই

$$\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{x-x_1}{x_1}, \text{ বা, } \frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}.$$

(2) (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$। $\therefore$ ইহার প্রবণতা $=m=\frac{2a}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে, $y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$

বা, $y_1x+2ay=y_1(x_1+2a)\cdots\cdots(2)$

অনুসিদ্ধান্ত : (1) যদি (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা m হয়, তবে $m=-\frac{y_1}{2a}$, বা, $y_1=-2am$। আবার যেহেতু (x_1, y_1) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একটি বিন্দু, $\therefore$ $y_1^2=4ax_1$ হইবে।

$\therefore$ $x_1=y_1^2/4a=4a^2m^2/4a=am^2$.

x_1 এবং y_1এর এই মান অভিলম্বের সমীকরণ (2)-এ বসাইয়া পাই

$$-2am.x+2ay=-2am(am^2+2a)$$

বা, $y=mx-2am-am^3\cdots\cdots(2)$

সুতরাং mএর যে কোন মানের জন্য সমীকরণ-(2) সর্বদা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইবে।

(2) (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. $\therefore$ ইহার প্রবণতা $m=-\frac{x_1/a^2}{y_1/b^2}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে, $y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)=+\frac{y_1/b^2}{x_1/a^2}(x-x_1)$.

বা, $\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}\cdots\cdots(3)$

অনুসিদ্ধান্ত : উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$.

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{\dfrac{x-a\cos\theta}{a\cos\theta}}{\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{\dfrac{y-b\sin\theta}{b\sin\theta}}{\dfrac{1}{b^2}}$

বা, $ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2$.

(4) সমীকরণ-(3)-এ b^2এর স্থলে $-b^2$ বসাইয়া

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ পাই

$$\frac{\dfrac{x-x_1}{\dfrac{x_1}{a^2}}}{}=-\frac{\dfrac{y-y_1}{\dfrac{y_1}{b^2}}}{}\quad\text{......}(4)$$

পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-এর উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\sec\theta, b\tan\theta)$, উক্ত বিন্দুতে পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে

$\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে

$$\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2.$$

উদা. 1. নিম্নলিখিত বক্রগুলির প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $3x^2-4y^2=8$ পরাবৃত্তের (2, 1) বিন্দুতে,

(ii) $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রথম পাদস্থিত প্রান্তবিন্দুতে,

(iii) $y^2=4x$ অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে অভিলম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 30° কোণে নত।

(i) পরাবৃত্ত $3x^2-4y^2=8$এর (2, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে $3x.2-4y.1=8$, বা, $6x-4y=8$.

$\therefore$ স্পর্শকের প্রবণতা $=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ হইল $y-1=-\frac{2}{3}(x-2)$ [$\because$ অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব এবং স্পর্শবিন্দু (2, 1) গামী] বা, $2x+3y=7$.

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণ $3x^2+4y^2=12$, বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

অতএব উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিয়া পাই $a^2=4$, $b^2=3$। $\therefore$ উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রথম পাদস্থিত নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)=\left(2.\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)=\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

এখন $(1, \frac{3}{2})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল, $3x.1+4.y.\frac{3}{2}=12$

বা, $x+2y=4$, $\therefore$ স্পর্শকের প্রবণতা $=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ হইল,

$$y-\tfrac{3}{2}=2(x-1), \quad \text{বা}, \quad 4x-2y=1.$$

(iii) এখানে অভিলম্বের প্রবণতা, $m=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

এখন $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে অভিলম্বের প্রবণতা m, তাহার সমীকরণ হইতেছে, $y=mx-2am-am^3$.

এখানে $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $a=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে,

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-2.1.\ \frac{1}{\sqrt{3}}-1.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

বা, $3\sqrt{3}y=3x-6-1$, $3\sqrt{3}y=3x-7$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে $lx+my=1$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের একটি অভিলম্ব হইবে যদি $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=(a^2+b^2)^2$ হয়।

মনে কর, $lx+my=1\cdots(1)$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdots(2)$ পরাবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অভিলম্ব। এখন $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে, $\dfrac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=-\dfrac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}}$

$$\text{বা}, \quad \frac{a^2}{x'}x+\frac{b^2}{y'}y=a^2+b^2\ldots\ldots(3)$$

(1) এবং (3) উভয় সরলরেখাই পরাবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অভিলম্ব। সুতরাং উহারা একই সরলরেখাকে সূচিত করে। অতএব উহাদের x, y-এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমানুপাতিক।

$$\therefore \quad \frac{l}{\frac{a^2}{x'}}=\frac{m}{\frac{b^2}{y'}}=\frac{1}{b^2+a^2}$$

$$\text{বা,} \quad x'=\frac{a^2}{l(a^2+b^2)},\ y'=\frac{b^2}{m(a^2+b^2)}$$

এখন যেহেতু (x', y') পরাবৃত্তের একটি বিন্দু, সুতরাং

$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1.$ x', y'এর মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{a^4}{a^2l^2(a^2+b^2)^2}-\frac{b^4}{b^2m^2(a^2+b^2)^2}=1$$

বা, $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=(a^2+b^2)^2.$ ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 3. $4x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের $2x+3y=6$ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$2x+3y=6$ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $3x-2y=c\cdots(1)$ আকারে লওয়া যায়। মনে কর, এই রেখা $4x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অভিলম্ব। এখন (x', y') বিন্দুতে $4x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে,

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{18}}=\frac{y-y'}{\frac{y'}{8}}, \quad \text{বা,} \quad \frac{18}{x'}x-\frac{8}{y'}y=-8+18=10\cdots(2)$$

এখন (1) এবং (2) একই সরলরেখার সমীকরণ। সুতরাং তুল্যসহগের অনুপাত লইয়া পাই,

$$\frac{3}{18/x'}=\frac{-2}{-8/y'}=\frac{c}{10}, \quad \text{বা,} \quad \frac{x'}{6}=\frac{y'}{4}=\frac{c}{10}$$

$\therefore \ x'=\frac{3c}{5}, y'=\frac{2c}{5}.$ এখন যেহেতু (x', y'), $4x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের একটি বিন্দু, সেজন্য $4x'^2+9y'^2=72$। x', y' এর মান বসাইয়া পাই

$4.\frac{9c^2}{25}+9.\frac{4c^2}{25}=72,$ বা, $\frac{72}{25}c^2=72,$ বা, $c^2=25.$ $\therefore \ c=\pm 5.$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে $3x-2y=\pm 5.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, কোন বিন্দু হইতে সাধারণ ভাবে অধিবৃত্তের তিনটি অভিলম্ব টানা যায়।

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$এর উপর অভিলম্ব টানা হইবে। এখন $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে $y=mx-2am-am^3 \cdots\cdots(1)$. এই অভিলম্ব (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে, $y_1=mx_1-2am-am^3$,

বা, $am^3+(2a-x_1)m+y_1=0 \cdots\cdots(2)$. ইহা একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

সুতরাং m-এর তিনটি বীজ থাকিবে (বাস্তব বা কাল্পনিক)। m-এর ঐ তিনটি বীজ অভিলম্বের সমীকরণ-(2)-এ বসাইয়া তিনটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে যাহারা (x_1, y_1) বিন্দুগামী। সুতরাং যে কোন বিন্দু হইতে সাধারণভাবে অধিবৃত্তের উপর তিনটি অভিলম্ব টানা যায়।

অনুশীলনী VI (D) :

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বক্রের প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লিখ।

(i) $x^2=4y$ অধিবৃত্তের (6, 9) বিন্দুতে

(ii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে

(iii) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ পরাবৃত্তের প্রথম পাদস্থিত নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে

(iv) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপাক্ষের প্রান্তবিন্দুতে।

2. $lx+my=n$ সরলরেখাটি কোন্ শর্তে

(i) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের

(iii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের অভিলম্ব হইবে ?

3. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে অভিলম্ব $x-2y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ এবং পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে (1, 1) বিন্দুতে $x^2+y^2+4x+2y-8=0$ বৃত্তের অভিলম্বটি $9y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

5. $y^2=4x$ অধিবৃত্তের যে বিন্দুর ভুজ এবং কোটি সমান সেই বিন্দুতে উহার অভিলম্ব-জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, যদি $5c=a^2e^2$ হয়, তবে $\frac{ax}{3}+\frac{by}{4}=c$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি অভিলম্ব হইবে। [C. U. 1959]

§ 6·8. **বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কণিকের উপর যতগুলি স্পর্শক টানা যায় তাহাদের সংখ্যা** (number of tangents that can be drawn from an external point to a conic) :

(1) $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ সরলরেখাটি সর্বদাই $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (x', y') দিয়া যায়,

তবে $y'=mx'+a\sqrt{1+m^2}$, বা, $(y'-mx')^2=a^2(1+m^2)$

বা, $(x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+(y'^2-a^2)=0$। ইহা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। $\therefore$ m-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। এই মান দুইটি $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ সমীকরণে বসাইলে দুইটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

সুতরাং বহিঃস্থ (x', y') বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপর সাধারণতঃ দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

(2) সরলরেখা $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সতত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (x', y') দিয়া যায়, তবে $y'=mx'+\dfrac{a}{m}$,

বা, $m^2x'-my'+a=0$। ইহা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ m-এর দুইটি মান পাওয়া যায় এবং এই মান $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সমীকরণে বসাইয়া (x', y') বিন্দুগামী দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়। সুতরাং বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের উপর সাধারণতঃ দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

(3) সরলরেখা $y=mx+\sqrt{\dfrac{a+bm^2}{ab}}$ সর্বদাই কণিক $ax^2+by^2=1$ এর স্পর্শক হয়। যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (x', y') দিয়া যায়, তবে

$y'=mx'+\sqrt{\dfrac{a+bm^2}{ab}}$, বা, $(y'-mx')^2=\dfrac{a+bm^2}{ab}$.

বা, $(abx'^2-b)m^2-2abx'y'm+(aby'^2-a)=0$,

ইহা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং m এর দুইটি মান m_1 এবং m_2 পাওয়া যাইবে এবং এই দুইটি মান $y=mx+\sqrt{\dfrac{a+bm^2}{ab}}$ সমীকরণে বসাইয়া (x', y') বিন্দুগামী দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে। সুতরাং বহিঃস্থ যে কোন বিন্দু হইতে ঐ কণিকের উপর (অর্থাৎ উপবৃত্ত বা পরাবৃত্তের উপর) সাধারণতঃ দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : এই দুইটি স্পর্শক যদি লম্বভাবে অবস্থিত থাকে, তবে

$m_1.m_2=-1$ হইবে, অর্থাৎ $\dfrac{aby'^2-a}{abx'^2-b}=-1$ হইবে,

বা, $ab(x'^2+y'^2)=a+b$, বা, $x'^2+y'^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ হইবে।

সুতরাং $ax^2+by^2=1$ কণিকের লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকসমূহের ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইতেছে $x^2+y^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$। ইহাকে কণিকের নিয়ামক বৃত্ত (director circle) বলে।

দ্রষ্টব্য : (1) উপরোক্ত m-এর দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক হইতে পারে। এই সব ক্ষেত্রে (x', y') বিন্দু হইতে কোন স্পর্শক টানা যাইবে না। এইজন্যই বলা হয়, বহিঃস্থ বিন্দু হইতে **সাধারণতঃ** দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

(2) উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$এর নিয়ামক বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2+b^2$. পরাবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$এর নিয়ামক বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2-b^2$.

(3) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের বহিঃস্থ (x', y') বিন্দু হইতে যে স্পর্শকদ্বয় টানা যায় তাহাদের প্রবণতা $m^2x'-my'+a=0$ সমীকরণদ্বারা পাওয়া যায়। যদি স্পর্শকদ্বয় লম্বভাবে অবস্থিত থাকে তবে,

$\dfrac{a}{x'}=-1$, বা, $x'+a=0$ হইবে,

$\therefore$ অধিবৃত্তের লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকসমূহের ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $x+a=0$ সরলরেখা। ইহা অধিবৃত্তের নিয়ামক (directrix)।

উদাহরণ। $2x^2+7y^2=14$ উপবৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $(5, 2)$ হইতে ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা সর্বদাই উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$এর স্পর্শক হয়।

এখানে উপবৃত্তের সমীকরণ $2x^2+7y^2=14$.

বা, $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{2}=1$...... (i). $\therefore$ $a^2=7$, এবং $b^2=2$.

$\therefore\ y=mx\pm\sqrt{7m^2+2}$......(ii) সরলরেখা সর্বদাই উপবৃত্ত-(i)এর স্পর্শক।

এখন স্পর্শকটি (5, 2) বিন্দুগামী হইলে, $2=5m\pm\sqrt{7m^2+2}$ হয়,

বা, $9m^2-10m+1=0$, বা, $(m-1)(9m-1)=0$, বা, $m=1, \frac{1}{9}$

সমীকরণ (ii)-এ $m=1$ বসাইয়া পাই, $y=x\pm\sqrt{9}$, বা, $y=x\pm3$, ইহাদের মধ্যে মাত্র $y=x-3$, বা, $x-y=3$ রেখাটিই (5, 2) বিন্দুগামী অর্থাৎ (5, 2) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

আবার, সমীকরণ (ii)-এ $m=\frac{1}{9}$ বসাইয়া পাই, $y=\frac{1}{9}x\pm\sqrt{\frac{7}{81}+2}$

বা, $9y=x\pm13$, ইহাদের মধ্যে $x-9y+13=0$ রেখাটি (5, 2) বিন্দুগামী।

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয় হইল, $x-y=3$ এবং $x-9y+13=0$.

অনুশীলনী VI(E) :

1. প্রদত্ত বিন্দু হইতে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বক্রের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2+y^2=25$ বৃত্তের, (13, 0) বিন্দু হইতে,

(ii) $2x^2+5y^2=10$ উপবৃত্তের, (−6, 0) বিন্দু হইতে,

(iii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের, $(-a, 0)$ বিন্দু হইতে,

(iv) $xy=16$ পরাবৃত্তের, (1, 1) বিন্দু হইতে।

2. (1, −1) বিন্দু হইতে $y^2=4(x-3)$ অধিবৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ কত?

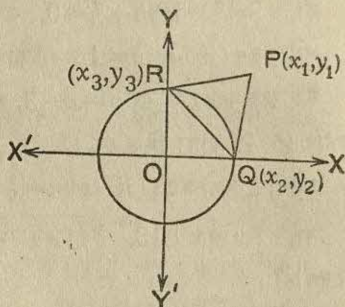
3. যে বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরের সঙ্গে 45° কোণে নত থাকে সেই বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

§ 6·9. **স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা** (Chord of contact) :

সংজ্ঞা : বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন কণিকের উপর দুইটি স্পর্শক টানা যায়। এই স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে ঐ বিন্দুর ঐ কণিকের সাপেক্ষে স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (chord of contact) বলে। সুতরাং কোন কণিকের কোন বহিঃস্থ বিন্দু P-এর ঐ কণিকের সাপেক্ষে স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা হইতেছে, ঐ বিন্দু হইতে কনিকের উপর যে দুইটি স্পর্শক টানা যায় তাহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয় Q এবং R-এর সংযোজক সরলরেখা QR।

মনে কর $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$-এর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা বাহির করিতে হইবে।

মনে কর, P বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর যে দুইটি স্পর্শক টানা যায় তাহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয় হইতেছে $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$.



চিত্র 66

(x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয় $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় হইতেছে যথাক্রমে $xx_2+yy_2=a^2$ এবং $xx_3+yy_3=a^2$.

যেহেতু এই স্পর্শকদ্বয় (x_1, y_1) বিন্দুগামী, সেইজন্য (x_1, y_1) উপরোক্ত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore\ x_1x_2+y_1y_2=a^2\cdots(1)$ এবং $x_1x_3+y_1y_3=a^2\cdots(2)$

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে, $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $xx_1+yy_1=a^2$. কারণ,

(i) (1) এবং (2) সমীকরণদ্বয় হইতে পাওয়া যাইতেছে যে ইহা $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ বিন্দুর দ্বারা সিদ্ধ হয়, সুতরাং ইহা Q এবং R বিন্দুগামী।

(ii) x এবং yএর একটি একমাত্রিক সমীকরণ বলিয়া ইহা একটি সরলরেখার সমীকরণ।

$\therefore\ x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1)-এর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $xx_1+yy_1=a^2$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে যে,

(i) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $yy_1=2a(x+x_1)$;

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$;

(iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

দ্রষ্টব্য : লক্ষ্য কর (x_1, y_1) বিন্দুতে কণিকের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ-এর একই আকার। তবে সমীকরণটি কণিকের স্পর্শক হইবে যদি (x_1, y_1) কণিকের উপরিস্থ বিন্দু হয় এবং সমীকরণটি স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা হইবে যদি (x_1, y_1) কণিকের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হয়।

উদা. 1. $x^2+y^2-3x+5y+1=0$ বৃত্তের বহিস্থ বিন্দু (3, 4)এর ঐ বৃত্ত সাপেক্ষে স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(3, 4) বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে,

$x.3+y.4-\frac{3}{2}(x+3)+\frac{5}{2}(y+4)+1=0$, বা, $3x+13y+13=0$.

উদা. 2. $x+2y=7$ সরলরেখা এবং $3x^2+2y^2=35$ উপবৃত্তের ছেদবিন্দু দুইটি দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

$x+2y=7$ সরলরেখা এবং $3x^2+2y^2=35$ উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া উপবৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়, তাহাদের স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ স্পষ্টতঃ $x+2y=7$ ...(i).

মনে কর, উপবৃত্ত $3x^2+2y^2=35$-এর সহিত সরলরেখা-(i) এর ছেদবিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পরকে (x', y') বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (x', y') হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $3x'x+2y'y=35$ ...(iii)। (i) রেখাটিও ঐ স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ। $\therefore$ উভয় রেখা একই রেখা হইবে।

$\therefore$ $\frac{3x'}{1}=\frac{2y'}{2}=\frac{35}{7}=5$, বা, $x'=\frac{5}{3}, y'=5$.

অতএব স্পর্শকদ্বয়ের নির্ণেয় ছেদবিন্দু $(\frac{5}{3}, 5)$.

অনুশীলনী VI (F) :

1. নিম্নলিখিত বক্রগুলির প্রত্যেকটির সাপেক্ষে প্রদত্ত বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $y^2=8x$ অধিবৃত্তের (3, 1) বিন্দুর,

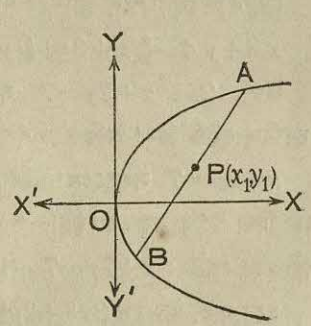
(ii) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ উপবৃত্তের $(2, \sqrt{3})$ বিন্দুর,

(iii) $x^2-y^2=16$ পরাবৃত্তের $(1, -1)$ বিন্দুর।

2. $x+4y-2=0$ সরলরেখা এবং $x^2+y^2-2x+2y-1=0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া বৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক টানা যায় তাহাদের ছেদবিন্দু বাহির কর।

§ 6·10. কণিকের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ (Equation of the chord bisected at a given point within the conic) :

(1) মনে কর, P(x_1, y_1), $y^2=4ax \cdots (1)$ অধিবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোন বিন্দু $\therefore$ $y_1{}^2<4ax_1$। (x_1, y_1) বিন্দুগামী কোন সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$-র সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r \cdots (2)$ আকারে লওয়া যায়, যেখানে r হইতেছে (x, y) এবং (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব এবং $\tan\theta$ সরলরেখাটির প্রবণতা। সরলরেখা-(2)এর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x=x_1+r\cos\theta, y=y_1+r\sin\theta$। x এবং y-এর মান সমীকরণ (1)-এ বসাইয়া পাই, $(y_1+r\sin\theta)^2 =4a(x_1+r\cos\theta)$,



চিত্র 67

বা, $r^2\sin^2\theta+2(y_1\sin\theta-2a\cos\theta)r +(y_1{}^2-4ax_1)=0 \cdots (3)$

সমীকরণ-(3) হইতে r-এর দুইটি মান r_1 এবং r_2 পাওয়া যাইতেছে। এই মানদ্বয় P বিন্দু হইতে সরলরেখা-(2) এবং অধিবৃত্ত-(1)-এর ছেদবিন্দুদ্বয় A এবং B-এর দূরত্ব। এখন P যদি AB জ্যার মধ্যবিন্দু হয়, তবে r_2=PA এবং r_2=PB-এর মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore$ $r_1+r_2=0$ হইবে। $\therefore$ সমীকরণ-(3)এ r-এর সহগ $=0$ হইবে,

বা, $y_1\sin\theta-2a\cos\theta=0$.

এখন (2) হইতে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান বসাইয়া পাই,

$$y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)=0$$

বা, $yy_1-2a(x+x_1)=y_1{}^2-4ax_1 \cdots\cdots (4)$

সমীকরণ-(4) হইতেছে (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের জ্যার সমীকরণ।

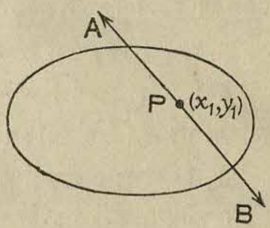
(2) এইবার মনে কর, P(x_1, y_1) হইতেছে কণিক $ax^2+by^2=1 \cdots (5)$ এর ভিতরে অবস্থিত কোন বিন্দু। P বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r \cdots (6)$ আকারে লওয়া যায়, যেখানে r হইতেছে (x, y) এবং (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব।

(6) হইতে x এবং y-এর মান সমীকরণ-(5)-এ বসাইয়া পাই,

$$a(x_1+r\cos\theta)^2+b(y_1+r\sin\theta)^2=1$$

বা, $$(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)r^2+2(ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta)r$$
$$+(ax_1{}^2+by_1{}^2-1)=0\cdots\cdots(7)$$

সমীকরণ-(7) হইতে r-এর যে মান দুইটি পাওয়া যাইতেছে তাহা হইল P বিন্দু হইতে কণিক-(6) এবং সরলরেখা (7)-এর ছেদ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব। এখানে P মধ্যবিন্দু হইলে উক্ত মানদ্বয় সমপরিমাণের কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। সুতরাং সমীকরণ-(7)এর বীজদ্বয়ের যোগফল শূন্য হইবে। ইহা সম্ভব হইবে যদি $ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta=0$ হয়।



চিত্র 68

(7) হইতে $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$-এর মান বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$ax_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)=0$$

বা, $$(axx_1+byy_1)=ax_1{}^2+by_1{}^2\cdots\cdots(8)$$

সমীকরণ-(8) হইতেছে $ax^2+by^2=1$ কণিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য: (1) $ax^2+by^2=1$ কণিকের সমীকরণের a স্থলে $\frac{1}{a^2}$ এবং b-এর স্থলে একবার $\frac{1}{b^2}$, এবং আর একবার $-\frac{1}{b^2}$ বসাইয়া আমরা পাই,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

এবং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}.$$

উপবৃত্তের সমীকরণে $a=b$ বসাইয়া পাই,

$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ $xx_1+yy_1=x_1{}^2+y_1{}^2$.

(2) কণিকের সমীকরণকে যদি $S=0$ লেখা হয় এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে S-এর মানকে যদি S_1 লেখা হয় এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে $S=0$-এর স্পর্শকের

সমীকরণের আকার যদি $T=0$ হয়, তবে $S=0$ কণিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ হইবে $T=S_1$.

উদাহরণ স্বরূপ যদি বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-a^2=0$কে $S=0$ দ্বারা লেখা হয় ; অর্থাৎ যদি $S=x^2+y^2-a^2$ হয়, এবং $S_1=x_1^2+y_1^2-a^2$, $T=xx_1+yy_1-a^2$ হয়, তবে (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ হইবে $T=S_1$,

বা, $xx_1+yy_1-a^2=x_1^2+y_1^2-a^2$, বা, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$,

উদা. 1. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ বৃত্তের $(1, 1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(1, 1)$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে
$T=0$ বা, $x.1+y.1-2(x+1)+3(y+1)-12=0$
বা, $-x+4y-11=0$
$\therefore$ $(1, 1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে $T=S_1$
বা, $-x+4y-11=1^2+1^2-4.1+6.1-12=-8$
বা, $x-4y+3=0$.

উদা. 2. $2x=5y+1$ সরলরেখার দ্বারা ছিন্ন $4x^2-9y^2=27$ পরাবৃত্তের জ্যা-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দু হইতেছে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore$ জ্যা-টির সমীকরণ হইবে, $T=S_1$,
বা, $4x.x_1-9y.y_1-27=4x_1^2-9y_1^2-27$,
বা, $4x_1x-9y_1y=4x_1-9y_1^2$. ইহা এবং $2x-5y=1$ সমীকরণের দ্বারা সূচিত সরলরেখা অভিন্ন,

$\therefore$ $\dfrac{4x_1}{2}=\dfrac{-9y_1}{-5}=\dfrac{4x_1^2-9y_1^2}{1}=k$, মনে কর।

$\therefore$ $x_1=\frac{1}{2}k$, $y_1=\frac{5}{9}k$, $4x_1^2-9y_1^2=k$.

x_1, y_1-এর মান বসাইয়া পাই, $4.\frac{1}{4}k^2-9.\frac{25}{81}k^2=k$.

বা, $k^2-\frac{25}{9}k^2=k$, বা, $k=-\frac{9}{16}$, $\therefore$ $x_1=-\frac{9}{32}$, $y_1=-\frac{5}{16}$.

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হইতেছে $(-\frac{9}{32}, -\frac{5}{16})$.

উদা. 3. $8x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের যে সকল জ্যা নির্দিষ্ট $(3, -2)$ বিন্দু দিয়া যায় তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

$8x^2+9y^2=72\cdots$(i) $(3, -2)$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু মনে করা যাক (x', y')। এখন (x', y') বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত $8x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের জ্যা-এর সমীকরণ হইতেছে,

$$8xx'+9yy'-72=8x'^2+9y'^2-72.$$

এই জ্যা (3, −2) বিন্দুগামী বলিয়া,

$$8.3x'+9.(-2)y'-72=8x'^2+9y'^2-72$$

বা, $8x'^2+9y'^2-24x'+18y'=0$

∴ (3, −2) বিন্দুগামী উপবৃত্তের জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দু (x', y')-এর সঞ্চারপথ হইতেছে, $8x^2+9y^2-24x+18y=0$.

অনুশীলনী VI (G) :

1. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $9x^2+10y^2=90$ উপবৃত্তের যে জ্যা-এর (1, −1) বিন্দুটি মধ্যবিন্দু তাহার সমীকরণ বাহির কর।

3. প্রমাণ কর যে, $x^2-y^2=5$ সমপরাবৃত্তের যে দুইটি জ্যা যথাক্রমে (7, −2) এবং (2, 7) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহারা পরস্পরের উপর লম্ব।

4. $72x+15y=149$ সরলরেখার দ্বারা ছিন্ন $12x^2+15y^2=180$ উপবৃত্তের জ্যা-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

5. $4x^2+5y^2=20$ উপবৃত্তের সেই জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর যেগুলি (i) (1, 1) বিন্দু দিয়া, (ii) (4, −5) বিন্দু দিয়া গিয়াছে।

6. প্রমাণ কর যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(a, 0)$ দিয়া অঙ্কিত জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$ উপবৃত্ত।

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) বিন্দু এবং $5x+12y=1$ সরলরেখা বৃত্তটির একটি স্পর্শক। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃত্তটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, এখানে, $g=-3$, $f=-4$;

∴ বৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2-6x-8y+c=0$, এবং ইহার ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{9+16-c}=\sqrt{25-c}.$

(3, 4) বিন্দু হইতে $5x+12y=1$ সরলরেখার উপর

লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{15+48-1}{\sqrt{25+144}}=\frac{62}{13}$, ∴ $\sqrt{25-c}=\frac{62}{13}$

বা, $\frac{3844}{169}=25-c$, ∴ $c=25-\frac{3844}{169}=\frac{381}{169}$.

∴ বৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2-6x-8y+\frac{381}{169}=0$.

উদা. 2. একটি বৃত্ত উভয় অক্ষকে স্পর্শ করিয়াছে এবং তাহার কেন্দ্রের উভয় স্থানাঙ্কই ধনাত্মক। বৃত্তটি যদি $3x-4y+6=0$ রেখাকেও স্পর্শ করে, তবে তাহার সমীকরণ এবং ঐ রেখার সহিত স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করায় এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক অর্থাৎ ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক বলিয়া বুঝা যায় যে বৃত্তটি প্রথম পাদে অবস্থিত। আবার, বৃত্তটি অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে, সুতরাং কেন্দ্র হইতে অক্ষদ্বয়ের দূরত্ব দুইটি সমান এবং প্রত্যেক দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

এখন মনে কর, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=h$,

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইবে $(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$.

কেন্দ্র (h, h) হইতে প্রদত্ত রেখা $3x-4y+6=0$-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্যও h হইবে। $\therefore \; h=\dfrac{3h-4h+6}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা, $5h=6-h$, $\therefore \; h=1$.

সুতরাং বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,

বা, $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

উদা. 3. অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছেদিত অংশ নাভিতে এক সমকোণের সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।

মনে কর $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভি S এবং অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)। মনে কর, P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শক নিয়ামককে R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $m\angle$PSR এক সমকোণ। P বিন্দুতে $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$yy_1-2a(x+x_1)=0 \;\cdots\cdots(1)$$

নিয়ামকের সমীকরণ হইল $x=-a\cdots(2)$. (1) এবং (2) সমাধান করিয়া R-এর স্থানাঙ্ক পাই,

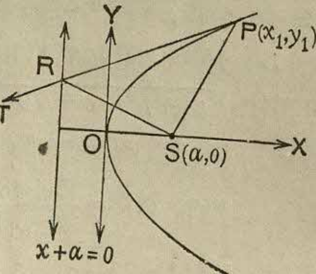
$$R=\left\{-a, \frac{2a(-a+x_1)}{y_1}\right\}$$

নাভি S-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

P-এর স্থানাঙ্ক $=(x_1, y_1)$

$\therefore$ SP-এর প্রবণতা m_1

$=\dfrac{y_1-0}{x_1-a}=\dfrac{y_1}{x_1-a}$



চিত্র 69

SR-এর প্রবণতা $m_2=\dfrac{\frac{2a}{y_1}(-a+x_1)-0}{-a-a}=\dfrac{x_1-a}{-y_1}$,

$\therefore\ m_1.m_2=\dfrac{y_1}{x_1-a}.\dfrac{x_1-a}{-y_1}=-1$

$\therefore$ SR⊥SP, অতএব ∠PSR একটি সমকোণ।

উদা. 4. উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছিন্ন অংশ অনুরূপ নাভিতে এক সমকোণের সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।

মনে কর P(x_1, y_1) বিন্দু $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু।

P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1\cdots\cdots(i)$

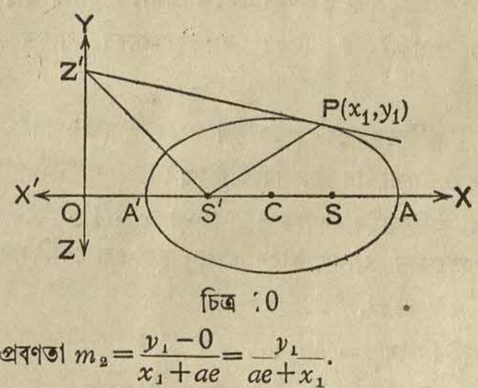
মনে কর, স্পর্শকটি নিয়ামক $\overleftrightarrow{zz'}$কে অর্থাৎ $x=-\dfrac{a}{e}\cdots$(ii)-কে z' বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (i) এবং (ii) এর মধ্যে x অপনয়ন করিয়া পাওয়া যায় $-\dfrac{x_1}{ae}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$, বা, $y=\dfrac{b^2(ae+x_1)}{aey_1}$.

$\therefore$ z'এর স্থানাঙ্ক হইল $\left(-\dfrac{a}{e},\ \dfrac{b^2(ae+x_1)}{aey_1}\right)$,

নাভি, S′এর স্থানাঙ্ক $(-ea, 0)$,

$\therefore$ Z′S′এর প্রবণতা $m_1=\dfrac{\frac{b^2(ae+x_1)}{aey_1}}{-\frac{a}{e}+ae}=-\dfrac{ae+x_1}{y_1}$

$[\because b^2=a^2(1-e^2)]$



চিত্র 10

PS′এর প্রবণতা $m_2=\dfrac{y_1-0}{x_1+ae}=\dfrac{y_1}{ae+x_1}$.

$\therefore\ m_1m_2=-\dfrac{ae+x_1}{y_1}.\dfrac{y_1}{ae+x_1}=-1.$

$\therefore$ Z′S′⊥PS′ অতএব, ∠PS′Z′ এক সমকোণ।

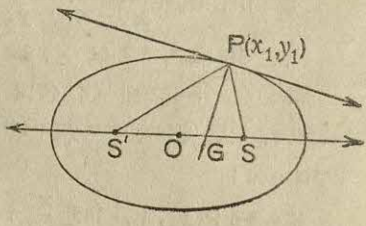
উদা. 5. উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্বটি ঐ বিন্দুর নাভিদূরত্বদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর উপর $P(x_1, y_1)$ একটি বিন্দু। জানা আছে যে, $SP=a-ex_1$,

এবং $S'P=a+ex_1$.

P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$$



চিত্র 71

মনে কর, অভিলম্বটি উপবৃত্তের পরাক্ষ $y=0\cdots$(ii)কে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ G-এর x-স্থানাঙ্ক$=$OG.

(i) এবং (ii) হইতে y অপনয়ন করিয়া, OGর মান পাই,

$$OG=x_1-\frac{b^2x_1}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1=e^2x_1$$

$$\therefore\quad GS=OS-OG=ae-e^2x_1=e(a-ex_1),$$

$$S'G=OS'+OG=ae+e^2x_1=e(a+ex_1)$$

$$\frac{SG}{S'G}=\frac{e(a-ex_1)}{e(a+ex_1)}=\frac{a-ex_1}{a+ex_1}=\frac{SP}{S'P}.$$

অতএব PG বা P বিন্দুতে অভিলম্বটি $\angle SPS'$এর সমদ্বিখণ্ডক।

[**দ্রষ্টব্য :** উপরোক্ত উদাহরণ হইতে বলিতে পারি যে, উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকটি ঐ বিন্দুর নাভিদূরত্বদ্বয়ের সহিত সমান কোণে নত থাকে।]

উদা. 6. অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে ভুজ ও কোটি সমান সেই বিন্দুতে অভিলম্ব জ্যা-এর নাভিতে সম্মুখকোণ এক সমকোণ হয়।

মনে কর অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2=4ax\cdots(1)$. মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু Pএর স্থানাঙ্ক হইতেছে (α, α), কারণ এখানে ভুজ এবং কোটি সমান।

সুতরাং $\alpha^2=4a\alpha$, $\therefore$ $\alpha=4a$.

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক$=(4a, 4a)$,

P বিন্দুতে অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে,

$$y-4a=-\frac{4a}{2a}(x-4a),\quad \text{বা,}\quad y=-2x+12a\cdots\cdots 2)$$

মনে কর, অভিলম্বটি অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(1) এবং (2) হইতে x অপনয়ন করিয়া পাই,

$y^2=2a(12a-y)$, বা, $y^2+2ay-24a^2=0$,

বা, $(y+6a)(y-4a)=0$, $\therefore$ $y=-6a$ বা $4a$.

$\therefore$ Qএর কোটি $=-6a$, এবং Qএর ভুজ $=\frac{y^2}{4a}=\frac{36a^2}{4a}=9a$.

$\therefore$ Q এর স্থানাঙ্ক $=(9a, -6a)$, নাভি Sএর স্থানাঙ্ক $=(a, 0)$.

SPএর প্রবণতা $m_1=\frac{4a-0}{4a-a}=+\frac{4}{3}$.

এবং SQএর প্রবণতা $m_2=\frac{-6a-0}{9a-a}=-\frac{3}{4}$.

$\therefore$ $m_1m_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{-3}{4}=-1$. $\therefore$ SP⊥SQ.

অতএব নাভি S বিন্দুতে অভিলম্ব জ্যা PQএর সম্মুখ কোণটি এক সমকোণ।

উদা. 7. $x^2+y^2=2a^2$ বৃত্তের এবং $y^2=8ax$ অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর। [C. U. '55]

মনে কর, $y=mx+c$ ⋯⋯(i) সরলরেখাটি $x^2+y^2=2a^2$⋯(ii) বৃত্ত এবং $y^2=8ax$⋯⋯(iii) অধিবৃত্ত উভয়েরই স্পর্শক।

$\therefore$ একটি সরলরেখার বৃত্তের এবং অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইতে পাই $c=\pm\sqrt{2}a\sqrt{1+m^2}$ এবং $c=\frac{2a}{m}$.

$\therefore$ $\pm\sqrt{2}a\sqrt{1+m^2}=\frac{2a}{m}$, বা, $2m^2(1+m^2)=4$

বা, $m^4+m^2-2=0$, বা, $(m^2+2)(m^2-1)=0$.

$\therefore$ $m^2=1, -2$, যেহেতু m বাস্তব, $\therefore$ $m^2\geqslant 0$

$\therefore$ m^2এর ঋণাত্মক মান অগ্রাহ্য করিয়া পাই $m^2=1$, বা, $m=\pm 1$.

$\therefore$ $c=\frac{2a}{m}=\pm 2a$.

অতএব নির্ণেয় সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে

$$y=\pm x\pm 2a=\pm(x+2a).$$

উদা. 8. প্রমাণ কর অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুর কোটি, অক্ষকে যেখানে ছেদ করে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব সর্বদা সমান। H. S. '60

মনে কর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$-এ অঙ্কিত অভিলম্ব $y-y_1=\frac{-y_1}{2a}(x-x_1)$, অধিবৃত্তের অক্ষকে অর্থাৎ x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, G বিন্দুর ভুজ$=x$ এবং কোটি$=0$.

$\therefore$ $y=0$ বসাইয়া পাই, $OG=x=2a+x_1$.

আবার মনে কর, P বিন্দুর কোটি x-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ $ON=x_1$

$\therefore$ অভিলম্ব এবং কোটির দ্বারা ছেদিত x-অক্ষের দৈর্ঘ্য

$=GN=OG-ON=2a+x_1-x_1=2a=$ ধ্রুবক।

[এই দৈর্ঘ্যকে উপ-অভিলম্ব (sub-normal) বলে]

উদা. 9. উপবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় সেই জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (,) b)।

নির্দিষ্ট বিন্দু (α, β)-এর মধ্য দিয়া যায় এমন যে কোন একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k) হইলে ঐ জ্যার সমীকরণ হইবে

$$\frac{h}{a^2}(x-h)+\frac{k}{b^2}(y-k)=0$$

$\because$ এই জ্যা (α, β) বিন্দুগামী, $\therefore$ $\frac{h}{a^2}(\alpha-h)+\frac{k}{b^2}(\beta-k)=0.$

অতএব, মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{x}{a^2}(\alpha-x)+\frac{y}{b^2}(\beta-y)=0$$

বা, $\frac{x(x-\alpha)}{a^2}+\frac{y(y-\beta)}{b^2}=0$, ইহা একটি উপবৃত্ত।

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, যদি $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$ হয়, তবে $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ এবং $x^2+y^2+2by+c^2=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে।

$x^2+y^2+2ax+c^2=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(-a, 0)$ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ $r_1=\sqrt{a^2-c^2}$; $x^2+y^2+2by+c^2=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $B(0, -b)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2=\sqrt{b^2-c^2}$.

এক্ষণে, যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে,

$\therefore\ r_1 \pm r_2 = AB.$ [§ 6·3 উদাহরণ 4 দেখ]

বা, $\pm\sqrt{a^2-c^2} \pm \sqrt{b^2-c^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

বা, $a^2-c^2+b^2-c^2 \pm 2\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} = a^2+b^2$

[উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $\pm 2\sqrt{a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+c^4} = 2c^2$

বা, $a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+c^4 = c^4$

বা, $a^2b^2 = b^2c^2+c^2a^2$

বা, $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ [উভয় পক্ষকে $a^2b^2c^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

উদা. 11. প্রমাণ কর যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $y^2=2ax$ অধিবৃত্ত।

$y^2=4ax \cdots (1)$ অধিবৃত্তের শীর্ষ O-এর স্থানাঙ্ক (0, 0) সুতরাং শীর্ষবিন্দুগামী কোন জ্যা $y=mx \cdots (2)$ অধিবৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করিলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $y=mx$ এবং $y^2=4ax$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যাইবে।

$y^2=4ax$ সমীকরণে, $y=mx$ বসাইয়া পাই, $m^2x^2=4ax$

$\therefore\ x=0$ বা $\dfrac{4a}{m^2}$, সুতরাং $y=0, \dfrac{4a}{m}.$

সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{4a}{m^2}, \dfrac{4a}{m}\right).$

অতএব OA জ্যার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') হইলে

$$x' = \frac{\frac{4a}{m^2}+0}{2} = \frac{2a}{m^2} \text{ এবং } y' = \frac{\frac{4a}{m}+0}{2} = \frac{2a}{m}.$$

এখন, $y'^2 = \dfrac{4a^2}{m^2} = 2a.\dfrac{2a}{m^2} = 2ax'.$

সুতরাং (x', y'), $y^2=2ax$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, অর্থাৎ মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ $y^2=2ax.$

উদা. 12. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের পরস্পর α-কোণে নত স্পর্শক দুইটির ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, α-কোণে নত, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক $y=m_1x+c_1$, এবং $y=m_2x+c_2$ পরস্পর T(h, k) বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন আমরা

জানি, $y=mx+\frac{a}{m}$ সর্বদা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক (h, k) বিন্দুগামী হয়, তবে $k=mh+\frac{a}{m}$,

বা, $m^2h-mk+a=0$. এখন এই সমীকরণের বীজদ্বয় m_1 এবং m_2.

$\therefore\ m_1+m_2=\frac{k}{h}$ এবং $m_1.m_2=\frac{a}{h}$.

স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ α বলিয়া,

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-4.\frac{a}{h}}}{1+\frac{a}{h}}$$

$$=\frac{\sqrt{k^2-4ah}}{a+h},\quad \text{বা},\quad \sqrt{k^2-4ah}=(h+a)\tan\alpha,$$

বা; $k^2-4ah=(h+a)^2\tan^2\alpha$.

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল, $y^2-4ax=(x+a)^2\tan^2\alpha$.

উদা. 13. $y^2=4x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

অধিবৃত্ত $y^2=4x$ এর যে কোন অভিলম্বের সমীকরণকে,

$y=mx-2m-m^3\cdots$(i) আকারে লওয়া যায়।

মনে কর, অভিলম্ব দ্বারা ছেদিত জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (h, k)। সুতরাং অভিলম্ব জ্যা-র সমীকরণ $T=S_1$,

বা, $y.k-2(x+h)=k^2-4h$, বা, $yk=2x+k^2-2h\cdots$(ii)

(i) এবং (ii) একই সরলরেখার সমীকরণ। $\therefore$ তুলনা করিয়া পাই,

$$\frac{1}{k}=\frac{m}{2}=\frac{-2m-m^3}{k^2-2h}$$

$$\therefore\quad m=\frac{2}{k}\ \text{এবং}\ k=\frac{k^2-2h}{-m(2+m^2)}$$

$$\text{বা,}\quad k=\frac{k^2-2h}{-\frac{2}{k}\left(2+\frac{4}{k^2}\right)}=\frac{k^3(k^2-2h)}{-4k^2-8},\quad \text{বা,}\quad 1=\frac{k^2(k^2-2h)}{-4k^2-8}$$

বা, $k^2(k^2-2h)=-4k^2-8$, বা, $k^2(k^2-2h+4)+8=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $y^2(y^2-2x+4)+8=0$.

উদা. 14. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হইতে ধ্রুবক দৈর্ঘ্য $2l$ ছিন্ন করে। উহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে কর, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, k)।

সুতরাং বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2-2hx-2ky+c=0$ আকারে লওয়া যায়। যেহেতু বৃত্তটি y-অক্ষকে অর্থাৎ $x=0$কে স্পর্শ করে,

$\therefore$ $y^2-2ky+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ $4k^2-4c=0$, বা, $k^2=c \cdots(1)$

x-অক্ষের সহিত বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ, $y=0$ বসাইয়া,

$x^2-2hx+c=0$ সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়।

মনে কর, x_1 এবং x_2 এই সমীকরণের বীজ।

$\therefore$ x-অক্ষ দ্বারা ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=x_2-x_1$

$$=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4h^2-4c}=2\sqrt{h^2-c}$$

$=2l$ (দেওয়া আছে)

$\therefore$ $h^2-c=l^2 \cdots(2)$

বা, $h^2-k^2=l^2$ [(1) হইতে c-এর মান বসাইয়া],

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইতেছে, $x^2-y^2=l^2$.

উদা. 15. প্রমাণ কর যে, কোন উপবৃত্ত, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর নাভিদ্বয় হইতে উহার যে কোন স্পর্শকের লম্বদূরত্বদ্বয় p এবং p' হইলে $pp'=b^2$.

[H.S. '67, '69]

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$এর যে কোন বিন্দু (x', y')-এ উহার স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে, $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=0 \cdots(1)$

উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতেছে $S=(ae, 0)$ এবং $S'=(-ae, 0)$

S হইতে (1)এর উপর লম্বদূরত্ব $p=\dfrac{\frac{aex'}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$ এবং

S হইতে (2) এর উপর লম্বদূরত্ব $p'=\dfrac{\frac{-aex'}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$

$$\therefore\ pp' = \frac{1-\dfrac{e^2x'^2}{a^2}}{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}} = \frac{1-e^2\left(1-\dfrac{y'^2}{b^2}\right)}{\dfrac{1}{a^2}\left(1-\dfrac{y'^2}{b^2}\right)+\dfrac{y'^2}{b^4}}\left[\because\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\right]$$

$$= a^2.b^2.\frac{(1-e^2)b^2+e^2y'^2}{b^4-b^2y'^2+a^2y'^2}$$

$$= a^2b^2\frac{(1-e^2)b^2+e^2y'^2}{b^4+y'^2(a^2-b} = b^2.\frac{a^2(1-e^2)b^2+e^2a^2y'^2}{b^4+e^2a^2y'^2}$$

$$= b^2.\frac{b^4+e^2a^2y'^2}{b^4+e^2a^2y'^2} = b^2 \quad [\because\ b^2=a^2(1-e^2)]$$

উদা. 16. যদি কোন পরাবৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু Pএর স্পর্শজ্যা অন্য কোন বহিঃস্থ বিন্দু Q দিয়া যায়, তবে প্রমাণ কর, Q বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা P বিন্দু দিয়া যাইবে।

মনে কর, পরাবৃত্তটি হইল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ...(1)

মনে কর, বহিঃস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক$=(x_1, y_1)$.

এখন P বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা হইতেছে $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ ...(2)

যদি এই স্পর্শ-জ্যা $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী হয়, তবে আমরা পাই

$$\frac{x_2x_1}{a^2}-\frac{y_2y_1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

এখন Q বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা হইল $\frac{xx_2}{a^2}-\frac{yy_2}{b^2}=1$ ... (4)

ইহা $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী হইবে যদি

$$\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1y_2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$ হয়,

এখন (3) হইতে দেখিতেছি শর্ত (5) সত্য।

∴ Q বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা P বিন্দু দিয়া যাইবে যদি P বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা Q বিন্দু দিয়া যায়।

উদা. 17. প্রমাণ কর, উপবৃত্তের যে কোন নাভিগামী জ্যাএর প্রান্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি ঐ নাভিপার্শ্বস্থ নিয়ামকের উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

ইহার একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং ঐ পার্শ্বস্থ নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x=\frac{a}{e}.$

মনে কর, উপবৃত্তের $(ae, 0)$ নাভিবিন্দুগামী জ্যার দুইটি প্রান্ত বিন্দু P ও Q-তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর (h, k) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং (h, k) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শ-জ্যা হইবে PQ.

$\therefore$ জ্যা PQ-এর সমীকরণ $\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1 \cdots\cdots$(i)

কিন্তু রেখা-(i) নাভিগামী, $\therefore \frac{h}{a^2}.ae+\frac{h}{b^2}.0=1$, বা, $h=\frac{a}{e}$

$\therefore$ ছেদবিন্দু (h, k)-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x=\frac{a}{e}$ ইহাই ঐ নাভিপার্শ্বস্থ নিয়ামকের সমীকরণ।

অতএব, উপবৃত্তের নাভিগামী যে-কোন জ্যা-এর উভয় প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর ঐ নাভিপার্শ্বস্থ নিয়ামকের উপর ছেদ করিবে।

উদা. 18. $P\left(at, \frac{a}{t}\right)$ বিন্দুতে $xy=a^2$ সমপরাবৃত্তের অভিলম্ব পরাবৃত্তকে পুনরায় $\left(at', \frac{a}{t'}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে, $t^3t'=-1$.

$\left(at, \frac{a}{t}\right)$ বিন্দুতে $xy=a^2$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের সমীকরণ

$$y-t^2x=\frac{a}{t}(1-t') \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\left(at, \frac{a}{t}\right)$ ও $\left(at', \frac{a}{t'}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যার সমীকরণ

$$\frac{x-at}{at-at'}=\frac{y-\frac{a}{t}}{\frac{a}{t}-\frac{a}{t'}},$$

বা, $\frac{x-at}{a(t-t')}=\frac{yt-a}{a(t'-t)/t'}$, বা $x-at=-(yt-a)t'$

বা, $x-at=-ytt'+at'$, বা, $ytt'+x=a(t+t') \quad \cdots \quad (2)$

এখানে সমীকরণ (1) ও (2) একই সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

$$\therefore \frac{1}{tt'}=\frac{-t^2}{1}, \text{ বা, } t^3t'=-1.$$

প্রশ্নমালা 8

1. নির্দিষ্ট (h, k) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

2. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের নিম্ন শর্তানুযায়ী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল

(ii) $y=mx+c$ সরলরেখার উপর লম্ব

(iii) অক্ষদ্বয়ের সহিত a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

3. প্রমাণ কর যে $y=mx+c$ সরলরেখা এবং $x^2+y^2=2ax+2by$ বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করিলে $m=\frac{b-c}{a}$ হইবে।

4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র প্রথম পাদে অবস্থিত। বৃত্তটি স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং ইহা মূলবিন্দু হইতে h দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুতে y-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির কেন্দ্র প্রথম পাদে অবস্থিত হইলে, প্রমাণ কর যে বৃত্তটির সমীকরণ $(x-a)^2+(y-h)^2=a^2$.

6. $lx+my=1$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইলে প্রমাণ কর যে, (l, m) বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. P একটি অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দু এবং S অধিবৃত্তের নাভি। প্রমাণ কর অধিবৃত্তটি যেদিকে প্রসারিত হয় সেইদিকে P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা ও P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তটির স্পর্শক $\overrightarrow{PS}$ রশ্মির সহিত সমান কোণে নত।

8. পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকটি ঐ বিন্দুর নাভিদূরত্বদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

9. পরাবৃত্তের কোন স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যবর্তী অংশের নাভিতে সম্মুখকোণ এক সমকোণ হয়।

10. অধিবৃত্তের যে সকল জ্যা (α, β) বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

11. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর P এবং P′ এরূপ দুইটি বিন্দু যে P বিন্দুতে অভিলম্বটি P′ বিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল। প্রমাণ কর PP′ জ্যা নাভিগামী।

12. প্রমাণ কর $2x+4y=9$ রেখাটি $y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব এবং ঐ অভিলম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় কর।

13. $y^2=32x$ এবং $x^2=108y$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর সেই বিশেষ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যে বিন্দুতে অক্ষ পর্যন্ত বিস্তৃত অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নাভিলম্বের সমান। [C.U. '56]

15. $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকটি অক্ষদ্বয় হইতে দুইটি সমান ধনাত্মক অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '61]

16. $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি পরাক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে মূলবিন্দু হইতে তাহার দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. '60]

17. যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কোন স্পর্শক অক্ষদ্বয় হইতে h, k দৈর্ঘ্য ছিন্ন করে, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=1.$ [C. U. '51]

18. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$ উপবৃত্তের যে দুইটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $(4, 1)$ এবং $(1, -1)$ তাহারা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

19. প্রমাণ কর যে $4x^2-3y^2=1$ পরাবৃত্তের $(1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকটি নাভি হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব দুইটির অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

20. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$এর উপর অবস্থিত $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি অধিবৃত্তের অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি GP রেখা P বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া Q বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইলে PQ=GP হয়, তবে দেখাও যে Q বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে $y^2=16a(x+2a)$ অধিবৃত্তটি। [H.S '7]

21. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-2x+4y=0$ এবং $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। [H. S '69]

22. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $x-4y+7=0$ সরলরেখায় অবস্থিত এবং বৃত্তটির সহিত x-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ যথাক্রমে 2 এবং 6। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '6]

23. দেখাও যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $y=mx+c$ জ্যাটির মধ্যবিন্দু হইল $\left(\frac{2a-mc}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$। [H. S. '69]

24. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগুলি এইরূপে অবস্থিত যে ঐ বিন্দুদ্বয়ে স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব। দেখাও যে,

(i) $x_1x_2=a^2$, (ii) $y_1y_2=-4a^2$, (iii) $4x_1x_2+y_1y_2=0.$

25. যদি (α_1, β_1) এবং (α_2, β_2) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক দুইটি পরস্পর (x', y') বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর $x'=\frac{\beta_1\beta_2}{4a}$.

26. প্রমাণ কর যে (α, β) বিন্দু হইতে অঙ্কিত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক জ্যা-এর দৈর্ঘ্য

$$\frac{1}{a}\sqrt{\beta^2+4a^2}\cdot\sqrt{\beta-4a\alpha}.$$

27. প্রমাণ কর বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত যে কোন স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হইবে $\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$ ।

28. $(am_1^2, 2am_1)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বটি উহার সহিত পুনরায় $(am_2^2, 2am_2)$ বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।
প্রমাণ কর যে, $m_1^2+m_1m_2+2=0$.

29. দুইটি সমান অধিবৃত্তের একই শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত আছে, প্রমাণ কর যে,

(i) উহাদের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{2}a$, যেখানে $4a$ নাভিলম্ব।

(ii) উহাদের সাধারন স্পর্শক প্রত্যেক অধিবৃত্তকে নাভিলম্বের এক প্রান্তে স্পর্শ করে। [C. U. '35]

30. দেখাও যে উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা। [H. S. '63]

31. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে সকল জ্যা-এর $(c, 0)$-বিন্দুতে সম্মুখকোণ এক-সমকোণ তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

32. একটি প্রদত্ত রেখাকে এবং একটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি এইরূপ বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে প্রমাণ কর উহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত হইবে। [C. U. '40]

33. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক 45° কোণে মিলিত হইলে উহাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

34. প্রমাণ কর যে পরাবৃত্তের যে সকল জ্যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত।

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক পরস্পর θ কোণে মিলিত হয় তাহাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$ উপবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের উপর কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

37. প্রমাণ কর যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দু সমূহের সঞ্চারপথ $\frac{y^2}{2a}+\frac{4a^3}{y^2}=x-2a$. [Raj. '51]

38. উপবৃত্তের স্পর্শকগুলির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশগুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

39. $y=mx+c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি জ্যা, দেখাও যে, এই জ্যাকে ব্যাস ধরিয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, তাহার সমীকরণ,

$$(a^2m^2+b^2)(x^2+y^2)+2mca^2x+c^2(a^2+b^2)=a^2b^2(1+m^2).$$

40. যদি কোন উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব উপবৃত্তের উপাক্ষের প্রান্তবিন্দু দিয়া যায়, তবে ঐ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e দ্বারা $e^4+e^2-1=0$ সমীকরণ সিদ্ধ হয়। [C. U.]

41. প্রমাণ কর যে, কোন অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন জ্যা-কে ব্যাস ধরিয়া যদি কোন বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে তাহা ঐ অধিবৃত্তের নিয়ামককে স্পর্শ করিবে। [C. U. '59]

42. যদি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-এর উপর P$(x,y)$ একটি বিন্দু হয় এবং যদি কেন্দ্র এবং P-এর সংযোজক রেখা ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, $\tan\theta=\frac{(a^2-b^2)xy}{a^2b^2}$. [C. U.]

43. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের P$(am_1{}^2, 2am_1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তকে অপর একটি বিন্দু Q$(am_2{}^2, 2am_2)$-এ ছেদ করে। যদি A বিন্দু ঐ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হয়, তবে দেখাও যে, APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হইবে

$$2a^2(1+m_1{}^2)(1+m_2{}^2)/m_2.$$

44. $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে

$\sec\theta, b\tan\theta$) বিন্দুতে স্পর্শ করে। দেখাও যে, $\sin\theta=\frac{b}{am}$.

45. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় যদি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+\frac{a^4}{b^4}=0.$$

46. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। যদি যথাক্রমে y-অক্ষ এবং x-অক্ষের উপর অঙ্কিত $\overrightarrow{RP}$ এবং $\overrightarrow{RQ}$ লম্বদ্বয়, R বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, R-এর সঞ্চার পথ হইতেছে $a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2$.

47. $\frac{x^2}{ab^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের P বিন্দুতে অভিলম্বটি x-অক্ষকে, G বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে PG রেখাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইতেছে,

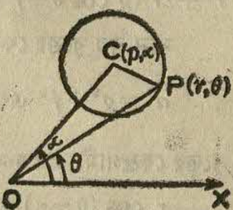
$$\left(\frac{2ax}{2a^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b}\right)^2=1.$$

পরিশিষ্ট

§ A 1 বৃত্তের পোলার সমীকরণ :

(i) কোন বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (p, α) এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য a হইলে বৃত্তের সমীকরণ হয়, $r^2 - 2rp \cos(\theta - \alpha) + p^2 - a^2 = 0.$

মনে কর, O পোল এবং P (r, θ) বৃত্তের যে কোন বিন্দু এবং বৃত্তের কেন্দ্র C. CO, PO ও CP যোগ কর।



$\triangle CPO$ হইতে পাই,

$CP^2 = OP^2 + OC^2 - 2OP.OC \cos POC.$

এক্ষণে $m \angle POC = \pm(\alpha - \theta).$

আবার $CP = a.$

সুতরাং $a^2 = r^2 + p^2 - 2pr \cos\{(\theta - \alpha)\} \cdots$(i)

(ii) সমীকরণ-(1)-কে $r^2 + 2r(g \cos\theta + f \sin\theta) + c = 0$ আকারে লেখা যায়

$$\therefore \; g = -p \cos\alpha, f = -p \sin\alpha,$$

$$\therefore \; p^2 = g^2 + f^2 \text{ এবং } \tan\theta = \frac{f}{g}.$$

এক্ষণে, পোল O যদি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হয়, তবে $p = a$ এবং

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)$$

বা, $r^2 = 2ar \cos(\theta - \alpha)$

বা, $r = 2a \cos(\theta - \alpha).$

এইক্ষেত্রে, বৃত্তের কেন্দ্র প্রারম্ভিক রেখায় অবস্থিত হইলে, $\alpha = 0$ এবং বৃত্তের সমীকরণ হইবে $r = 2a \cos\theta.$

বৃত্তের কেন্দ্র পোল হইলে, বৃত্তের প্রত্যেক বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টর r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. সুতরাং এইক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ $r = a.$

উদা. 3. A ও B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (a, α) ও (b, β). AB রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর $P(r, \theta)$ বৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু। যেহেতু AB বৃত্তের ব্যাস, $\therefore$ $\angle APB$ এক সমকোণ।

$$\therefore \; AP^2 + BP^2 = AB^2$$

বা, $a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\alpha)+b^2+r^2-2rb\cos(\theta-\beta)$
$$=a^2+b^2-2ab\cos(\beta-\alpha)$$

বা, $r^2-r\{a\cos(\theta-\alpha)+b\cos(\theta-\beta)\}+ab\cos(\beta-\alpha)=0$,
এবং ইহাই বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 4. কি শর্তে $r\cos(\theta-\alpha)=p$ সরলরেখা
$r^2+2r(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ?

মনে কর বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, ϕ)

$\therefore\ a^2=g^2+f^2$ এবং $\tan\phi=\frac{f}{g}$.

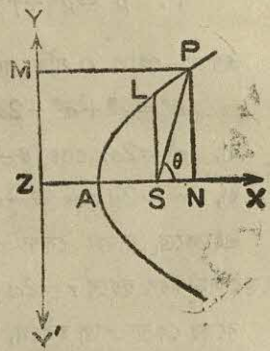
বৃত্তের কেন্দ্রগামী প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ
$$r\cos(\theta-\alpha)=a\cos(\phi-\alpha)$$

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখা $r\cos(\theta-\alpha)=p$, প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করিলে
$a\cos(\phi-\alpha)-p=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে,

বা, $(g\cos\alpha+f\sin\alpha-p)^2=g^2+f^2-c$ হইবে।

§ A 2. কনিকের পোলার সমীকরণ :

মনে কর প্রদত্ত কনিকের নাভি S, $\overleftrightarrow{SX}$-অক্ষ এবং $\overleftrightarrow{YY'}$ নিয়ামক। S-কে পোল এবং $\overleftrightarrow{SX}$-কে প্রারম্ভিক রেখা মনে কর:। মনে কর কনিকের উৎকেন্দ্রতা e, এবং P (r, θ) কনিকের যে কোন একটি বিন্দু। PM ও PN, P বিন্দু হইতে যথাক্রমে নিয়ামক ও অক্ষের উপর লম্ব টান। মনে কর কণিকের অক্ষ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে।



এখানে, $r=SP=e.PM=e.ZN$
$=e.(ZS+SN)=SL+e.SP\cos\theta$
$=l+er\cos\theta$. [$l=LS$ (কণিকের অর্ধ-নাভিলম্ব)]।

সুতরাং $\frac{l}{r}=1-e\cos\theta$ এবং ইহা কনিকের উদ্দিষ্ট সমীকরণ।

[দ্রষ্টব্য 1. $e=1$ হইলে কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।
$e<1$ হইলে কনিকটি উপবৃত্ত এবং
$e>1$ হইলে কনিকটি একটি পরাবৃত্ত।

2. অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $e=1$ এবং $l=2a$.

সুতরাং যে অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$, তাহার সমীকরণ

$$\frac{2a}{r}=1-\cos\theta.\ ]$$

উদা. 5. AB একটি কনিকের নাভিবিন্দুগামী একটি জ্যা, নাভিবিন্দু S এবং $AS=l_1$ ও $BS=l_2$.

প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{2}{l}$.

যেহেতু AB একটি নাভিবিন্দুগামী জ্যা, সুতরাং A-এর ভেক্টরকোণ θ হইলে, B-র ভেক্টর কোণ $\pi+\theta$. এখানে যেহেতু $AS=l_1$ এবং $BS=l_2$, সুতরাং A ও B-র পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (l_1, θ) ও $(l_2, \pi+\theta)$.

$$\therefore\ \frac{l}{l_1}=1+e\cos\theta$$

এবং $\frac{l}{l_2}=1+e\cos(\pi+\theta)=1-e\cos\theta$

$$\therefore\ \frac{l}{l_1}+\frac{l}{l_2}=2,\quad \text{বা,}\quad \frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{2}{l}.$$

প্রশ্নমালা

1. প্রমাণ কর যে,

$r(\cos\theta+\sin\theta)=1$, $r(\cos\theta+\sin\theta)=-1$,

$r(-\cos\theta+\sin\theta)=1$ এবং $r(\cos\theta-\sin\theta)=-1$.

সরলরেখা চারিটি একটি বর্গক্ষেত্র] উৎপন্ন করে এবং এই বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{2}$.

2. প্রমাণ কর যে, (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2) দুইটি বিন্দু A ও B-র পোলার স্থানাঙ্ক হইলে, $\overrightarrow{AB}$ সরলরেখার পোলার সমীকরণ

$$\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{r}=\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{r_1}-\frac{\sin(\nu-\theta_1)}{r_2}$$

3. একটি গতিশীল সরলরেখা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O-র ভিতর দিয়া যায় এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। গতিশীল সরলরেখার P এরূপ একটি বিন্দু যে,

$$\frac{2}{OP}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$$

প্রমাণ কর যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা।

4. প্রমাণ কর যে,

$r=a\cos\theta+b\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},\ \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

5. প্রমাণ কর যে $r^2+2(g\cos\theta-f\sin\theta)r+c=0$ বৃত্তের মূল-বিন্দুগামী ব্যাসসমূহের মধ্যবিন্দুগুলি সঞ্চারপথ,

$$r+g\cos\theta+f\sin\theta=0.$$

6. প্রমাণ কর যে কোন কনিকের নাভিবিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ অপর একটি কনিক।

7. একটি অধিবৃত্তের নাভি S এবং P ও Q বিন্দুদ্বয় অধিবৃত্তের স্পর্শক দুইটি T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, $ST^2=SP.SQ$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 0

1. (i) সেট্ নয় ; (ii) সেট্ ; (iii) সেট্ ; (iv) সেট নয়।
2. (iii) 2 ; 3. না ; 5. {o}. 6. 37. 7. −5 ; 8, −8.

অনুশীলনী IA

1. (i) দ্বিতীয় পাদ, (ii) চতুর্থ, (iii) প্রথম 2. ক্রমিক।
2. (ii) (7, −6) সত্য, 4. অসত্য।

অনুশীলনী IB

1. (*a*) $\left(13, \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$; (*b*) $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$; (*c*) $(5, \tan^{-1}\frac{3}{4})$

2. (*a*) $(-1, -\sqrt{3})$ (*b*) $(a, \sqrt{3}a)$ (*c*) $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(*d*) $(0, a)$.

4. $\left(\frac{3a}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

অনুশীলনী IC.

1. (i) $x'^2=4y'$; (ii) $2x'^2+3y'^2-12x'+9y'+14=0$.
2. $x'^2+y'^2+4x'+3y'+7=0$. 3. $x'^2+2cx'+y'^2=0$.

অনুশীলনী ID

1. (i) 13 ; (ii) 5 ; (iii) $4\sqrt{13}$; (iv) 10 ;
(v) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. (vi) a', (vii) 3.

2. (*a*) $\sqrt{10}$; (*b*) 25 ; (*c*) 13 ; (*d*) 10
(*e*) $\sqrt{m^2+n^2}$ (*f*) $2\sqrt{b^2+d^2}$ (*g*) $\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)$
(*h*) $2\sqrt{a^2+b^2}$. (*i*) $\sqrt{7}$ (*j*) $\sqrt{109}$.

অনুশীলনী IE

1. (i) $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$; (ii) $(2, -1)$; (iii) $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$;

2. (a) $(\frac{12}{7}, \frac{2}{7})$; (b) $(0, -\frac{11}{5})$; $(-11, 16)$;

(d) $(9, 8)$. 3. $(\frac{13}{3}, \frac{4}{3})$; $\left(\frac{3a+4b+bc}{a+b+c}, \frac{-4a+7b+c}{a+b+c}\right)$

যেখানে $a=\sqrt{122}$, $b=\sqrt{40}$, $c=\sqrt{44}$. 4. $\sqrt{41}$, $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

অনুশীলনী IF

1. (i) 11 ; (ii) $8\frac{1}{2}$; (iii) $22\frac{1}{2}$; (iv) -3 ;

(v) $\frac{1}{2}\sin\theta$; (vi) 0 ; (vii) $112\frac{1}{2}$; (viii) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

[প্রত্যেকটি বর্গ একক]

3. 10 বা -2. 4. -6.

প্রশ্নমালা 1

1. $(3, 2\frac{2}{3})$; 2. (i) $4:5$, (ii) $3:2$ (বহিঃস্থভাবে) ;

3. 5 বা -1 ; 4. 9 বা -3 ; 5. 7 বা 17 ; 6. $(8, 3)$; 13 একক

8. $4\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্য একক, প্রশ্নে $B(-3, -5)$, $C(-5, -3)$ পড়।

18. 9·5 বর্গ একক, $\frac{9}{10}\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্য একক ;

19. $(\frac{3}{2}, 5)$; 20, $(3, 4)$; 21. $3x+y=4$; 22. $(3, 4)$;

23. $3\sqrt{2}$, 3, 3 দৈর্ঘ্য একক ; 32. $1\frac{3}{8}$.

প্রশ্নমালা 2

1. $2x-y=4$; 2. $6x+8y=25$. 3. $2x-3=0$.

4. $2y-3x=4$; 5. $3x^2+4y^2-16y-16x+32=0$;

6. $y^2=2x-1$; 7. $x^2+y^2-10x-24y=0$;

8. $x^2+y^2=k^2-a^2$; 9. $2x-y+8=0$;

10. $x+y=k$, 11. $\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}=1$.

অনুশীলনী IIIA

1. 3 ; 2. $\frac{1}{7}$; $\frac{c}{b}$ 4 -3 ; (v) 0.

অনুশীলনী IIIB

1. $y+x\sqrt{3}+2=0$,

2. (i) $-\frac{3}{2}, (3, 0)$; (ii) $3, (-2, 0)$; (iii) $-1, (0, 0)$;
(iv) $2, (-\frac{5}{2}, 0)$; (v) $-\cot\theta, (-r\sin\theta, 0)$.

3. (i) $9x+8y=29$; (ii) $bx-ay+ab=0$.

(iii) $\frac{x}{c}\cos\frac{C+D}{2}+\frac{y}{d}\sin\frac{C+D}{2}=\cos\frac{C-D}{2}$;

(iv) $2x-(p_1+p_2)y+2\alpha p_1p_2=0$

(v) $\frac{x}{h}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{y}{k}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

(vi) $3x+y=5$.

অনুশীলনী IIIC

1. (i) $2x+3y=6$; (ii) $4x+5y+20=0$;
(iii) $3x-5y=9$; (iv) $5x-9y+13=0$,
(v) $bx+ay=a$; (vi) $ax\cos\alpha+by\sec\alpha=b$.

2. (i) -3 এবং $\frac{2}{3}$; (ii) $-\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$;

(iii) $-r\operatorname{cosec}\theta$ এবং $r\sec\theta$,

3. (i) $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ এবং $\left(0, \frac{5}{3}\right)$; (ii) $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ এবং $\left(0, \frac{c}{b}\right)$

(iii) $(p\sec\alpha, 0)$ এবং $(0, p\operatorname{cosec}\alpha)$.

অনুশীলনী IIID

1. (i) $x\cos 30^\circ+y\sin 30^\circ=4$;
(ii) $x\cos 135^\circ+y\sin 135^\circ=7$;
(iii) $x\cos 225^\circ+y\sin 225^\circ=2\sqrt{2}$;
(iv) $-\frac{6}{\sqrt{205}}x+\frac{13}{\sqrt{205}}y=\frac{19}{\sqrt{205}}$.

2. 1; (ii) 2; (iii) $\frac{7}{\sqrt{13}}$;

(iv) $\frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}}$.

প্রশ্নমালা 3

1. $y=\sqrt{3}x \pm 1$. 2. $\sqrt{3}x+y=10$. 3. $x+y+2=0$.
4. $x-y+1=0$. 5. $x-y+1=0$, (1, 2)
6 $3x-2y+30=0$. 7. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$. 8. $x+y=5$.
9. $9x-2y+1=0$. 10. $2x-3y=0$ এবং $8x-3y=0$.
11. $3x+2y-12=0$ বা, $x+y=5$. 12. $x+10y-28=0$
14. $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$. 15. কোণ $=\tan^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$, y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সহিত $\frac{3}{5}$; 16. $2\sqrt{10}$; 17. 2, $\frac{1}{8}$.

অনুশীলনী IIIE.

1. (i) $\tan^{-1}\frac{1}{7}$ (ii) 45°; (iii) 45°;

(iv) $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{2ab}$; (v) 90°;

2. $y=7$; 3. $x+3=0$; 4. (a) $4x-3y+3=0$;
(b) $3x+4y-25=0$.

অনুশীলনী IIIF

1. (i) $(-\frac{11}{29}, \frac{41}{29})$; (ii) $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$, (iii) $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$
$9x+9y=40$; (iv) $\left(p\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2},\right.$
$\left.p\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sec\frac{\theta-\phi}{2}\right)$.

2. (a) $(-2, 1)$; (b) $(13, 7)$; (c) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$;

(d) $\left(\frac{d}{a+b+c}, \frac{d}{a+b+c}\right)$; (e) $\left(\frac{15}{17}, \frac{31}{17}\right)$

3. $3x-y=7$; $8\frac{1}{6}$ বর্গ একক.

প্রশ্নমালা 4

1. (a) $3x+y-5=0$ (b) $3x+7y=0$;
   (c) $12x+18y+11=0$; (d) $x+3y-1=0$;
   (c) $x+y+2=0$; (f) $x=y$;
   (g) $119x+102y-125=0$; (h) $73x+69y=85$.
2. (a) -1 ; (b) 0.
6. $121y-88x=371$. 8. $\left(\frac{b}{3}, \frac{b}{3}\right)$.
10. (a) $3x-y=7$ এবং $x+3y=9$;
    (b) $x=7$ এবং $x+\sqrt{3}y=7+9\sqrt{3}$;
    (c) $x=0$ এবং $y+\sqrt{3}x=0$ (d) $y=x \tan \theta$.
11. $x=3$; $y=4$, $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক
12. $9x-7y-1=0$ এবং $7x+9y-73=0$.
13. $7x-y+19=0$ এবং $x-5y+27=0$.
14. (a) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$. (b) $x-\sqrt{3}y=\pm 10$; 10 এবং $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.
15. (a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{7\sqrt{5}}{3}$ 16. $5x-12y+16=0$; 13.
17. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(7, \sqrt{3})$ এবং $(3, \sqrt{3})$; $7\sqrt{3}$ বর্গ একক।
18. $x(b-b')-y(a-a')=a'b-ab'$;
    $x(b-b')+y(a-a')=ab-a'b'$.
20. $12x-5y+61=0$ এবং $12x-5y+100=0$;
    অথবা, $12x-5y+22=0$.

প্রশ্নমালা 5

1. (*a*) মূলবিন্দুর দিকে ; (*b*) মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে ;

2. (*a*) বিপরীত দিকে ; (*b*) বিপরীত দিকে।

2. (*a*) $\frac{17\sqrt{13}}{13}$ (*b*) $\frac{3}{13}$ 4. $\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{21}{\sqrt{29}}, \frac{21}{\sqrt{29}}$.

7. $x-2y+11=0$. 8. $(3, 0)$. 9. $(-\frac{13}{5}, \frac{9}{5})$.

10. (*a*) $224x-128y+83=0$ এবং $16x+28y-203=0$.

(*b*) $y-x+12=0$ এবং $7y+7x-36=0$.

(*c*) $x(\cos\theta-\cos\phi)+y(\sin\theta-\sin\phi)=p_1-p_2$;

এবং $x(\cos\theta+\cos\theta)+y(\sin\theta+\sin\phi)=p_1+p_2$.

11. $\frac{11}{5}$ (*b*) $\frac{c_1-c_2}{\sqrt{1+m^2}}$ 12. $\left\{\frac{a}{b}(b\pm\sqrt{a^2+b^2}), 0\right\}$.

13. $y=a$ এবং $4x-3y+3a=0$.

14. $(3l-2m+n)^2=25(l^2+m^2)$. 16. $6x-4y-3=0$.

17. (i) $x=y$, $x+y-2=0$ (প্রথম) (ii) $x=6$, $y=2$ (দ্বিতীয়)

(iii) $x(\cos\theta-\cos\phi)+y(\sin\theta-\sin\phi)=p-q$.

$x(\cos\theta+\cos\phi)+y(\sin\theta+\sin\phi)=p+q$.

18. (*a*) $7x-9y+2=0$. (*b*) $4x+7y+11=0$.

20. $7x+y-18=0$. 21. $(-4, 3)$;

22. (*a*) $y=6$ এবং $4x+3y=30$.

(*b*) $4x-3y=25$ এবং $3x+4y=25$.

24. (*a*) $(\frac{11}{8}, -\frac{10}{3})$, (*b*) $(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$. প্রশ্নে $(0, 2)$ স্থলে $(2, 0)$ পড়।

25. $4x-3y+5=0$.

26. $(4+\sqrt{10})x+(2+\sqrt{10})y-12+4\sqrt{10}$;
$(2\sqrt{34}-3\sqrt{5})x+(\sqrt{34}-5\sqrt{5})y=6\sqrt{34}-15\sqrt{5}$.
$x(3+\sqrt{17})+y(5+\sqrt{17})=15+4\sqrt{17}$

27. (*a*) $(\frac{5}{2}, 11)$, (*b*) $x+2y+97=0$, $7x-9y-310=0$, $11x-3y-8=0$, $(-11, -43)$.

অনুশীলনী IVA.

1. (i) $x^2+y^2=9$; (ii) $x^2+y^2+6y-16=0$;

(iii) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$;

(iv) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$;

(v) $x^2+y^2+6x-4y+7=0$;

(vi) $x^2+y^2-6x-14y+33=0$.

2. $x^2+y^2+2x+4y=0$. 3. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

অনুশীলনী IVB.

1. (i) $(0, 0), 2$; (ii) $(0, 0), \sqrt{5}$; (iii) $(-1, 2), \sqrt{2}$;

(iv) $(2, 3), 5$; (v) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \frac{5\sqrt{2}}{4}$; (vi) $(3, -7), 5$.

2. (i) হাঁ ; (ii) হাঁ ; (iii) হাঁ ; (iv) না ; (v) কাল্পনিকবৃত্ত।

3. (i) $x^2+y^2-4x-5y=0$;

(ii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$;

(iii) $x^2+y^2-5x-y+4=0$;

(iv) $x^2+y^2-10x-4y+19=0$;

(v) $x^2+y^2+5x-5y=0$; (vi) $(x-3)^2+(y+1)^2=5^2$;

কেন্দ্র $(3, -1)$ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 একক।

4. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$. (প্রশ্নে $(2, -6)$ স্থলে $(1, -6)$ পড়।

5. $x^2+y^2+2x+2y-23=0$,

6. $x^2+y^2-4x-3y=0$.

7. $x^2+y^2-6x-8y=0$.

8. $x^2+y^2+2x+4y-45=0$.

9. $2x^2+2y^2+5x-6y+7=0$.

10. $x^2+y^2-4x+6y-87=0$

11. $x^2+y^2\pm2\sqrt{21}y-4=0$.

অনুশীলনী IVC.

1. (i) ভিতরে (ii) বাহিরে

2. (i) বাহিরে (ii) ভিতরে

3. (i) বাহিরে (ii) বাহিরে

অনুশীলনী IVD.

1. (i) $x^2+y^2-4x-5y=0$;
   (ii) $x^2+y^2-2x-10y+16=0$;
   (iii) $x^2+y^2-(a-b)x-(a+b)y=0$.
2. $60x-60y-7=0$. 3. $x^2+y^2=a^2+b^2$,
   $x^2+y^2-2(a+b)x+2(a-b)y+a^2+b^2=0$.

প্রশ্নমালা 6

1. (*b*) $x^2+y^2-10x-10y+25=0$.
2. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.
4. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$.
5. $x-2y+2=0$, $y=0$, $x+y=1$; $x^2+y^2=x+y$.
6. $x^2+y^2+6x-4y-12=0$.
7. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.
8. $x^2+y^2\pm2y\sqrt{a^2-b^2}-b^2=0$.
9. $b(x^2+y^2-a^2)=x(b^2+h^2-a^2)$. 10. (1, 1) ও (3, 3).
11. $2x^2+2y^2-16x-11y+24=0$.

অনুশীলনী VA.

1. (i) 14, $(\frac{7}{2}, 0)$; (ii) 5, $(\frac{5}{4}, 0)$; (iii) $\frac{7}{2}$, $(\frac{7}{8}, 0)$;
   (iv) 2, $(-\frac{1}{2}, 0)$; (v) 4, (0, 1) ; (vi) 8, (0, −2) ;
   (vii) $\frac{7}{2}$, $(0, -\frac{7}{8})$; (viii) a, $\left(\frac{a^2-4b}{4a}, 0\right)$,
2. (*a*) (0, 0), (0, 2) ; (*b*) $(2, -5\frac{1}{2})$, (2, −5).
3. $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{8}, 0)$. 4. $4x+13=0$, $(-\frac{13}{4}, \frac{13}{2})$ এবং $(-\frac{13}{4}, -\frac{13}{2})$.
5. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac-1}{4a}\right)$; $\frac{1}{a}$.
6. $\frac{7}{5}$, $(\frac{7}{20}, 0)$. 7. $\frac{4}{3}$, $(\frac{1}{3}, 0)$.
8. $\frac{4}{3}$, $(\frac{1}{3}, 0)$, ছেদবিন্দু (0, 0) এবং (3, 2).
৯. ছেদবিন্দুদ্বয় $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$, নাভি $(\frac{3}{10}, 0)$.

10. $(x+2y)^2-42x+26y+56=0.$ 12. $x^2=12y.$

13. $x^2-4xy+4y^2+4x+2y-1=0$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

14. $x^2+y^2=4.$ 15. নাভিলম্বের $\frac{5}{8}$.

অনুশীলনী VB.

1. (i) $\frac{\sqrt{7}}{4}, (\pm\sqrt{7}, 0), \frac{9}{2}$; (ii) $\frac{1}{2}, (\pm 1, 0), 3$;

(iii) $\frac{3}{5}, (0, \pm 3), 6\frac{2}{3}.$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\pm\frac{5}{\sqrt{3}}, 0\right), \frac{8}{3}$; (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right), \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. পরাক্ষ $=8$, উপাক্ষ $=4\sqrt{3}$, $e=\frac{1}{2}$, নাভিদ্বয় $=(-2, 0), 2, 0)$

3. $\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, (0, 5), (0, 1)$

4. $(3, 2), \frac{\sqrt{5}}{3}$; $(3-\sqrt{5}, 2), (3+\sqrt{5}, 2)$;

$x=3-\frac{9}{\sqrt{5}}, \ x=3+\frac{9}{\sqrt{5}}.$ 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, স্থানাঙ্ক $(\pm 1, 0)$ 7. $\frac{4}{5}, (\pm 4, 0)$

8. (i) $9x^2+16y^2=144$; (ii) $x^2+2y^2=9$

(iii) $16x^2+24y^2=81$; (iv) $2x^2+3y^2=35$

9. (i) $14x^2+11y^2-4xy-58x-26y+74=0$;

(ii) $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0.$

10. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

11. $3x^2+5y^2=32.$ 12. $3x^2+5y^2=32, \sqrt{\frac{2}{5}}.$

13. $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{3}=1, \ \sqrt{\frac{2}{5}}$ 14. $\left.\begin{array}{l} y=x \text{ ও } y=-\frac{5}{8}x \\ y=\frac{5}{8}x \text{ ও } y=-x \end{array}\right\}$

15. $5x^2+5y^2-76x-88y-2xy+506=0.$

16 $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$ 17. পরাক্ষ $=30$ই, উপাক্ষ $=24$ই.

অনুশীলনী VC.

1. (i) $9x^2-16y^2=36$ (ii) $25x^2-144y^2=900$

(iii) $65x^2-36y^2=441$ (iv) $x^2-y^2=32$.

2. (a) $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$; (b) $e=\frac{13}{12}$,

$(13, 0), (-13, 0)$.

3. (i) $(\pm 1, 0)$, $x=\pm\frac{1}{4}$, 2

(ii) $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{2}-3, 2\right)$, $x\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+3=0$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$

4. (i) $5x+3\sqrt{5}y=27$;

5. $4x^2+31y^2+36xy+8x+66y-41=0$.

6. $144x^2-25y^2=900$.

প্রশ্নমালা 7

3. $2\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্য একক। 7. $x^2-y^2=a^2-b^2$.

8. (b) $\left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$

অনুশীলনী VIA.

1. $(-1, -1), (-1, -1)$ 2. $(1, 2), (\frac{9}{4}, 3)$

3. $\frac{3}{5}\sqrt{1600-(c+9)^2}$. 4. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$.

5. $x^2+y^2-4x-4y+3=0$;

$x^2+y^2+2x-2y=0$.

অনুশীলনী VIB.

1. $(-1, 1)$. 2. $(\frac{9}{4}, 3)$ 3. $x-3y+2=0$;

$x-3y=2$; $(-1, \frac{1}{3})$; $(1, -\frac{1}{3})$ 4. $(am^2, -2am)$.

5. 3.

অনুশীলনী VIC.

1. (i) $12x-5y+96=0$, (ii) $4y-x=24$,
(iii) $y=x, y+x=0$, (iv) $x=\pm\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{2}$.
2. $3x+4y+15=0, 3x+4y-15=0$.
3. স্পর্শবিন্দু $(\frac{5}{3}, 10)$, নাভি $(15, 0)$. 4. $(3a, 2\sqrt{3}a)$.
5. $\pm 1, (-1, 2)\ (1, 2)$ 6. $1\frac{4}{5}$.
7. (i) $am^2=ln$. (ii) $a^2l-b^2m^2=n^2$.

অনুশীলনী VID

1. (i) $x+3y=33$, (ii) $y+tx=2at+at^3$.
(iii) $9x+3\sqrt{13}y=13\sqrt{13}$, (iv) উপাক্ষ.
2. (i) $al^3+2alm=m^2n$
(ii) $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{n}\right)^2$
(iii) $gl+fm+n=0$, 3. $2x-4y=9$: $(\frac{1}{2}, -2)$
5. $5\sqrt{5}$.

অনুশীলনী VIE

1. (i) $5x\pm 12y=65$
(ii) $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{31}}x+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{31}}$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{31}}x-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{31}}$
(iii) $y=x+a$, $x+y+a=0$
(iv) $x(4-\sqrt{15})+y(4+\sqrt{15})=8$;
$x(4+\sqrt{15})+y(4-\sqrt{15})=8$.
2. $y=x-2$, $x+2y+1=0$, $\tan^{-1} 3$.
3. $(x^2+y^2-2a^2)^2=(4a^2x^2+y^2-a^2)$.

অনুশীলনী VIF

1. (i) $y-4x=12$, (ii) $\sqrt{3}x+2y=2\sqrt{3}$, (iii) $x+y=16$
2. $(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5})$.

অনুশীলনী VIG

1. (i) $y-3x+7=0$, 2. $9x=10y+19$ 4. $(2, \frac{1}{8})$.
5. (i) $4x^2+5y^2=4x+5y$ (ii) $4x^2+5y^2=16x-25y$.

প্রশ্নমালা 8

1. $x^2+y^2=hx+ky$.
2. (i) $y=mx\pm a\sqrt{1+m}$;
(ii) $x+my=\pm a\sqrt{1+m^2}$;
(iii) $x-y=\pm\sqrt{2}a$.
4. $x^2+y^2-2h(x+y-h)=0$,
যেখানে $h=\dfrac{b+a-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
6. $x^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}$.
10. $y^2-\beta y=2a(a-\alpha)$ 12. $(\frac{1}{2}, 2)$ 13. $2x+3y+36=0$.
14. $(3a, \pm 2\sqrt{3}a)$ 15. $x+y=5$. 16. $\frac{25}{4}$.
22. $2x^2+2y^2-16x-11y+24=0$.
31. $2(x^2+y^2)-2cx+c^2-a^2=0$. 33. $y^2-4ax=(x+a)^2$.
35. $(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=4\cot^2\theta\,(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$.
36. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. 38. $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=4$.

উচ্চমাধ্যমিক পরীক্ষা ১৯৭৮-এর প্রশ্নপত্র

MATHEMATICS

(First Paper)

Group—A

1. (*a*) যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, x^2-y^2 ধ্রুবক।

(*b*) যদি x, y-এর সহিত সরল ভেদে এবং y, z এর সহিত বিপরীত অর্থাৎ ব্যস্ত ভেদে থাকে, তাহা হইলে নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য ? যুক্তি দিয়া লিখ।

(i) x, z-এর সহিত সরলভেদে থাকে ;

(ii) x, z-এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকে।

(*c*) (i) যদি α এবং β, $x(x-3)=4$-এর দুইটি বীজ হয়, তাহা হইলে, $\alpha^2+\beta^2$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

(ii) যদি $2x^2-5x+k=0$ এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয়, তবে k এর মান বাহির কর।

2. (*a*) একটি শ্রেণী সমান্তর প্রগতিতে আছে। উহার প্রতি পদকে তিনগুণ করিয়া যে নূতন শ্রেণী হইবে তাহাও কি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে ? যুক্তিসহ উত্তর দাও।

(*b*) একটি সমান্তর শ্রেণীর 12-তম পদ -13 এবং প্রথম চারটি পদের যোগফল 24 হইলে উহার প্রথম 10টি পদের যোগফল বাহির কর।

(*c*) $A+iB$ (A ও B বাস্তব সংখ্যা) এই আকারে প্রকাশ কর : $\left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3$.

3. (*a*) People এই শব্দটির অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ পাওয়া যাইবে, যাহাদের মধ্যে দুটি P পাশাপাশি থাকিবে না ?

(*b*) ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$ এই সূত্রটি প্রমাণ কর।

(*c*) বর্গমূল নির্ণয় কর : $5+2\sqrt{6}$.

4. (a) ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে "দ্বিপদ উপপাদ্যের" উক্তি লিখ।

(b) $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যে সাধারণ পদটি লিখ।
(n অখণ্ড ধনাত্মক রাশি)

(c) $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

5. (a) e^x এর শ্রেণী বিবেচনা করিয়া প্রমাণ কর :

$$z=1+\log_e z+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 2}\right)^2+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 3}\right)^3+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(b) যদি $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\infty$ হয়, তাহা হইলে প্রয়োজনীয় সর্তে, যাহা তোমাকে বলিতে হইবে, প্রমাণ কর :

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\infty$$।

(c) বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা লগ্নী করিয়া 18 বৎসরে সুদে মূলে মোট 10,000 টাকা পাওয়া যাইবে ?

[প্রদত্ত : $\log 10{\cdot}4=1{\cdot}0170333$, $\log 4936{\cdot}29=3{\cdot}6934006$.]

Group—B

6. (a) দেখাও যে : $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(b) একটি ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণকে দুই ভাগে ভাগ করা হইয়াছে যাহাদের tangents হইতেছে ^{1} ও $\frac{1}{3}$. মূল কোণটি কত বাহির কর।

(c) প্রমাণ কর : $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$

7. (a) $\tan 2A$ কে $\tan A$-র সাপেক্ষে প্রকাশ কর।

(b) যদি $\tan x=\frac{b}{a}$ হয়, তাহা হইলে $a\cos 2x+b\sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) $\sin 30^\circ$ এর মান হইতে $\sin 15^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

8. (a) প্রমাণ কর : $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

(b) সাধারণ মান বাহির কর : $\sin 2\theta=\cos\theta$.

(c) কোন ত্রিভুজে $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হইলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

9. (*a*) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ এর ক্ষেত্রে $\cos 2\theta$-র লেখ অঙ্কন কর।

যখন $\cos 2\theta=\frac{1}{2}$ তখন ঐ লেখ হইতে θ নির্ণয় কর।

(*b*) নিম্নলিখিত উক্তিটি কি সত্য হইতে পারে? যুক্তি দিয়া লিখ।

$3x+4=6-5\tan 2x$ সমীকরণটির একটি সমাধান $x=\frac{\pi}{4}$.

(*c*) $x=-\frac{\pi}{2}$ এবং $x=0$-র মধ্যে $\sin x-\cos x=0$ সমীকরণটির কোন সমাধান পাওয়া কি সম্ভব? যুক্তি দিয়া লিখ।

10. (*a*) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 50, 36 এবং 28; বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 19=1\cdot2787536$, $\log 29=1\cdot423980$.

$L\tan 51°0'=10\cdot0916308$, $L\tan 51°1'=10\cdot0918891$.

(*b*) কোন ত্রিভুজে নিম্নলিখিত ফলটি কি শুদ্ধ?

$a=b\cos C-c\cos B$.

যদি শুদ্ধ না হয়, তাহা হইলে শুদ্ধ ফলটি কি?

(*c*) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত $\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$ ত্রিভুজটির কোণগুলির সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

GROUP C

11. (*a*) OX ও OY কোন লম্ব-কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। আবার O এবং OX কোন মেরু স্থানাঙ্কের যথাক্রমে মূলবিন্দু ও মূল রেখা।

(i) যদি P বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক (2, 30°) হয়, তবে উহার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) যদি P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (0, 2) হয়, তবে উহার মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(iii) কোন সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $y=x\tan\alpha$ হইলে উহার মেরু-সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) A ও B দুইটি বিন্দু যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 3)$ ও $(2,4)$; P বিন্দু এমনভাবে চলমান যে $PA:PB=3:2$; P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ইহা কিরূপ বক্ররেখা নির্দেশ করে?

12. (*a*) $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও $y - -\frac{5}{8}x$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) $3x-4y-5=0$ ও $4x+3y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি ?

13 (*a*) পরীক্ষা করিয়া দেখাও যে, $x^2+y^2-x-4y+7=0$ সমীকরণটি কোন বৃত্তকে বুঝায় কিনা।

(*b*) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি ঠিক এবং কেন ?

"(2, 1) বিন্দুটি $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ বৃত্তের

(i) উপরে ; (ii) ভিতরে ; (iii) বাহিরে অবস্থিত।"

(*c*) প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4=0$ এবং $2x^2+2y^2-11=0$ বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়।

14. (*a*) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত (3, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) কত ? (3, 0) বিন্দুতে এই পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. (*a*) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য ?

"কোন অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরল রেখা ইহাকে

(i) একটি মাত্র বিন্দুতে, (ii) দুইটি বিন্দুতে

(iii) দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করে।"

(*b*) (1, 2) বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*c*) $2x+3y=1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক। অধিবৃত্তটির নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উচ্চমাধ্যমিক পরীক্ষা, ১৯৭৮-এর প্রশ্নপত্রের সমাধান

GROUP A

1. (a) প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{y}=K(x=y)$ এবং $\frac{y}{x}=K'(x+y)$

$\therefore \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}=KK'(x+y)(x-y)=KK'(x^2-y^2)$

বা, $x^2-y^2=\frac{1}{KK'}=$ ধ্রুবক।

(b) $x=Ky$ এবং $y=K'\frac{1}{z}$ $\quad\therefore x=K.K'.\frac{1}{z}$ $\quad\therefore x \propto \frac{1}{z}$.

(c) (i) $x(x-3)=4$ বা, $x^2-3x-4=0$

$\therefore \alpha+\beta=3$ এবং $\alpha\beta=-4$.

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9+8=17.$

(ii) মনে কর, বীজদ্বয় α ও 2α.

$\therefore 3\alpha=\frac{5}{2}$ $\therefore \alpha=\frac{5}{6}$ বা, $\alpha^2=\frac{25}{36}$

এবং $2\alpha^2=\frac{K}{2}$, বা, $\alpha^2=\frac{K}{4}$

সুতরাং $\frac{K}{4}=\frac{25}{36}$ বা, $K=\frac{25}{9}$.

2. (a) § 2·4 দ্রষ্টব্য (4) দেখ,

(b) মনে কর, প্রথমপদ a ও সাধারণ অন্তর b.

$a+11b=-13$ এবং $\frac{4}{2}(2a+3b)=24$

বা, $2a+3b=12$

সমাধান করিয়া পাই, $a=9,\ b=-2.$

সুতরাং $S_{10}=\frac{10}{2}\{2.9+(10-1)(-2)\}$

$=5(18-18)=0.$

(c) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}=\frac{1+3i+3i^2+i^3}{1-3i+3i^2-i^3}=\frac{1+3i-3-i}{1-3i-3+i}=\frac{-2+2i}{-2-2i}$

$=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{i^2+1-2i}{1-i^2}$

$=\frac{-1+1-2i}{1+1}=-\frac{2i}{2}=-i=0+i(-1)$

3. (*a*) কোনরূপ শর্ত ভিন্ন বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2\lfloor 2}=180$

যখন P দুইটি একত্রে থাকে, তখন উহাদের একটি অক্ষর ধরিয়া বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}=60.$

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=180-60=120.$

(*b*) § 7·17 দেখ।

(*c*) $5+2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{2}.\sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$\therefore \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

4. (*a*) § 8·2 দেখ। (*b*) § 8·5 দেখ।

(*c*) $t_{r+1}=9_{C_r}(2x)^{9-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r=9_{C_r}\,2^{9-r}.x^{9-3r}.3^{-r}.$

সুতরাং এই পদটি x-নিরপেক্ষ হইলে $9-3r=0$ বা, $r=3.$

সুতরাং চতুর্থ পদটি x নিরপেক্ষ এবং পদটি হইল $9_{C_3}2^6.3^{-3}=199\frac{1}{9}.$

5. (*a*) $z=e^{\log_e z}=1+\log_e z+\frac{(\log_e z)^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e z)^3}{\lfloor 3}+\cdots$ to ∞.

(*b*) উদাহরণমালা 11 উদা 16 দেখ।

(*c*) মনে কর, নির্ণেয় আসল $=$ P টাকা

$\therefore \quad 10{,}000=P(1+\frac{4}{100})^{18}=P(1\cdot04)^{18}$

$\therefore \quad \log 10{,}000=\log P+18\log 1\cdot04$

বা, $4=\log P-18\times0\cdot0170333$

$=\log P+\cdot3065994$

$\therefore \quad \log P=3\cdot693406=\log 4936\cdot29$

সুতরাং নির্ণেয় আসল $=4936$ টা, 29 পয়সা।

Group—B

6. (*a*) উদাহরণমালা 7 উদা. 1 দেখ।

(*b*) মনে কর, নির্ণেয় কোণ $\alpha+\beta$ এবং $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ও $\tan\beta=\frac{1}{3}.$

$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$

$\therefore \quad \alpha+\beta=45^\circ.$

(c) $\cot 2A + \tan A = \dfrac{\cos 2A}{\sin 2A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\cos 2A \cos A + \sin 2A \sin A}{\sin 2A \cos A} = \frac{\cos (2A - A)}{\sin 2A \cos A}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin 2A \cos A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

7. (a) § 9·1 (b) দেখ।

(b) উদাহরণমালা 9 উদা 11 দেখ (এখানে $x=\theta$, $a=x$, $b=y$)।

(c) § 10·5 দেখ। $A=30^\circ$ মনে কর।

৪. (a) § 12·9 (ii) দেখ।

(b) $\sin 2\theta = \cos \theta$

বা, $2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$

বা, $\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$, $\therefore$ $\cos \theta = 0$ বা, $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

[$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$]

(c) $(a^2+b^2) \sin (A-B) = (a^2-b^2) \sin (A+B)$

বা, $(a^2+b^2)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$
$= (a^2-b^2)(\sin A \cos B + \cos A \sin B)$

বা, $\sin A \cos B(a^2+b^2-a^2+b^2)$
$- \cos A \sin B(a^2+b^2+a^2-b^2) = 0$

বা, $\dfrac{a}{2R} \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.\ 2b^2 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\ \dfrac{b}{2R} 2a^2 = 0$

বা, $b^2(c^2+a^2-b^2) - (b^2+c^2-a^2)a^2 = 0$

বা, $b^2c^2 - b^4 - c^2a^2 + a^4 = 0$

বা, $(a^2+b^2)(a^2-b^2) - c^2(a^2-b^2) = 0$

বা, $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = 0$

$\therefore$ $a^2-b^2=0$ বা, $a^2+b^2-c^2=0$

অর্থাৎ $a=b$ বা, $a^2+b^2=c^2$

সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

9. (a) $\cos 2x$-র লেখ-র জন্য উদাহরণমালা 17 উদা. 5 দেখ।

$\theta = \frac{\pi}{3}$.

(*b*) বিবৃতিটি সত্য নয়।

কারণ, এইক্ষেত্রে $\tan 2x = \tan 2\frac{\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{2}$, অসংজ্ঞেয়।

(*c*) সম্ভব নয়। কারণ, $-\frac{\pi}{2}$ ও 0-র মধ্যে $\sin x$ ঋণাত্মক এবং $\cos x$ ধনাত্মক বা, $-\cos x$ ঋণাত্মক। এখন, দুইটি ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল শূন্য হইতে পারে।

যদি $x = -\frac{\pi}{2}$ হয়, $\sin x - \cos x = -1 - 0 = -1 \neq 0$

এবং $x = 0$ হইলে, $\sin x - \cos x = 0 - 1 = -1 \neq 0$

10. (*a*) মনে কর ত্রিভুজটি ABC এবং $a = 50$, $b = 36$ এবং $c = 28$.

এক্ষণে $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(57-36)(57-28)}{57(57-50)}}$

$$= \sqrt{\frac{21.29}{57.7}} = \sqrt{\frac{29}{19}}$$

$\therefore$ $L\tan\frac{A}{2} = 10 + \frac{1}{2}(\log 29 - \log 19)$

$= 10 + \frac{1}{2}(1{\cdot}4623980 - 1{\cdot}2787536)$

$= 10 + \frac{{\cdot}1836444}{2} = 10{\cdot}0918222.$

$L\tan 51°1' = 10{\cdot}0918891$
$L\tan 51°0' = 10{\cdot}0916308$

$\therefore$ $1' = 60''$ এর জন্য অন্তর ${\cdot}0002583$

মনে কর, $\frac{A}{2} = 51°0'x''$

$\therefore$ $L\tan 51°0'x'' = 10{\cdot}0918222$
$L\tan 51°0' \quad = 10{\cdot}0916308$

$\therefore$ x'' এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0001914$

$\therefore \frac{x}{60} = \frac{1914}{2583}$ $\therefore$ $x = \frac{1914 \times 60}{2583} = 44{\cdot}5''.$

সুতরাং $\frac{A}{2} = 51°0'44{\cdot}5''$ $\therefore$ $A = 102°1'29''$.

(*b*) অশুদ্ধ। শুদ্ধ বিবৃতি : $a = b\cos C + c\cos B$

(*c*) মনে কর, কোণ তিনটি A, B, C.

$\therefore \quad \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \sqrt{2} : 2 : \sqrt{3}+1$

$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$= \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

বা, $\sin 30^\circ : \sin 135^\circ : \sin 75^\circ$.

$\therefore \quad \frac{A}{30^\circ} = \frac{B}{45^\circ} = \frac{C}{105^\circ}$ বা, $\frac{A}{30^\circ} = \frac{B}{135^\circ} = \frac{C}{75^\circ}$

এক্ষণে যেহেতু $A+B+C=180^\circ$.

$\therefore \quad A=30^\circ, B=45^\circ, C=105^\circ$

GROUP C

11. (*a*) (i) $x = 2\cos 30^\circ = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, y = 2\sin 30^\circ = 2.\frac{1}{2} = 1.$

(ii) $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+2^2} = 2.$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{2}{0} = \text{undefined} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

(iii) $y = x \tan \alpha$ বা, $\frac{y}{x} = \tan \alpha$

বা, $\tan \theta = \tan \alpha \quad \therefore \quad \theta = \alpha.$

(*b*) মনে কর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore \quad PA = \sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}\ ; \quad PB = \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

এক্ষণে, $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}} = \frac{3}{2}$

বা, $\frac{(x+5)^2+(y-3)^2}{(x-2)^2+(y-4)^2} = \frac{9}{4}$

বা, $4(x^2+10x+25+y^2-6y+9)$

$= 9(x^2-4x+4+y^2-8y+16)$

বা, $5x^2+5y^2-76x-48y+24=0.$

12. (*a*) $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ—

$x+2y+3+k(3x+4y+7)=0.$

এই সরলরেখার প্রবণতা $(m)=-\dfrac{3k+1}{2+4k}$

সুতরাং এই সরলরেখা $y=-\frac{5}{8}$ সরলরেখার সমান্তরাল হইবে,

যদি $-\dfrac{3k+1}{2+4k}=-\frac{5}{8}$ হয়, বা, $24k+8=10+20k$

বা, $4k=2$ বা, $k=\frac{1}{2}$.

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ

$x+2y+3+\frac{1}{2}(3x+4y+7)=0$

বা, $5x+8y+13=0$.

(b) প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x+3y+2}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

বা, $\dfrac{3x-4y-5}{\sqrt{13}}=\pm\dfrac{4x+3y+2}{5}\cdots(1)$

বা, $15x-20y-25=\pm(4\sqrt{13}x+3\sqrt{13}y+2\sqrt{13})$

অর্থাৎ $(15-4\sqrt{13})x-(20+3\sqrt{13})y-25-2\sqrt{13}=0\cdots(2)$

বা, $(15+4\sqrt{13})x-(20-3\sqrt{13})y-25+2\sqrt{13}=0\cdots(3)$.

এখানে যেহেতু সরলরেখা দুইটির প্রদত্ত সমীকরণের ধ্রুবক পদ দুইটি বিররীত চিহ্নযুক্ত, সুতরাং মূলবিন্দু যে কোণটির অন্তর্গত তাহার সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয়ের জন্য (1)-এ ঋণাত্মক চিহ্নটি লইতে হইবে, সুতরাং নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকটি হইল সমীকরণ-(3) দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাটি।

13. (a) $x^2+y^2-x-4y+7=0$ সমীকরণের x^2-এর সহগ $=y^2$-এর সহগ $\neq 0$ এবং xy-এর সহগ $=0$.

আবার ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2-7}=\sqrt{-2\frac{3}{4}}$ যাহা কাল্পনিক।

সুতরাং সমীকরণটি কোন বৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করে না অথবা একটি কাল্পনিক বৃত্তকে প্রকাশ করে।

দ্রষ্টব্য ঃ যে কোন একটি উত্তরই সত্য।

(b) প্রদত্ত সমীকরণে $x=2$, $y=1$ বসাইয়া পাই,

$x^2+y^2-4x-6y+9=4+1-8-6+9=0$.

সুতরাং (2, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপরে অবস্থিত।

(c) $x^2+y^2-4=0$

বা, $x^2+y^2=4$ বা, $(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$

সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) বিন্দু।

$2x^2+2y^2-11=0$ বা, $x^2+y^2=\frac{11}{2}$.

বা, $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$

সুতরাং এই বৃত্তের কেন্দ্রও (0, 0) বিন্দু।

সুতরাং বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়।

14. (*a*) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ বা, $\frac{2x}{9}+\frac{2y}{4}\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{2x}{9}}{\frac{y}{2}}=-\frac{4x}{9y}.$

$\therefore\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(3,\,2)}=\frac{-12}{18}=-\frac{2}{3}$

সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$

$2x+3y=12.$

(*b*) $4x^2-9y^2=36$ বা, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$

$\therefore\ e=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$

$4x^2-9y^2=36$ বা, $8x-18y\frac{dy}{dx}=0.$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{18y}=\frac{4x}{9y}$ $\therefore\ \left[-\frac{dx}{dy}\right]_{(3,0)}=\left[-\frac{9y}{4y}\right]_{(3,0)}=0$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্ব x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহার সমীকরণ $x=3$.

15. (*a*) (i) সত্য।

(*b*) $y.2=2(x+1)$ বা, $y=x+1$.

(*c*) $2x+3y=1$ বা, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

সুতরাং এখানে $m=-\frac{2}{3},\ c=\frac{1}{3}$ $\therefore\ \frac{1}{3}=\frac{a}{-\frac{2}{3}}$

বা, $a=-\frac{2}{9}$. $\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=|\,4a\,|=\frac{8}{9}$.
